

**ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**

КОНДРАТЬЕВА Е.Д.

**МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОБРАБОТКИ НАБЛЮДЕНИЙ**

2 ЧАСТЬ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Казань 2000

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
физического факультета

УДК 528.1

Кондратьева Е.Д. Методическое пособие по численным методам, предназначенное для студентов 2 курса специальности "Астрономия".

В пособии излагаются методы интерполяции по таблице с переменным шагом и таблице с двумя входами, что характерно при обработке наблюдаемых величин. Здесь содержится теория сплайн-интерполяции, как наиболее точной формы определения промежуточных значений, употребляемая при обработке высокоточных данных, как правило, при использовании массовых спутниковых наблюдений. Далее приводятся основы численного интегрирования и решения уравнений методом итераций, а также широко применяемый способ решения системы линейных уравнений методом наименьших квадратов.

Рецензент: кандидат физ.мат.наук **ПОДОЛЬСКИЙ В.Г.**

© Физический факультет
Казанского государственного
университета, 2000

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

При исследовании различных процессов и явлений природы с помощью математического аппарата используются самые разнообразные функции. Эти функции могут задаваться различными способами. Простейший из них - залание алгебраического выражения, которое дает возможность по заданным значениям аргумента вычислить ее величину. Однако, часто функции определяются бесконечными рядами и вычисление их требует вычисления сходимости и определения числа членов, необходимых для получения заданной точности. Искомое выражение может быть задано неопределенным интегралом или дифференциальным уравнением. Даже если их можно выразить через элементарные функции, эти выражения часто бывают очень громоздкими. Во всех случаях, когда значения функций нецелесообразно каждый раз вычислять напрямую для всех значений аргумента, прибегают к составлению таблиц. При этом задается последовательность значений функции при различных значениях аргумента. Например: функция $x=f(t)$ определена таблицей своих значений x_i при заланных значениях аргумента t_i , где $i=1,2,\dots,n$. Значения x_i иногда называются узлами. Определение значений функции для произвольных значений аргумента, не совпадающих с табличными, называется интерполяцией.

В первой части курса мы уже познакомились с интерполяцией по таблице с постоянным шагом и связанной с ним обратной задачей. Однако в практике астрономических вычислений бывает необходимо делать интерполяцию наблюденных величин. Их, как известно, невозможно сделать точно в один и те же моменты от суток к суткам. В подобных случаях необходимо использовать специальный метод интерполяции с помощью разделенных разностей.

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ПО ТАБЛИЦЕ С ПЕРЕМЕННЫМ ШАГОМ

Рассмотрим таблицу, в которой заданные значения аргумента t разделены неравными промежутками, т.е.

$$t_3 - t_2 \neq t_2 - t_1 \neq t_1 - t_0$$

Понятие табличного шага W в таком случае не существует. Невозможно вычислить и обычный коэффициент интерполяции n . Однако для этой задачи выведены специальные формулы, позволяющие находить любые промежуточные значения аргумента. Возьмем таблицу исходных значений аргументов и соответствующих им функций:

t_0	f_0
t_1	f_1
t_2	f_2
t_3	f_3

Разделенной разностью 1-го порядка называется отношение разности двух значений функции к разности их аргументов. При этом в скобках указано какие именно аргументы взяты.

$$f(t_1, t_0) = (f_1 - f_0)/(t_1 - t_0) \quad f(t_2, t_1) = (f_2 - f_1)/(t_2 - t_1)$$

Разделенной разностью 2-го порядка называется отношение разности двух разделенных разностей первого порядка к разности крайних значений аргументов.

$$f(t_2, t_1, t_0) = (f(t_2, t_1) - f(t_1, t_0))/(t_2 - t_0)$$

$$f(t_3, t_2, t_1) = (f(t_3, t_2) - f(t_2, t_1))/(t_3 - t_1)$$

Аналогично составляются и разности всех остальных порядков. Например, разность третьего порядка:

$$f(t_3, t_2, t_1, t_0) = (f(t_3, t_2, t_1) - f(t_2, t_1, t_0))/(t_3 - t_0)$$

Рабочая формула для интерполяирования по таблице с переменным шагом:

$$\begin{aligned} f(t) = & f_0 + (t - t_0) \times f(t_1, t_0) + (t - t_1) \times (t - t_0) \times f(t_2, t_1, t_0) + \\ & + (t - t_2) \times (t - t_1) \times (t - t_0) \times f(t_3, t_2, t_1, t_0) + \dots \end{aligned}$$

Здесь t — то значение аргумента, для которого мы определяем значение функции, t_0 — предыдущее значение аргумента.

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ПО ТАБЛИЦЕ С ДВУМЯ ВХОДАМИ

Иногда бывает необходимо интерполировать функцию, зависящую от двух аргументов. Задача такого рода может быть решена двумя путями: путем двукратного применения простого интерполяции или по специальным формулам путем вычисления двойных разностей. Первый метод значительно проще и чаще применяется на практике. Разберем его на примере. Часовой угол Солнца t может быть вычислен для каждой точки на поверхности Земли. На данной широте часовой угол вычисляется в зависимости от высоты h и склонения δ .

В таблицах задано:

$\delta \backslash h$	14°	18°	22°
10°	5 ^h 19 ^m 56 ^s	4 ^h 59 ^m 37 ^s	4 ^h 39 ^m 17 ^s
15°	5 ^h 35 ^m 05 ^s	5 ^h 14 ^m 39 ^s	4 ^h 54 ^m 17 ^s
20°	5 ^h 50 ^m 17 ^s	5 ^h 29 ^m 27 ^s	5 ^h 08 ^m 48 ^s

Требуется найти часовой угол t для $\delta=12^\circ$, $h=16^\circ$. Сначала путем обыкновенного интерполяирования найдем значения $t(12, 14)$, $t(12, 18)$, $t(12, 22)$. При этом можно использовать любую из известных формул интерполяции по таблице с постоянным шагом. После этих вычислений мы будем иметь новую таблицу, которую удобнее переписать

как обычно в один столбик:

δ	=	12°
$h=14^\circ$	$5^h 26^m 01^s$	
$h=18^\circ$	$5^h 05^m 40^s$	
$h=22^\circ$	$4^h 45^m 21^s$	

Теперь снова простым интерполированием находим искомую величину для $h=16^\circ$.

Все рассмотренные нами функции интерполяции относятся к полиномиальным. В них исходная функция заменяется каким-либо алгебраическим полиномом. Кроме этого, существует еще один вид решения поставленной задачи — это кусочно-полиномиальная интерполяция.

СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Кубические сплайн-функции — это недавнее математическое изобретение. Монография их создателей появилась только в 1967 году, в русском переводе — в 1972. Если сплайн представить функцией $S(x)$, то при малых наклонах вторая производная $S''(x)$ приблизительно равна кривизне, а дифференциал длины дуги можно приближенно заменить на dx . Таким образом, для подобного линеаризованного сплайна получаем

$$\int (S''(x))^2 dx$$

Если заданы значения функции y_i в точках x_i , т.е.

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots (x_n, y_n),$$

то линеаризованный сплайн $S(x)$ является функцией, для которой

$$S(x_i) = y_i$$

При этом интеграл $\int_{x_1}^{x_2} (S''(x))^2 dx$ имеет минимальное значение.

Конечно, подобное заключение верно в предположении, что S и S' непрерывны на всем интервале от x_1 до x_n . Кроме того, $S(x)$ является кубическим полиномом между каждой соседней парой точек, а соседние полиномы соединяются непрерывно, также как и их первые и вторые производные.

Кубическая силайн-функция, удовлетворяющая условиям $S''(x_1) = S''(x_n) = 0$, называется естественным кубическим сплайном.

Доказано, что эта функция единственная, имеющая минимальную кривизну, среди всех функций, интерполирующих данные точки. То есть естественный кубический сплайн — самая гладкая из функций, интерполирующих данные точки. Построение кубического сплайна — простой и численно устойчивый процесс.

Рассмотрим один из подинтервалов от x_i до x_{i+1} .

Пусть $h_i = x_{i+1} - x_i$

$$W = \frac{x - x_i}{h_i} \quad \bar{W} = 1 - W$$

Когда x пробегает этот подинтервал, W меняется от 0 до 1, а \bar{W} от 1 до 0. Мы приходим к представлению сплайна на этом подинтервале формулой

$$S(x) = W \times y_{i+1} + \bar{W} \times y_i + h_i^2 \times [(W^3 - W) \times \sigma_{i+1} + (\bar{W}^3 - \bar{W}) \times \sigma_i]$$

Здесь σ_i и σ_{i+1} — некоторые константы, пока еще не определенные. Первые два члена в выражении для $S(x)$ соответствуют линейной интерполяции, а третий член — это кубическая поправка, которая и обеспечивает дополнительную гладкость функции.

Заметим, что поправочный член обращается в 0 на концах подинтервала, т.е.

$$\begin{aligned} S(x_i) &= y_i, \\ S(x_{i+1}) &= y_{i+1} \end{aligned}$$

Таким образом, функция $S(x)$ интерполирует заданные значения даже независимо от выбранных для σ_i величин. Следовательно, наша задача — определение σ . Сделаем следую-

щее: продифференцируем $S(x)$ трижды, учитывая при этом, что

$$W = 1/h_i \quad \bar{W} = -1/h_i$$

Тогда имеем:

$$S'(x) = (y_{i+1} - y_i)/h_i + h_i \times [(3 \times W^2 - 1) \times \sigma_{i+1} - (3 \times \bar{W}^2 - 1) \times \sigma_i]$$

$$S''(x) = 6 \times W \times \sigma_{i+1} - 6 \times \bar{W} \times \sigma_i$$

$$S'''(x) = [6 \times (\sigma_{i+1} - \sigma_i)]/h_i$$

Отметим, что $S''(x)$ — линейная функция, интерполирующая значения $6\sigma_i$ и $6\sigma_{i+1}$. Следовательно,

$$\sigma_i = S''(x)/6$$

Кроме того, $S'''(x)$ является константой на каждом подинтервале, а четвертая производная функции $S(x)$ равна 0.

Вычисление $S'(x)$ в конечных точках выбранного подинтервала дает:

$$S'_+(x_i) = \Delta_i - h_i \times (\sigma_{i+1} + 2\sigma_i)$$

$$S'_(x_{i+1}) = \Delta_i + h_i \times (2\sigma_{i+1} + \sigma_i),$$

где $\Delta_i = (y_{i+1} - y_i)/h_i$.

Обозначение S'_+ использовано нами потому, что формула $S(x)$ имеет силу только на интервале (x_i, x_{i+1}) и поэтому производные в конечных точках односторонние. Чтобы получить необходимую непрерывность $S'(x)$ накладываем условия

$$S'_(x_i) = S'_+(x_i) \quad i = 2, \dots, n-1$$

Тогда, хотя выражение $S'_(x_i)$ выводится из рассмотрения подинтервала (x_{i-1}, x_i) , формула для него получается простой заменой i на $(i-1)$.

Это приводит к равенству

$$\Delta_{i-1} + h_{i-1} \times (2\sigma_i + \sigma_{i-1}) = \Delta_i - h_i \times (\sigma_{i+1} + 2\sigma_i),$$

откуда

$$h_{i-1} \times \sigma_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) \times \sigma_i + h_i \times \sigma_{i+1} = \Delta_i - \Delta_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n-1$$

Эта система из $(n-2)$ линейных уравнений содержит n неизвестных коэффициентов σ_i , $i = 1, \dots, n$. Поэтому необходимо найти еще два условия.

Пусть $C_1(x)$ и $C_n(x)$ единственны кубические кривые, которые проходят через четыре первые и четыре последние из заданных точек. Тогда есть два граничных условия:

$$S'''(x_1) = C'''_1, \quad S'''(x_n) = C'''_n$$

Константы C'''_1 и C'''_n можно определить из исходных данных задачи, минуя вычисление $C_1(x)$ и $C_n(x)$.

Мы уже ввели обозначение величин Δ_i :

$$\Delta_i = (y_{i+1} - y_i)/(x_{i+1} - x_i)$$

Это не что иное, как приближенное значение первой производной. Пусть

$$\Delta^{(2)}_i = (\Delta_{i+1} - \Delta_i)/(x_{i+2} - x_i)$$

$$\Delta^{(3)}_i = (\Delta^{(2)}_{i+1} - \Delta^{(2)}_i)/(x_{i+3} - x_i)$$

Эти величины — разделенные разности. Итак, мы требуем, чтобы

$$(\sigma_2 - \sigma_1)/h_1 = \Delta^{(3)}_1$$

$$(\sigma_n - \sigma_{n-1})/h_{n-1} = \Delta^{(3)}_{n-3}$$

Умножим их на h_1^2 и $-h_{n-1}^2$, тогда

$$-h_i \times \sigma_1 + h_i \times \sigma_2 = h_1^2 \times \Delta^{(3)}_1$$

$$h_{n-1} \times \sigma_{n-1} - h_{n-1} \times \sigma_n = -h_{n-1}^2 \times \Delta^{(3)}_{n-3}$$

Теперь все коэффициенты σ_i можно найти из системы линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{vmatrix} -h_1 & h_1 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & h_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -h_{n-1} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \dots \\ \sigma_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_1^2 \Delta^{(3)}_1 \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \dots \\ -h_{n-1}^2 \Delta^{(3)}_{n-3} \end{vmatrix}$$

Обычно для удобства вычислений делают следующее: вводим новые величины α_i, β_i по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -h_1 \\ \alpha_i &= 2 \times (h_{i-1} + h_i) - h_{i-1}^2 / \alpha_{i-1} & i = 2, \dots, n-1 \\ \alpha_n &= -h_{n-1} - h_{n-1}^2 / \alpha_{n-1} \\ \beta_1 &= h_1^2 \Delta^{(3)}_1 \\ \beta_i &= (\Delta_i - \Delta_{i-1}) - h_{i-1} \times \beta_{i-1} / \alpha_{i-1} & i = 2, \dots, n-1 \\ \beta_n &= -h_{n-1}^2 \times \Delta^{(3)}_{n-3} - h_{n-1} \times \beta_{n-1} / \alpha_{n-1} \end{aligned}$$

Тогда мы имеем матрицы:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 h_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 h_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \alpha_3 h_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \dots \\ \sigma_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \dots \\ \beta_n \end{vmatrix}$$

Неизвестные нам коэффициенты находятся путем обратной подстановки

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \beta_n / \alpha_n & i = n-1, n-2, \dots, 1 \\ \sigma_i &= (\beta_i - h_i \beta_{i+1}) / \alpha_i \end{aligned}$$

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Численное интегрирование, или приближенное вычисление интеграла, применяется в тех случаях, когда невозможно найти аналитическое выражение его решения. При этом значение определенного интеграла отыскивается на основании ряда чис-

ленных значений подинтегральной функции. В тех случаях, когда этот процесс применяется к функции от одной переменной, он иногда называется механической квадратурой.

Задача численного интегрирования решается путем замены подинтегральной функции какой либо интерполяционной формулой, которая затем интегрируется в нужных пределах.

Не останавливаясь на выводе этих формул, приведем в готовом виде наиболее простые способы численного интегрирования.

Требуется вычислить определенный интеграл

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

при условии, что a и b конечны и $f(x)$ является непрерывной функцией x во всем интервале $a \leq x \leq b$.

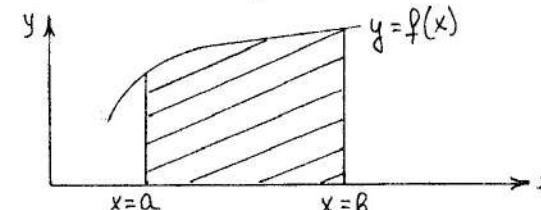


Рис. 1.

Определенный интеграл I представляет собой площадь, ограниченную кривой $f(x)$, осью x и прямыми $x=a, x=b$.

Попытаемся вычислить I , разбивая интервал от a до b на множество мелких подинтервалов, находя приблизительно площадь каждой полоски, полученной при таком разбиении, а затем суммируя все полученные площади.

При этом рассмотрим только один вариант, когда разбиение на интервалы делается заранее и все интервалы выбираются равными.

Наиболее характерными в этой области являются методы трапеций и парабол. Нельзя забывать при этом, что существует группа методов, в которых положение конечных точек и длина интервала выбираются путем специального анализа. Сначала ставится задача — достичь наивысшей точности с заданным числом интервалов, а затем определяются их границы. Примером такого подхода является метод Гаусса.

ПРАВИЛО ТРАПЕЦИИ

Рассмотрим интеграл, который представляет собой заштрихованную область на рис.1. Разобьем интервал интегрирования на n равных частей. Тогда величина каждого маленького подинтервала будет:

$$h = \frac{b - a}{n}$$

Возьмем один из этих подинтервалов, в дальнейшем называемом просто интервалом, он изображен в увеличенном виде на рисунке 2.

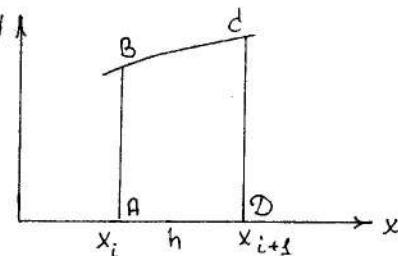


Рис.2.

Площадь, лежащая под кривой $y = f(x)$ между x_i и x_{i+1} равна

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx.$$

Если величина интервала h достаточно мала, то эта площадь близка к площади трапеции ABCD, т.е.

$$I_i \approx \frac{1}{2} h(y_{i+1} - y_i)$$

Однако известно, что

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\alpha} f(x) dx + \int_{\alpha}^b f(x) dx.$$

Отсюда $I = \sum_{i=0}^{n-1} I_i$, где $x_0 = a$, $x_n = b$.

Подставляя сюда площади всех трапеций, окончательно получаем:

$$I = \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$$

где $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$ и т. д.

Таким образом, определенный интеграл вычислен приближенно по правилу трапеций. Это — один из простейших методов численного интегрирования. Ошибка ограничения для него больше, чем для других, но он всегда привлекал своей простотой.

Следует отметить, что правило трапеций дает точный результат при интегрировании линейных функций.

При использовании метода трапеций возникает ошибка, равная сумме площадей между кривой $y = f(x)$ и хордами (хорда BC на рисунке 2). Для ее определения необходимо разложить функцию $y = f(x)$ в ряд Тейлора в точках x_i и x_{i+1} . Это разложение позволит получить уравнение исходной кривой в виде, удобном для сравнения точного значения интеграла с приближенным. Опуская вывод, дадим формулы оценки ошибки

$$e = -\frac{h^2}{12} (y'_b - y'_a),$$

$$y'_b = df/dx \text{ при } x=b, \quad y'_a = df/dx \text{ при } x=a.$$

Эта формула, полученная в предположении, что y — величина постоянная, дает только оценку, но не верхнюю границу ошибки. Часто употребляется преобразованное выражение ошибки

$$|e| \leq -\frac{h^2}{12} (b - a) y''(\xi)$$

или

$$|e| \leq -\frac{h^2}{12} (b - a) M,$$

где $M = \max y''(\xi)$, $a < \xi < b$

ЭКСТРАПОЛЯЦИОННЫЙ ПЕРЕХОД К ПРЕДЕЛУ (Ричардсона)

Чтобы найти более точное значение интеграла, в метод трапеций можно ввести усовершенствование. Для простоты запиши введем обозначение:

$$C = -((b - a)/12)y''(\xi)$$

Тогда ошибка ограничения для шага h , полученного как $(b - a)/n$, где n — число делений,

$$e = C h^2$$

Допустим, что выбрано новое число делений m , а новый шаг

$$k = (b - a)/m.$$

Отсюда

$$e = C k^2$$

Обозначим I_h и I_k — значения интеграла, вычисленные с шагом h и k соответственно. Тогда

$$I = I_n + C \cdot h^2$$

$$I = I_k + C \cdot k^2$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим выражение для C :

$$C = \frac{I_h - I_k}{k^2 - h^2}$$

Подставляя его в выражение $I = I_n + C \cdot h^2$, получаем окончательно:

$$I = I_h + \frac{I_h - I_k}{(k/h) - 1}$$

Вычисленное таким образом значение интеграла I более точное, чем I_h или I_k . Этот метод, названный экстраполяционным переходом к пределу, был предложен Ричардсоном и часто употребляется под его именем.

МЕТОД ПАРАБОЛ (Симпсона)

Метод парабол — один из наиболее широко применяемых методов численного интегрирования. Его идея, также как в методе трапеций, отражена в самом названии. Здесь интервал интегрирования также разбивается на отрезки, однако конечные точки не соединяются хордами.

Симпсон предложил объединять не 2, а 3 точки на кривой

и проводить через них дугу параболы, а затем вычислять площадь под ней.

Поставим заранее условие, что число разбиений n — четное. Рабочая формула метода трапеций следующая:

$$I = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Формула Симпсона дает точный результат при интегрировании многочленов до третьего порядка включительно. В этом ее несомненное превосходство над формулой трапеций. Ошибка ограничения в методе парабол вычисляется аналогично тому, что делается в методе трапеций, ее окончательный вид

$$e = \frac{-h^4}{180} (b - a) f''(\xi), \quad a < \xi < b$$

свидетельствует об очень важном моменте. Она пропорциональна h^4 , в то время как для метода трапеций ошибка была пропорциональна h^2 . Если предположить, что четвертая производная (f'') не вторая) практически постоянна, то можно применить экстраполяционный переход к пределу, что еще улучшит результат интегрирования.

$$I = I_h + \frac{I_h - I_k}{1 - (k/h)^4}$$

$$h = (b - a)/n, \quad k = (b - a)/m.$$

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Определение корней уравнений — это одна из древнейших математических проблем. И в наши дни она попрежнему актуальна, т.к. необходимость решения уравнений встречается практически во всех областях астрономии и геодезии.

РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ

Допустим, что имеется уравнение вида

$$F(x) = 0 \quad (1)$$

где $F(x)$ — алгебраическая или трансцендентная функция.

Однако мы будем полагать, что она дифференцируема. В общем случае, который мы рассматриваем, эта функция не имеет алгебраических выражений для своих корней. Поэтому необходимо использовать приближенные методы, которые состоят из двух этапов:

1 — отыскание приближенного значения корня,

2 — уточнение приближенного значения до некоторой заданной степени точности.

Чаще всего приближенное значение корня может быть дано исходя из физических представлений об исследуемом процессе или объекте. Если это сделать невозможно, необходимо прибегнуть к грубому анализу функции.

В основном этот анализ сводится к тому, что отыскиваются такие 2 значения x , для которых $F(x)$ имеет разные знаки, т.е. определяются x_* и x^* , для которых

$$F(x_*) > 0, \quad F(x^*) < 0.$$

Тогда между x_* и x^* есть по крайней мере одна точка, для которой $F(x) = 0$.

Поэтому в качестве исходного значения корня можно взять

$$x_0 = \frac{1}{2} (x_* + x^*).$$

Обратимся ко второму этапу решения. Численный метод, в котором производится последовательное, шаг за шагом, уточнение первоначального грубого приближения, называется методом итераций. Каждый шаг в таком методе называется итерацией. Если в процессе итераций получаются значения корня, которые все ближе к истинному, то говорят, что метод последовательных приближений сходится.

Предположим, что можно представить уравнение (1) в виде

$$x = f(x) \quad (2)$$

Если x_0 — исходное приближенное значение корня, то в качестве следующего приближения примем

$$x_1 = f(x_0), \quad \text{затем } x_2 = f(x_1) \text{ и т.д.}$$

Продолжая этот процесс, в качестве n -го приближения имеем

$$x_n = f(x_{n-1}) \quad (3).$$

Основной вопрос, который необходимо при этом выяснить — сходится ли x к решению уравнения (2) при возрастании n ?

Укажем достаточные условия для сходимости метода, т.е. условия, которые являются гарантией того, что последовательные значения x_n приближаются к решению уравнения (2).

При этом нельзя не отметить, что эти условия не являются необходимыми, т.е. существуют такие виды функций $f(x)$, для которых эти условия не выполняются, но для которых можно найти решение, действуя по формуле (3).

Итерации по формуле (3) сходятся при условии, что производная $f'(x)$ меньше 1 по абсолютной величине, т.е. если

$$|f'(x)| < 1, \quad \text{то процесс сходится, если} \quad (4)$$

$$|f'(x)| > 1, \quad \text{то процесс расходится.}$$

При этом неравенства (4) должны выполняться при всех значениях x , вычисляемых в ходе решения задачи.

УСОВЕРШЕНСТВОВАННЫЙ МЕТОД ИТЕРАЦИЙ

Итак, если $x = f(x)$ (2),
то $x_n = f(x_{n-1})$ (3).

Здесь мы просто подставляем в правую часть предыдущее значение корня. Вероятно, процесс этот можно ускорить, если придавать искомому значению корня некоторую поправку, т.е. считать, что

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x \quad (5),$$

где $\Delta x = f(x_n) - x_n$ (6).

Примем следующий вид решения:

$$x_{n+1} = x_n + \alpha \Delta x \quad (7)$$

где $\alpha > 1$ — некоторый коэффициент.

Можно доказать, что

$$\alpha = \frac{1}{1 - f'(\xi)} \quad (8)$$

причем $x_n < \xi < a$, где a — решение уравнения. Значение ξ нам неизвестно, но для $f'(\xi)$ можно принять следующее выражение:

$$f'(\xi) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = \frac{f(x_n) - x_n}{x_n - x_{n-1}} \quad (9)$$

Тогда окончательно формула итерационного процесса имеет вид:

$$x_{n+1} = x_n + \alpha (f(x_n) - x_n), \text{ где } \alpha \text{ определяется по (8) и (9).}$$

Необходимо отметить, что так как $\alpha > 1$, процесс сходимости решения ускорится. Описанная здесь модификация метода итераций принадлежит Вегстейну. Небольшое дальнейшее усовершенствование изложенного выше метода последовательных приближений приводит к одному из самых известных численных методов — к методу Ньютона-Рафсона.

МЕТОД НЬЮТОНА-РАФСОНА

Прежде всего обратим внимание на то, что в формуле (9) мы заменили производную на разность. При этом оптимальное значение ξ лежало в интервале $x < \xi < a$. Положив для простоты $\xi = x_n$, мы получим вместо (8)

$$\alpha = \frac{1}{1 - f'(x_n)} \quad (10)$$

$$\text{и тогда } x_{n+1} = \frac{f(x_n) - x_n}{1 - f'(x_n)} \quad (11)$$

Формула (11) эквивалентна простому методу итераций

$$x_{n+1} = g(x_n), \text{ где } g(x_n) = \frac{[f(x) - x]f'(x)}{1 - f'(x)} \quad (12)$$

Тогда, если $|g'(x)| < 1$, то метод сходится.

Для $g'(x)$ имеем

$$g'(x) = \frac{f''(x) [f(x) - x]}{[1 - f'(x)]^2} \quad (13)$$

Это и есть метод Ньютона-Рафсона. Обычно его записывают в более привычном виде:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \quad (14)$$

$$F(x) = f(x) - x = 0 \quad (15)$$

Условия сходимости при этом следующие:

1 — x выбрано достаточно близко к корню исходного уравнения $F(x)=0$,

2 — производная $F'(x)$ не становится очень большой,
3 — производная $F'(x)$ не слишком близка к нулю.

Последнее условие означает, что никакие два корня не находятся слишком близко один к другому.

СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Системы уравнений появляются почти в каждой области геодезии и астрономии. Часто, особенно в астрономии, они имеют нелинейный характер. Однако почти всегда, используя специальные методы, их можно привести к линейным.

Мы рассмотрим случай, когда система из n уравнений имеет m неизвестных, но все уравнения линейные. При этом предполагается, что набор наблюдений, из которых получены коэффициенты и свободные члены этих уравнений, таков, что $n > m$.

Кроме того, как нам известно, полученные из наблюдений наборы исходных данных редко бывают равноточными. Чаще всего, каждое уравнение сопровождается величиной, характеризующей его точность, т.е. весом p . Таким образом, мы имеем систему из n уравнений с m неизвестными, причем каждое уравнение имеет свой вес p .

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - d_i = 0 \quad p_i \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Эта система, в полном соответствии со своим смыслом, называется системой условных неравноточных уравнений.

Очевидно, что прежде, чем ее решать, т.е. искать значения неизвестных x_j , необходимо привести все уравнения к одному весу. Можно доказать, что для этого достаточно умножить все коэффициенты и свободный член каждого уравнения на корень квадратный из его веса, т.е. на p_i . Таким образом полученная новая система

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - d_i = 0 \quad (2)$$

носит название системы условных равноточных уравнений.

Теперь перед нами встает вопрос о том, как найти наилучшее решение подобной системы. Напишем ее в развернутом виде:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m - d_1 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m - d_2 &= 0 \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m - d_n &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Коэффициенты в этих уравнениях имеют обозначение a_{ij} , где $i = 1 \dots n$, $j = 1 \dots m$.

Положим, что мы нашли значения неизвестных x_1, x_2, \dots, x_m . Подставим их в уравнения (3).

Можно ли ожидать, что в правой части этих уравнений мы получим нули? Нет. Ведь число уравнений больше числа неизвестных, а такую систему решить точно невозможно.

Следовательно, в правой части уравнений (3) мы получим не 0, а некоторые числа, которые называются невязками и обычно обозначаются через V_i .

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m - d_1 &= V_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m - d_2 &= V_2 \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m - d_n &= V_n \end{aligned} \quad (4)$$

Если для полученных невязок V_i поставить условие, что

$$\sum V_i^2 = \min,$$

то надо ожидать, что найденные значения x_1, x_2, \dots, x_m наилучшие.

Этот принцип был сформулирован еще Лежандром и носит его имя. Сам же способ определения неизвестных, основанный на принципе Лежандра, называется способом наименьших квадратов.

Ход решения в нем следующий.

1 — перейдем от системы (1) к системе (3),

2 — перейдем от системы (3), состоящей из n уравнений с m неизвестными, причем $n > m$, к новой системе (16), состоящей из m уравнений с m неизвестными. Забегая вперед, скажем, что такая система называется системой нормальных уравнений,

3 — решим нормальную систему любым доступным нам способом,

4 — подставим найденные значения неизвестных в уравнения (3) и найдем невязки V_i ,

5 — вычислим среднюю квадратичную ошибку единицы веса

$$\sigma_0^2 = \frac{\sum V_i^2}{n-m}$$

а также весовые коэффициенты неизвестных Q_j и их средние квадратичные ошибки по принципу:

$$\sigma_{x1} = \sigma_0 \sqrt{Q_1} \quad \dots \quad \sigma_{xm} = \sigma_0 \sqrt{Q_m}$$

Таким образом, нами определен ход решения системы линейных уравнений в случае, когда число уравнений больше числа неизвестных.

Теперь остановимся на отдельных этапах этого процесса.

Наиболее важный момент вычислений — получение нормальных уравнений, т.е. вычисление их коэффициентов. Как и весь метод решения системы исходных уравнений, способ получения коэффициентов нормальных уравнений вытекает из принципа Лежандра.

Запишем систему (4) в виде:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m) - d_i = V_i \quad (4)$$

Принцип Лежандра

$$\sum_{i=1}^n V_i^2 = \min \quad (5)$$

Подставим в (5) V_i из (4):

$$\sum_{i=1}^n V_i^2 = \sum_{i=1}^n [F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - d_i]^2 = W \quad (6)$$

Эта сумма, как известно, будет минимальна при соблюдении следующих условий:

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial x_2} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial W}{\partial x_m} = 0 \quad (7)$$

Здесь всего m условий, по числу неизвестных. Каждое условие дает 1 уравнение. Действительно,

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = 2 \times V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \dots + 2 \times V_n \frac{\partial V_n}{\partial x_1} = 0 \quad (8)$$

Учитывая, что $V_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{im} x_m - d_i$,

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_1} = a_{i1}$$

Тогда из (8)

$$\frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial x_1} = \sum V_i \times a_{i1} = 0 \quad (9)$$

Так как

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_2} = a_{i2}; \quad \frac{\partial V_i}{\partial x_3} = a_{i3}; \quad \dots \quad \frac{\partial V_i}{\partial x_m} = a_{im} \quad (10)$$

то к условию (9) прибавятся:

$$\sum V_i a_{i2} = 0; \quad \sum V_i a_{i3} = 0; \quad \dots \quad \sum V_i a_{im} = 0 \quad (11)$$

Следуя за Лагранжем, введем как знак суммирования квадратные скобки. Получим систему уравнений

$$\begin{aligned} [V_i a_{i1}] &= 0 \\ [V_i a_{i2}] &= 0 \\ \dots \\ [V_i a_{im}] &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Это и есть система нормальных уравнений. Однако лучше записать ее в виде, более удобном для вычислений. Действительно, по (3):

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + \dots + d_1 &= 0 \\ \dots \\ a_{nn} x_n + \dots + d_n &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

В уравнениях (13) умножим каждую строку на a_{ii} , затем просуммируем все уравнения и собирем коэффициенты при x_i :

$$\begin{aligned} &(a_{11} \times a_{11} x_1 + a_{11} \times a_{12} x_2 + \dots + a_{11} \times d_1) + \\ &+ (a_{21} \times a_{21} x_1 + a_{21} \times a_{22} x_2 + \dots + a_{21} \times d_2) + \dots \\ &+ (a_{nn} \times a_{nn} x_1 + a_{nn} \times a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} \times d_n) = 0 \end{aligned}$$

Отсюда :

$$\begin{aligned} &x_1 (a_{11} \times a_{11} + a_{21} \times a_{21} + \dots + a_{nn} \times a_{nn}) + \\ &+ x_2 (a_{12} \times a_{11} + a_{22} \times a_{21} + \dots) + \dots + \\ &+ x_m (a_{1m} \times a_{11} + \dots + a_{mm} \times a_{mn}) - \\ &- (a_{11} \times d_1 + a_{21} \times d_2 + \dots + a_{nn} \times d_n) = 0 \end{aligned}$$

или более короткая запись через скобки Лагранжа:

$$x_1 [a_{11} \times a_{11}] + x_2 [a_{12} \times a_{11}] + \dots [a_{1m} \times d_1] = 0 \quad (14)$$

Умножая (13) на a_{ij} и проделывая тот же путь, получим второе из нормальных уравнений:

$$x_1 [a_{12} \times a_{11}] + x_2 [a_{12} \times a_{12}] + \dots [a_{12} \times d_1] = 0 \quad (15)$$

Мы видим, что таких уравнений будет столько же, сколько и неизвестных. Именно поэтому система (16) и называется нормальной.

Нормальные уравнения имеют две особенности:

1 — по диагонали слева вниз направо стоят коэффициенты, которые всегда положительны,

2 – остальные коэффициенты располагаются симметрично относительно главной диагонали, что позволяет значительно сократить вычисления.

На персональных компьютерах удобно работать с такой системой, задавая все коэффициенты в виде матриц: матрица 1, затем 3 и наконец 16.

Решение нормальных уравнений

Перепишем систему (16) в виде:

Таблица коэффициентов a_{ij} в системе (17) представляет собой квадратную матрицу A . Таблица величин x и d , имеющих только один индекс, это одностолбцовые матрицы X и D .

Тогда система (17) запишется в матричном виде следующим образом

$$A \times X = D \quad (18)$$

Формальное решение (18) представляется как $X = A^{-1} \times D$, где A — обратная матрица. Однако ее можно не вычислять, если представить матрицу A как произведение двух треугольных матриц:

$$A = B \times C \quad (19)$$

Рассмотрим ход решения на примере матрицы A с размерностью $i=j=3$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{vmatrix} \quad (20)$$

Матрица А имеет m^2 элементов, в нашем примере 9, каждая из треугольных матриц имеет $m(m+1)/2$ членов, т.е. по 6, а всего 12.

Однако общеизвестно, что из 9 независимых величин a_{ij} можно определить не 12, а только 9 элементов матриц В и С. Тогда в одной из этих матриц три элемента можно выбрать произвольно.

Принято, что $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 1$ (21)

При этом условии разложение (20) будет единственным, а элементы входящих сюда матриц связаны соотношением

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ik} \times c_{kj} \quad (22)$$

Кроме того, матрица A симметрична относительно диагонали, т.е. независимых членов в ней только $m(m+1)/2$, в нашем примере 6 . Но тогда в матрицах B и C столько же независимых величин. Снова пользуясь произвольностью выбора, установим, что все элементы матрицы B независимы, а матрицу C будем вычислять как их функцию:

$$c_{ii} = b_{ii} / b_{\perp ii} \quad (23)$$

Это означает, что каждый элемент матрицы C равен соответствующему транспонированному элементу матрицы B , разделенному на ее диагональный элемент.

В матричном виде формулу (23) можно записать так:

$$C = D B' \quad (24).$$

где D – диагональная матрица с элементами $1/b_1, 1/b_2, \dots, 1/b_n$.

В том случае, когда исследователь не использует готовые пакеты прикладных программ, а составляет программу сам, число неизвестных, а следовательно и размер матриц, зафиксированы, можно использовать следующую методику решения нормальных уравнений.

Запишем исходную систему как прямоугольную матрицу А

и две производные от нее треугольные матрицы В и С, причем матрицу В запишем как транспонированную. Ход решения проделем на примере нормальных уравнений с числом неизвестных 3, т.е. число уравнений $i = 3$, а число столбцов = 7, т.к. к самим уравнениям присоединены 3 столбика Q для определения весов неизвестных. При этом свободный член перенесен в левую часть и $m = 4$.

$$\left| \begin{array}{cccccc} & Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ \begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{array} & \begin{array}{c} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{array} & \begin{array}{c} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{array} & \begin{array}{c} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{cccccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} & q_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} & q_2 & q_3 & 1 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{cccccc} 1 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & q_4 & 0 & 0 \\ 1 & c_{23} & c_{24} & q_5 & q_6 & 0 & 0 \\ 1 & c_{34} & q_7 & q_8 & q_9 & & \end{array} \right|$$

1 — находим элементы первой строки матрицы В по формуле:

$$i=1 \quad a_{ij} = b_{ij} \quad \text{для } j = 1, 2, \dots, 7.$$

Отсюда следует, что элементы первой строки матрицы В' равны элементам первой строки матрицы А.

2 — находим элементы первой строки матрицы С.

При $i = 1$ из (23) следует:

$$c_{ij} = b_{ij} / b_{11} \quad j = 1, 2, \dots, 7$$

3 — находим элементы второй строки матрицы В':

$$i=2 \quad b_{2j} = a_{2j} - b_{1j} \times c_{12} \quad j = 2, 3, \dots, 7$$

4 — вычисляем элементы второй строки матрицы С:

$$i = 2 \quad c_{2j} = b_{2j} / b_{22} \quad j = 2, 3, \dots, 7$$

5 — определяем элементы третьей строки матрицы В:

$$i=3 \quad b_{3j} = a_{3j} - b_{1j} \times c_{13} - b_{2j} \times c_{23} \quad j = 3, \dots, 7$$

6 — находим последнюю, третью строчку матрицы С:

$$i = 3 \quad c_{3j} = b_{3j} / b_{33} \quad j = 3, \dots, 7$$

Мы видим, что вычисление элементов матриц В' и С идет поочередно.

Для получения решения необходимо со свободными элементами d' проделать все тоже, что и с каждой из тех строк матрицы А, в которой они стоят. В результате этого в матрице С будет еще один столбец, обозначим его Z.

Неизвестные определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + c_{12} \times x_2 + \dots + c_{1m} \times x_m &= Z_1 \\ x_2 + \dots + c_{2m} \times x_m &= Z_2 \\ \dots & \\ x_m &= Z_m \end{aligned} \quad (25)$$

В нашем примере свободный член был перенесен в левую часть и неизвестные будут найдены из условий:

$$\begin{aligned} x_3 &= -c_{34} \\ x_2 &= -c_{24} - x_3 \times c_{23} \\ x_3 &= -c_{14} - x_3 \times c_{13} - x_2 \times c_{12} \end{aligned}$$

Для определения средних квадратичных ошибок неизвестных, используются условия:

$$\sigma_1 = \sigma_0 \sqrt{Q_1} \quad \dots \quad \sigma_m = \sigma_0 \sqrt{Q_m}$$

При этом одновременно с исходной системой уравнений, в которой свободный член d_p , необходимо решить нормальные уравнения со свободными членами, заданными единичной матрицей, как указано в примере.

Число подобных столбцов равно числу неизвестных. Поэтому в нашем примере этих столбиков было 3. Численные значения весовых коэффициентов находятся как суммы произведений чисел, стоящих в матрицах С и В'. Последнее число матрицы С умножается на 1, стоящую на таком же месте в матрице В', это дает нам весовой коэффициент последнего неизвестного Q_m . Далее следуем этому же правилу, только число произведений каждый раз от движения от Q_m к Q_1 будет расти.

В нашем примере:

$$Q_3 = q_9 \times 1$$

$$Q_2 = q_8 \times q_3 + q_6 \times 1$$

$$Q_1 = q_7 \times q_2 + q_5 \times q_1 + q_4 \times 1$$

Числовой пример. Условные неравноточные уравнения

$$\begin{array}{ll} 1x + 1,5y + 2,25z - 0,05 = 0 & 1/4 \\ 1 + 1,1 + 1,21 + 0,03 = 0 & 1 \\ 1 + 0,7 + 0,49 + 0,02 = 0 & 1 \\ 1 + 0,41 + 0,09 - 0,02 = 0 & 1/4 \\ 1 + 0,10 + 0,01 + 0,36 = 0 & 1 \end{array}$$

Условные равноточные уравнения

$$\begin{array}{l} 0,500x + 0,750y + 1,125z - 0,025 = 0 \\ 1,000 + 1,100 + 1,210 + 0,030 = 0 \\ 1,000 + 0,700 + 0,490 + 0,020 = 0 \\ 0,500 + 0,205 + 0,045 - 0,010 = 0 \\ 1,000 + 0,100 + 0,010 + 0,360 = 0 \end{array}$$

Нормальные уравнения

$$\begin{array}{l} 3,500x + 2,378y + 2,295z + 0,392 = 0 \\ 2,378 + 2,314 + 2,528 + 0,062 = 0 \\ 2,295 + 2,528 + 2,972 + 0,021 = 0 \end{array}$$

Решение системы уравнений

A

$$\begin{array}{lll} 3,500x + 2,378y + 2,295z + 0,392 & 1 & 0 \\ 2,378 + 2,314 + 2,528 + 0,062 & 0 & 1 \\ 2,295 + 2,528 + 2,972 + 0,021 & 0 & 0 \end{array}$$

B

$$\begin{array}{lll} 3,500 + 2,378 + 2,295 + 0,392 & 1 & 0 \\ 0,698 + 0,969 - 0,204 & -0,679 & 1 \\ 0,122 + 0,047 & +0,287 - 1,388 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & C & & \\ 1,000 & +0,679 & +0,656 & +0,112 & +0,286 & 0 & 0 & & \\ & 1,000 & +1,388 & -0,292 & -0,973 & +1,433 & 0 & & \\ & & & 1,000 & +0,385 & +2,358 & -11,377 & +8,196 & \end{array}$$

$$z = -0,385 \quad y = +0,826 \quad x = -0,420$$

Невязки условных равноточных уравнений (получены при подстановке найденных значений неизвестных в условные равноточные уравнения):

$$V_1 = 0,049 \quad V_3 = 0,012 \quad V_5 = 0,018 \quad V_2 = 0,052 \quad V_4 = 0,068$$

$$V_5 = 0,0101$$

Средняя квадратичная ошибка единицы веса

$$\sigma_0 = 0,071$$

Весовые коэффициенты неизвестных

$$Q_3 = 8,196 \quad Q_2 = 17,224 \quad Q_1 = 1,621$$

Средние квадратичные ошибки неизвестных

$$\sigma_3 = 0,203 \quad \sigma_2 = 0,295 \quad \sigma_1 = 0,090$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Большаков В.Д., Гайдаев П.А. Теория математической обработки геодезических измерений.—1977, М., Недра.
2. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персональных ЭВМ.
3. Мак-Крекен Д., Дори У. Численные методы и программирование на Фортране. —1977, М., Мир.
4. Машимов М.М. Методы математической обработки астрономо-геодезических измерений.—1990, М., ВИА.
5. Форсайт Дж., Мальcolm M., Моулер К. Машины методы математических вычислений.—1980, М., Мир.