

УДК 514.16

h-ПРОСТРАНСТВА ТИПА {2 2 1} ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

A.H. Карузин

Аннотация

Для нахождения инфинитезимальных проективных преобразований псевдориманова многообразия (M, G) применен метод косонормального репера А.В. Аминовой [1], с помощью которого можно свести решение данной задачи к решению уравнений Эйзенхарта и обобщенных уравнений Киллинга. В данной работе интегрируются уравнения Эйзенхарта для 5-мерных пространств, определяемых тензором h_{AB} типа {2, 1, 1}.

Векторное поле X на 5-мерном римановом многообразии (M, G) с метрикой G и связностью Леви-Чивита называется инфинитезимальным проективным преобразованием или проективным движением, если локальная 1-параметрическая группа локальных преобразований, порожденная векторным полем X в окрестности каждой точки $p \in M$, сохраняет геодезические. Необходимое и достаточное условие этого состоит в выполнении следующего равенства:

$$(L_X G_{AB})_{;C} = 2G_{AB}\varphi_{;C} + G_{AC}\varphi_{;B} + G_{BC}\varphi_{;A}, \quad (1)$$

где $L_X G_{AB}$ – производная Ли метрики G_{AB} в направлении проективного движения X , φ – некоторая функция координат x^1, \dots, x^5 , а точка с запятой означает ковариантное дифференцирование относительно G_{AB} (здесь и далее все индексы, обозначенные заглавными латинскими буквами, принимают значения от 1 до 5).

Интегрирование данных уравнений в общем виде вряд ли возможно, поэтому воспользуемся методом косонормального репера Аминовой (см., например, монографию [1]).

Согласно этому методу задача интегрирования уравнений (1) разбивается на ряд случаев. Признаком разбиения служит тип (характеристика Сегре) тензора $L_X G_{AB}$. При этом уравнения (1) разбиваются на две группы: уравнения Эйзенхарта

$$h_{AB;C} = 2G_{AB}\varphi_{;C} + G_{AC}\varphi_{;B} + G_{BC}\varphi_{;A} \quad (2)$$

и обобщенные уравнения Киллинга

$$L_X G_{AB} = h_{AB}. \quad (3)$$

Задав тип тензора h_{AB} , можно найти общие решения уравнений (2) и (3). Метрики, допускающие нетривиальные решения $h_{AB} \neq cG_{AB}$ уравнений Эйзенхарта, называются h -метриками, а определяемые ими пространства – h -пространствами.

В данной работе интегрируются уравнения Эйзенхарта (2) для пространств, определяемых тензором h_{AB} типа {2 2 1}, для каждого пространства находятся соответствующие h -метрики и формулируются условия постоянства кривизны найденных h -пространств.

После замены

$$h_{AB} = a_{AB} + 2\varphi G_{AB} \quad (4)$$

уравнения (2) принимают вид

$$a_{AB;C} = G_{AC}\varphi_{;B} + G_{BC}\varphi_{;A}. \quad (5)$$

Запишем эти уравнения в инвариантной форме [1]:

$$X_R \bar{a}_{PQ} + \sum_{H=1}^5 e_H (\bar{a}_{HQ} \gamma_{\tilde{H}PR} + \bar{a}_{PH} \gamma_{\tilde{H}QR}) = \bar{G}_{PR} X_Q \varphi + \bar{G}_{QR} X_P \varphi. \quad (6)$$

Здесь $\frac{A}{P} \xi$ – компоненты векторов канонического косонормального репера,

$$\gamma_{PQR} = -\gamma_{QPR} = \frac{A}{P} \xi_{A;B} \frac{B}{Q} \xi_{Q;R}, \quad X_P \varphi = \frac{A}{P} \varphi_{;A};$$

$$\tilde{1} = 2, \quad \tilde{2} = 1, \quad \tilde{3} = 4, \quad \tilde{4} = 3, \quad \tilde{5} = 5;$$

$$e_1 = e_2 = e = \pm 1, \quad e_3 = e_4 = \tilde{e} = \pm 1, \quad e_5 = \hat{e} = \pm 1,$$

канонические формы \bar{G}_{AB} и \bar{a}_{AB} определяются формулами

$$(\bar{G}_{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{e} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{e} \end{pmatrix}, \quad (\bar{a}_{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & e\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ e\lambda_1 & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{e}\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{e}\lambda_2 & \tilde{e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{e}\lambda_3 \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – произвольные функции координат x^1, \dots, x^5 .

Подставив в (6) вместо \bar{G}_{PQ} и \bar{a}_{AB} соответствующие канонические значения, получим следующие равенства:

$$X_1 \varphi = 0, \quad X_3 \varphi = 0, \quad X_R \lambda_1 = \delta_R^2 X_2 \varphi, \quad X_R \lambda_2 = \delta_R^4 X_4 \varphi, \quad X_R \lambda_3 = 2\delta_R^5 X_5 \varphi, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{11R} &= 0, \quad \gamma_{22R} = 0, \quad \gamma_{33R} = 0, \quad \gamma_{44R} = 0, \quad \gamma_{55R} = 0, \quad \gamma_{13R} = 0, \\ \gamma_{12R} &= e \delta_R^1 X_2 \varphi, \quad \gamma_{14R} = \frac{e}{\lambda_1 - \lambda_2} \delta_R^2 X_4 \varphi, \quad \gamma_{15R} = \frac{e}{\lambda_1 - \lambda_3} \delta_R^2 X_5 \varphi, \\ \gamma_{23R} &= \frac{\tilde{e}}{\lambda_1 - \lambda_2} \delta_R^4 X_2 \varphi, \quad \gamma_{34R} = \tilde{e} \delta_R^3 X_4 \varphi, \quad \gamma_{35R} = \frac{\tilde{e}}{\lambda_2 - \lambda_3} \delta_R^4 X_5 \varphi, \\ \gamma_{24R} &= e \left(-\frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \delta_R^2 + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \delta_R^1 \right) X_4 \varphi + \\ &\quad + \tilde{e} \left(\frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \delta_R^4 + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \delta_R^3 \right) X_2 \varphi, \\ \gamma_{25R} &= e \left(-\frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_3)^2} \delta_R^2 + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_3} \delta_R^1 \right) X_5 \varphi + \hat{e} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_3} \delta_R^5 X_2 \varphi, \\ \gamma_{45R} &= \tilde{e} \left(-\frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_3)^2} \delta_R^4 + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_3} \delta_R^3 \right) X_5 \varphi + \hat{e} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_3} \delta_R^5 X_4 \varphi, \end{aligned} \quad (8)$$

здесь δ_R^Q – символы Кронекера.

Для того чтобы система уравнений с частными производными

$$X_s \theta = \frac{A}{s} \partial_A \theta = 0 \quad (s = 1, \dots, p; \quad A = 1, \dots, 5; \quad \frac{\partial}{\partial X^A} = \partial_A),$$

где $\overset{A}{\xi}_s$ – компоненты векторов введенного выше репера, была вполне интегрируемой, то есть для того, чтобы она допускала $n - p = 5 - p$ независимых решений, необходимо и достаточно, чтобы все коммутаторы операторов системы

$$(X_s, X_R) \equiv X_s X_R - X_R X_s = \sum_{Q=1}^5 e_Q (\gamma_{QsR} - \gamma_{QRs}) X_{\tilde{Q}} \quad (9)$$

линейно выражались через операторы X_s [1].

Используя формулы (8), составим всевозможные скобки Ли векторных полей $X_s = \overset{A}{\xi}_s \frac{\partial}{\partial X^A}$:

$$\begin{aligned} (X_1, X_2) &= -X_2 \varphi X_2, \quad (X_1, X_3) = 0, \quad (X_1, X_4) = -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} X_4 \varphi X_1, \\ (X_1, X_5) &= -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_3} X_5 \varphi X_1, \quad (X_2, X_3) = -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} X_2 \varphi X_3, \\ (X_2, X_4) &= -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} X_4 \varphi X_2 + \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} X_4 \varphi X_1 - \\ &\quad -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} X_2 \varphi X_4 - \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} X_2 \varphi X_3, \\ (X_2, X_5) &= -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_3} X_5 \varphi X_2 + \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_3)^2} X_5 \varphi X_1 - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_3} X_2 \varphi X_5, \\ (X_3, X_4) &= -X_4 \varphi X_4, \quad (X_3, X_5) = -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_3} X_5 \varphi X_3, \\ (X_4, X_5) &= -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_3} X_5 \varphi X_4 + \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_3)^2} X_5 \varphi X_3 - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_3} X_4 \varphi X_5. \end{aligned} \quad (10)$$

Выбрав из системы уравнений $X_s \theta = 0$, $s = 1, \dots, 5$, вполне интегрируемые подсистемы (например, $X_1 \theta = X_2 \theta = X_3 \theta = X_4 \theta = 0$ и т. д.), обозначим их решения θ^A и сделаем преобразования координат $x^{A'} = \theta^A(x)$. В новой системе координат, опустив штрихи, получим

$$\begin{aligned} \overset{2}{\xi}_1 = \overset{3}{\xi}_1 = \overset{4}{\xi}_1 = \overset{5}{\xi}_1 &= 0, \quad \overset{3}{\xi}_2 = \overset{4}{\xi}_2 = \overset{5}{\xi}_2 = 0, \quad \overset{1}{\xi}_3 = \overset{2}{\xi}_3 = \overset{4}{\xi}_3 = \overset{5}{\xi}_3 = 0, \\ \overset{1}{\xi}_4 = \overset{2}{\xi}_4 = \overset{3}{\xi}_4 = \overset{5}{\xi}_4 &= 0, \quad \overset{1}{\xi}_5 = \overset{2}{\xi}_5 = \overset{3}{\xi}_5 = \overset{4}{\xi}_5 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Проинтегрировав с этими условиями уравнения (7), найдем

$$\varphi = \lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{2} \lambda_3 + \text{const}, \quad (12)$$

где $\lambda_1 = \lambda_1(x^2)$, $\lambda_2 = \lambda_2(x^4)$, $\lambda_3 = \lambda_3(x^5)$ – произвольные функции указанных переменных.

Приравняв координаты векторных полей в левых и правых частях равенств (10), с учетом формул (11) и (12) приедем к системе нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными для компонент векторных полей X_s . Проинтегрировав эту систему и выполнив подходящие преобразования

координат, найдем контравариантные компоненты векторов канонического косонормального репера:

$$\begin{aligned}
 \xi_1^1 &= \frac{1}{(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon} x^4)(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon} x^5)^{1/2}}, \\
 \xi_2^1 &= -\frac{1}{(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon} x^4)(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon} x^5)^{1/2}} \left(\frac{1}{(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon} x^4)} + \frac{1}{2} \frac{1}{(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon} x^5)} \right), \\
 \xi_2^2 &= \frac{1}{(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon} x^4)(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon} x^5)^{1/2} (\varepsilon x^1 + \sigma(x^2))}, \\
 \xi_3^3 &= \frac{1}{(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon} x^4)(\tilde{\varepsilon} x^4 - \hat{\varepsilon} x^5)^{1/2}}, \\
 \xi_4^3 &= \frac{1}{(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon} x^4)(\tilde{\varepsilon} x^4 - \hat{\varepsilon} x^5)^{1/2}} \left(\frac{1}{(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon} x^4)} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\tilde{\varepsilon} x^4 - \hat{\varepsilon} x^5)} \right), \\
 \xi_4^4 &= \frac{1}{(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon} x^4)(\tilde{\varepsilon} x^4 - \hat{\varepsilon} x^5)^{1/2} (\tilde{\varepsilon} x^3 + \tau(x^4))}, \\
 \xi_5^5 &= \frac{1}{(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon} x^5)(\tilde{\varepsilon} x^4 - \hat{\varepsilon} x^5)}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

где σ, τ – произвольные функции указанных переменных, а $\varepsilon, \tilde{\varepsilon}, \hat{\varepsilon}$ принимают значения 0 или 1.

По формулам

$$G^{AB} = \sum_{H=1}^5 e_H \overset{A}{\xi}_H \overset{B}{\xi} \tag{14}$$

вычислим сначала контравариантные, а затем найдем ковариантные компоненты метрического тензора:

$$\begin{aligned}
 G_{AB} dx^A dx^B &= e(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon} x^4)(\varepsilon x^1 + \sigma(x^2))(2(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon} x^4)(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon} x^5) \times \\
 &\quad \times dx^1 dx^2 + (\varepsilon x^1 + \sigma(x^2))(3\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon} x^4 - 2\hat{\varepsilon} x^5)(dx^2)^2) + \tilde{e}(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon} x^4) \times \\
 &\quad \times (\tilde{\varepsilon} x^3 + \tau(x^4))(2(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon} x^4)(\tilde{\varepsilon} x^4 - \hat{\varepsilon} x^5) dx^3 dx^4 + (\tilde{\varepsilon} x^3 + \tau(x^4)) \times \\
 &\quad \times (\varepsilon x^2 - 3\tilde{\varepsilon} x^4 + 2\hat{\varepsilon} x^5)(dx^4)^2) + \hat{e}(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon} x^5)^2 (\tilde{\varepsilon} x^4 - \hat{\varepsilon} x^5)^2 (dx^5)^2,
 \end{aligned} \tag{15}$$

Используя (15), по формулам $\overset{B}{\xi}_A = G_{AB} \overset{B}{\xi}_c$ определим ковариантные компоненты векторов канонического косонормального репера, затем по формуле $a_{AB} = \sum_{P,Q=1}^5 e_P e_Q \bar{a}_{PQ} \overset{P}{\xi}_A \overset{Q}{\xi}_B$ вычислим компоненты тензора a_{AB} и, наконец, с учетом равенства (4), найдем компоненты тензора h_{AB} :

$$\begin{aligned}
 h_{AB} dx^A dx^B &= (3\varepsilon x^2 + 2\tilde{\varepsilon} x^4 + \hat{\varepsilon} x^5)(2G_{12} dx^1 dx^2 + G_{22}(dx^2)^2) + \\
 &\quad + ((2\varepsilon x^2 + 3\tilde{\varepsilon} x^4 + \hat{\varepsilon} x^5)(2G_{34} dx^3 dx^4 + G_{44}(dx^4)^2) + \\
 &\quad + (\varepsilon x^1 + \sigma(x^2))G_{12}(dx^2)^2 + (\tilde{\varepsilon} x^3 + \tau(x^4))G_{34}(dx^4)^2 + \\
 &\quad + 2(\varepsilon x^2 + \tilde{\varepsilon} x^4 + \hat{\varepsilon} x^5)G_{55}(dx^5)^2).
 \end{aligned} \tag{16}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что тензоры h_{AB} , G_{AB} и функция φ , определенные (12), (15) и (16), удовлетворяют уравнениям (2).

Таким образом, справедлива

Теорема 1. Для того чтобы псевдориманово многообразие M, G было h -пространством типа {2 2 1}, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой

голономной системе координат его метрика определялась формулами (12), (15) и (16), при этом канонический косонормальный репер имел вид (13).

Детерминант метрического тензора (15) имеет вид

$$\hat{e}(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)^8(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)^4(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)^4(\varepsilon x^1 + \sigma(x^2))^2(\tilde{\varepsilon}x^3 + \tau(x^4))^2, \quad (17)$$

для его невырожденности необходимо выполнение условий

$$\begin{aligned} (\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4) &\neq 0, & (\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5) &\neq 0, & (\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5) &\neq 0, \\ (\varepsilon x^1 + \sigma(x^2)) &\neq 0, & (\tilde{\varepsilon}x^3 + \tau(x^4)) &\neq 0. \end{aligned} \quad (18)$$

В дальнейшем нам понадобятся компоненты тензора кривизны метрики G_{AB} (15). Ненулевые компоненты тензора Римана h -пространства типа {2 2 1} имеют вид:

$$\begin{aligned} R_{112}^1 &= -R_{212}^2 = \frac{\varepsilon \frac{d\sigma(x^2)}{dx^2}}{(\varepsilon x^1 + \sigma(x^2))^2} - \frac{e\hat{e}\hat{\varepsilon}(\varepsilon x^1 + \sigma(x^2))(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)^2}{4(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)^3(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)^2}, \\ R_{212}^1 &= \frac{(3\varepsilon x^2 - 2\hat{\varepsilon}x^5 - \tilde{\varepsilon}x^4)}{(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)} \times \\ &\times \left(\frac{\varepsilon \frac{d\sigma(x^2)}{dx^2}}{(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)(\varepsilon x^1 + \sigma(x^2))} - \frac{e\hat{e}\hat{\varepsilon}(\varepsilon x^1 + \sigma(x^2))^2(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)}{4(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)^3(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)^2} \right), \\ R_{314}^1 &= R_{413}^1 = R_{324}^2 = R_{423}^2 = -\frac{\tilde{e}\hat{e}\hat{\varepsilon}(\tilde{\varepsilon}x^3 + \tau(x^4))(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)^2}{4(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)^3(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)^2}, \\ R_{324}^1 &= R_{423}^1 = \frac{\tilde{e}\hat{e}\hat{\varepsilon}(\varepsilon x^1 + \sigma(x^2))(\tilde{\varepsilon}x^3 + \tau(x^4))(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)^2}{4(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)^4(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)^2} + \\ &+ \frac{e\tilde{e}\varepsilon(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)(\tilde{\varepsilon}x^3 + \tau(x^4))\frac{d\sigma(x^2)}{dx^2}}{(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)(\varepsilon x^1 + \sigma(x^2))^2}, \\ R_{414}^1 &= R_{424}^2 = -\frac{\tilde{\varepsilon} \frac{d\tau(x^4)}{dx^4}}{(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)(\tilde{\varepsilon}x^3 + \tau(x^4))} + \frac{\tilde{e}\hat{e}\hat{\varepsilon}(\tilde{\varepsilon}x^3 + \tau(x^4))^2(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)}{2(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)^3(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)^2}, \\ R_{424}^1 &= \frac{\tilde{\varepsilon} \frac{d\tau(x^4)}{dx^4}(\varepsilon x^1 + \sigma(x^2))}{(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)^2(\tilde{\varepsilon}x^3 + \tau(x^4))} + \frac{e\tilde{e}\varepsilon \frac{d\sigma(x^2)}{dx^2}(\varepsilon x^2 - 2\tilde{\varepsilon}x^4 + \hat{\varepsilon}x^5)}{(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)^2(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)} \times \\ &\times \frac{(\tilde{\varepsilon}x^3 + \tau(x^4))^2}{(\varepsilon x^1 + \sigma(x^2))^2} - \frac{\tilde{e}\hat{e}\hat{\varepsilon}(\tilde{\varepsilon}x^3 + \tau(x^4))^2(\varepsilon x^1 + \sigma(x^2))(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)}{2(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)^4(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)^2}, \\ R_{515}^1 &= R_{525}^2 = \frac{\hat{\varepsilon}(2\varepsilon x^2 + 3\tilde{\varepsilon}x^4 - 5\hat{\varepsilon}x^5)}{4(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)^2(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)}, \\ R_{525}^1 &= -\frac{\hat{\varepsilon}(\varepsilon x^1 + \sigma(x^2))((\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)^2 - 2(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)^2)}{2(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)^3(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)} + \\ &+ \frac{e\hat{e}\varepsilon \frac{d\sigma(x^2)}{dx^2}(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)^2}{(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)^2(\varepsilon x^1 + \sigma(x^2))^2}, \\ R_{123}^3 &= R_{213}^3 = R_{124}^4 = R_{214}^4 = \frac{e\hat{e}\hat{\varepsilon}(\varepsilon x^1 + \sigma(x^2))(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)^2}{4(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)^3(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{124}^3 &= R_{214}^3 = -\frac{e\hat{e}\hat{\varepsilon}(\tilde{\varepsilon}x^3 + \tau(x^4))(\varepsilon x^1 + \sigma(x^2))(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)^2}{4(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)^4(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)^2} + \\
&\quad + \frac{e\tilde{e}\tilde{\varepsilon}\frac{d\tau(x^4)}{dx^4}(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)(\varepsilon x^1 + \sigma(x^2))}{(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)(\tilde{\varepsilon}x^3 + \tau(x^4))^2}, \tag{19} \\
R_{223}^3 &= R_{224}^4 = -\frac{e\tilde{e}(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)\frac{d\sigma(x^2)}{dx^2}}{(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)(\tilde{\varepsilon}x^3 + \tau(x^4))} + \frac{e\hat{e}\hat{\varepsilon}(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)(\varepsilon x^1 + \sigma(x^2))^2}{2(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)^2(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)^3}, \\
R_{224}^3 &= -\frac{\varepsilon\frac{d\sigma(x^2)}{dx^2}(\tilde{\varepsilon}x^3 + \tau(x^4))}{(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)^2(\varepsilon x^1 + \sigma(x^2))} + \frac{e\tilde{e}\tilde{\varepsilon}(2\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)}{(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)^2(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)} \times \\
&\quad \times \frac{(\varepsilon x^1 + \sigma(x^2))^2}{(\tilde{\varepsilon}x^3 + \tau(x^4))^2} - \frac{e\hat{e}\hat{\varepsilon}(\tilde{\varepsilon}x^3 + \tau(x^4))(\varepsilon x^1 + \sigma(x^2))^2(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)}{2(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)^2(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)^4}, \\
R_{334}^3 &= -R_{434}^4 = \frac{\tilde{\varepsilon}\frac{d\tau(x^4)}{dx^4}}{(\tilde{\varepsilon}x^3 + \tau(x^4))^2} - \frac{\tilde{e}\hat{e}\hat{\varepsilon}(\tilde{\varepsilon}x^3 + \tau(x^4))(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)^2}{4(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)^3(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)^2}, \\
R_{434}^3 &= \frac{(3\tilde{\varepsilon}x^4 - 2\hat{\varepsilon}x^5 - \varepsilon x^2)}{(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)} \times \\
&\quad \times \left(-\frac{\tilde{\varepsilon}\frac{d\tau(x^4)}{dx^4}}{(\tilde{\varepsilon}x^3 + \tau(x^4))(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)} + \frac{\tilde{e}\hat{e}\hat{\varepsilon}(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)(\tilde{\varepsilon}x^3 + \tau(x^4))^2}{4(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)^3(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)^2} \right), \\
R_{535}^3 &= R_{545}^4 = \frac{3\hat{\varepsilon}(3\varepsilon x^2 + 2\tilde{\varepsilon}x^4 - 5\hat{\varepsilon}x^5)}{4(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)^2(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)}, \\
R_{545}^3 &= \frac{\tilde{e}\hat{e}\tilde{\varepsilon}\frac{d\tau(x^4)}{dx^4}(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)^2}{(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)^2(\tilde{\varepsilon}x^3 + \tau(x^4))^2} - \frac{\tilde{\varepsilon}(\tilde{\varepsilon}x^3 + \tau(x^4))(2\varepsilon x^2 + \tilde{\varepsilon}x^4 - 3\hat{\varepsilon}x^5)}{2(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)^3}, \\
R_{125}^5 &= R_{215}^5 = -\frac{e\hat{e}\hat{\varepsilon}(2\varepsilon x^2 + 3\tilde{\varepsilon}x^4 - 5\hat{\varepsilon}x^5)(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)^2(\varepsilon x^1 + \sigma(x^2))}{4(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)^3(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)^3}, \\
R_{225}^5 &= -\frac{\varepsilon\frac{d\sigma(x^2)}{dx^2}}{(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)(\varepsilon x^1 + \sigma(x^2))} - \\
&\quad + \frac{e\hat{e}\hat{\varepsilon}(\varepsilon x^1 + \sigma(x^2))^2(4\varepsilon x^2 + \tilde{\varepsilon}x^4 - 5\hat{\varepsilon}x^5)(\varepsilon x^2 + \tilde{\varepsilon}x^4 - 2\hat{\varepsilon}x^5)}{4(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)^4(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)^3}, \\
R_{345}^5 &= R_{435}^5 = -\frac{3\tilde{e}\hat{e}\hat{\varepsilon}(\tilde{\varepsilon}x^3 + \tau(x^4))(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)^2(3\varepsilon x^2 + 2\tilde{\varepsilon}x^4 - 5\hat{\varepsilon}x^5)}{4(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)^3(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)^3}, \\
R_{445}^5 &= -\frac{\tilde{\varepsilon}\frac{d\tau(x^4)}{dx^4}}{(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)(\tilde{\varepsilon}x^3 + \tau(x^4))} + \\
&\quad + \frac{\tilde{e}\hat{e}\hat{\varepsilon}(\varepsilon x^2 + \tilde{\varepsilon}x^4 - 2\hat{\varepsilon}x^5)(\varepsilon x^2 + 4\tilde{\varepsilon}x^4 - 5\hat{\varepsilon}x^5)(\varepsilon x^2 - \tilde{\varepsilon}x^4)(\tilde{\varepsilon}x^3 + \tau(x^4))^2}{4(\varepsilon x^2 - \hat{\varepsilon}x^5)^3(\tilde{\varepsilon}x^4 - \hat{\varepsilon}x^5)^4}.
\end{aligned}$$

Сформулируем основное утверждение нашей работы.

Теорема 2. Если h -пространство типа {2 2 1} имеет постоянную кривизну, то эта кривизна равна нулю. Необходимые и достаточные условия того, что

h-пространство типа {2 2 1} является пространством постоянной кривизны, имеют вид

$$\frac{d\sigma(x^2)}{dx^2} = 0, \quad \frac{d\tau(x^4)}{dx^4} = 0, \quad \hat{\varepsilon} = 0. \quad (20)$$

Доказательство. Необходимое и достаточное условие постоянства кривизны псевдориманова пространства выражается равенством

$$R_{BCD}^A = K(\delta_C^A G_{BD} - \delta_D^A G_{BC}), \quad (21)$$

где K – постоянная. Отсюда, в частности, следует

$$R_{324}^1 = 0 \text{ и } R_{324}^1 = 0.$$

Учитывая (18), из первого равенства получим $\hat{\varepsilon} = 0$ и $\frac{d\sigma(x^2)}{dx^2} = 0$, после этого из второго равенства найдем $\frac{d\tau(x^4)}{dx^4} = 0$. Легко убедиться в том, что при этих условиях все компоненты тензора кривизны (19) обращаются в нуль и, в силу (21), $K = 0$.

Наоборот, подставив условия (20) в формулы (19), получим, что все компоненты тензора кривизны рассмотренного *h*-пространства равны нулю, что доказывает теорему. \square

Решению дальнейшей задачи – интегрированию обобщенных уравнений Киллинга и определению 1-параметрических групп Ли проективных движений рассмотренных *h*-пространств – будут посвящены следующие работы автора.

Автор благодарит профессора А.В. Аминову за постановку задачи, полезные обсуждения и постоянную поддержку.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02-01-00996).

Summary

A.N. Karuzin. h-spaces of type {2, 2, 1} having constant curvature.

In order to find projective transformations of a pseudo-Riemannian manifold one can use A.V. Aminov's method of skew-orthogonal frame [1]. This method makes it possible to reduce the problem to solving Eisenhart equations and generalized Killing equations. In the present paper we integrate the Eisenhart equations for 5-dimensional *h*-spaces of type {2, 1, 1}.

Литература

1. Аминова А.В. Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. – М.: Янус-К, 2003. – 619 с.
2. Соловьевников А.С. Проективные преобразования римановых пространств // УМН. – 1956. – Вып. 11. – С. 45–116.
3. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. – М.: Иностр. лит-ра, 1948.

Поступила в редакцию
09.12.04

Карузин Андрей Николаевич – аспирант кафедры теории относительности и гравитации Казанского государственного университета.

E-mail: Andrey.Karuzin@ksu.ru