

УДК 519.6:519.8

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ РЕГУЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ИЗВЛЕЧЕНИЯ НЕФТИ ПРИ ДВУХФАЗНОЙ ТРЕХКОМПОНЕНТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В.Д. Слабнов

Аннотация

Предложена постановка задачи оптимального регулирования извлечения нефти по технологическому критерию качества решения. Процесс вытеснения нефти в слоистом пласте описан осредненной моделью двухфазной трехкомпонентной фильтрации по схеме Баклея – Леверетта. Параметры слоистого пласта могут изменяться вдоль координатных осей. Проведено сравнение основных технологических показателей извлечения нефти, полученных без учета и с учетом оптимального регулирования для трех вариантов задания распределения абсолютной проницаемости в элементе заводнения неоднородного пласта. Для всех вариантов лучшие технологические показатели извлечения нефти получены с применением оптимального регулирования.

Ключевые слова: численное исследование, математическая модель, двухфазная трехкомпонентная фильтрация, оптимальное регулирование.

Введение

За последние годы наблюдается заметный прогресс в постановке и решении различных 2D- и 3D-многофазных задач теории фильтрации – задач прогнозирования показателей разработки сложных по строению нефтяных пластов. Одним из перспективных направлений в теории разработки нефтяных месторождений является постановка и решение задач регулирования процесса извлечения нефти водными растворами химреагентов. Вместе с тем этот класс задач, несмотря на его значимость, наименее исследован, что связано прежде всего со значительными трудностями в построении алгоритмов решения таких задач.

Новые технологии разработки нефтяных пластов, которые используют аппарат математического программирования и современное математическое моделирование, будут способствовать достижению высоких технико-экономических показателей и повышению извлечения нефти из пластов различного строения.

При заводнении неоднородных пластов растворами химреагентов (ПАВ, полимеры, гели) из-за истощения запасов нефти, а также ухудшения структуры пластов [1, 2] термин «технология» подразумевает выявление наиболее экономичных или эффективных по извлечению способов разработки. В этом случае могут быть использованы экономические (минимизация затрат ресурсов, денежных и материальных, максимизация прибыли от извлеченной нефти [3, 4]) или технологические (максимизация текущего или конечного коэффициента нефтеотдачи [5–9]) критерии качества решения. Отметим, что в [7] оптимальные дебиты добывающих скважин определялись с использованием коэффициентов интерференции (взаимовлияния) скважин.

Необходимость повышения объема добываемой нефти из пластов сложного геологического строения с применением водных растворов химреагентов и определение технологических показателей регулирования процесса извлечения нефти по критерию максимизации коэффициента текущей нефтеотдачи делают актуальной проблему построения математических моделей и выбора численных методов решения оптимизационных задач с использованием технологического критерия качества. Из-за неполноты геологической информации о строении трехмерного пласта, особенно на ранней стадии его разработки, становится очевидным преимущество использования осредненной двухмерной математической модели по сравнению с трехмерной. Это преимущество обусловлено и значительным сокращением времени численных расчетов за счет уменьшения размерности задачи и числа ячеек конечно-разностной сетки [10].

В настоящей работе использована модель Баклея – Леверетта процесса вытеснения нефти водным раствором химреагента заданной концентрации из слоистых пластов, в которой не учитываются гравитационные и капиллярные силы [6, 11, 13]. Предполагается, что параметры слоистого пласта, например абсолютная проницаемость, могут изменяться вдоль всех координатных осей. Дискретный аналог вероятностного закона распределения абсолютной проницаемости в слоистом пласте определяется на основе заданных двух параметров: математического ожидания и дисперсии. Полученный вероятностный закон использован для построения «фиктивных» (модифицированных) относительных фазовых проницаемостей в слоистом пласте [14, 15].

При численном решении задачи регулирования для построенной усредненной математической модели использование симплекс-метода позволяет определить оптимальные дебиты и забойные давления источников и стоков при задании для них двусторонних ограничений и некоторых вариантов граничных условий в элементе заводнения. Критерием оптимизации является максимизация целевой функции, а именно суммарного отбора нефти [16, 17].

Цели настоящей работы – построение математической модели двухфазной трехкомпонентной фильтрации в слоистом пласте при выполнении гипотезы о вытеснении нефти водным раствором химреагента из элементарного объема; постановка задачи оптимального регулирования по технологическому критерию качества решения; анализ результатов численного решения задачи оптимального регулирования для трех вариантов распределения абсолютной проницаемости в элементе заводнения, а также их сравнение с результатами численного решения задачи без регулирования в режиме заданных забойных давлений на различных сетках.

1. Осредненная математическая модель процесса двухфазной трехкомпонентной фильтрации в слоистых пластах

В [8, 15] описана 3D математическая модель вытеснения нефти из пласта толщиной H , в котором абсолютная проницаемость изменяется по вертикали и горизонтали. При некоторых допущениях эта модель была усреднена по толщине пласта, в результате получена следующая усредненная 2D модель процесса фильтрации относительно усредненной скорости фильтрации \vec{V} и нефтенасыщенности \tilde{s} :

$$\operatorname{div}(\vec{V}H) = N_k^h(x, y), \quad \operatorname{div}(\vec{V}F_H(\tilde{s}, \tilde{c})) - N_k^h(x, y)F_H(\tilde{s}, \tilde{c}) = mH \frac{\partial \tilde{s}}{\partial t}, \quad (1)$$

где $\vec{V} = -\tilde{\sigma}(\tilde{s}) \operatorname{grad} p$ – суммарная усредненная скорость фильтрации нефти и воды, $N_k^h(x, y)$ – усредненная плотность источников (стоков), $\tilde{\sigma}(\tilde{s}) = \tilde{k}_a(k_H^\Phi(\tilde{s}, \tilde{c})/\mu_H +$

$+k_{\text{в}}^{\Phi}(\tilde{s})/\mu_{\text{в}}$) – суммарная усредненная проводимость в слоистом пласте, $\tilde{F}_{\text{н}}(s) = \tilde{k}_{\text{а}} k_{\text{н}}^{\Phi}(\tilde{s}, \tilde{c})/[\mu_{\text{н}}\tilde{\sigma}(\tilde{s})]$ – усредненная доля нефти в потоке жидкости, \tilde{c} – усредненная концентрация.

В рамках данной модели учтем процесс вытеснения нефти водным раствором химреагента. Выделим в трехмерном пласте элементарный столбец со сторонами dx, dy, dz . Определим изменение нефти и воды в объеме $Hdxdy$ элементарного столбца. Пусть доля химреагента в единице объема считается очень малой (порядка 0.05%). В этом случае при получении уравнения неразрывности для раствора химреагента данной величиной можно пренебречь, то есть вместо величины $s_{\text{в}}(1-c)$, где c – концентрация химреагента, рассматривать $s_{\text{в}}$. В этом случае вид уравнений материального баланса для вытеснения нефти водным раствором химреагента будет соответствовать системе (1) (по аналогии с [6]). Составим уравнение неразрывности для доли химреагента в единице объема водного раствора.

Расходы втекающего и вытекающего растворов химреагента через грани элементарного столбца площадью Hdy равны соответственно $V_{\text{в}}^x cHdydt$ и $(V_{\text{в}}^x cHdy + [\partial(V_{\text{в}}^x Hc)/\partial x]dxdy)dt$. Аналогично, через грани элементарного столбца площадью Hdx указанные расходы равны $V_{\text{в}}^y cHdxdt$ и $(V_{\text{в}}^y cHdx + [\partial(V_{\text{в}}^y Hc)/\partial y]dxdy)dt$. Тогда изменение объема химреагента за время dt равно $dxdy mH[\partial(\psi_c c)/\partial t]dt$, где $\psi_c c = (1-s_{\text{н}})c + a/m$.

Для линейного вида изотермы адсорбции имеем $a = c\Gamma(1-s_{\text{н}})$, где Γ – коэффициент Генри. Составим уравнение материального баланса для концентрации химреагента в элементарном столбце

$$\partial(V_{\text{в}}^x Hc)/\partial x + \partial(V_{\text{в}}^y Hc)/\partial y = -mH\partial(\psi_c c)/\partial t. \quad (2)$$

Для определения величин $V_{\text{в}}^x, V_{\text{в}}^y$ используем следующее допущение о механизме вытеснения нефти водным раствором химреагента из [14]: будем считать, что j -я среда, то есть область постоянной абсолютной проницаемости в элементарном столбце, может состоять из отдельных компонент; объем остаточной нефти зависит от концентрации водного раствора химреагента. Так как при вытеснении нефти имеет место адсорбция раствора химреагента, то концентрация некоторого бесконечно малого объема раствора в процессе вытеснения будет уменьшаться, и в конечном итоге можно считать, что она равна нулю.

Пусть в j -й среде с абсолютной проницаемостью $k_{\text{а}(j)}$ водный раствор химреагента имеет концентрацию $c^0\theta_{0j}$, где θ_{0j} – отношение текущей концентрации в момент времени t к максимальному значению концентрации в j -й среде. Пусть остаточная нефтенасыщенность $s_{*\text{н}(j)}$ в j -й среде изменяется в процессе вытеснения по линейному закону [14]: $\bar{s}_{*\text{н}(j)} = s_{*\text{н}}(1-\theta_{0j}) + s_{*\text{н}}^0\theta_{0j}$, где $s_{*\text{н}}^0$ соответствует максимальному значению концентрации c^* , а $s_{*\text{н}}$ – минимальному значению концентрации $c_* = 0$. Предположим, что данные значения одинаковы для всех сред. Тогда максимальное значение водонасыщенности в j -й среде равно $\bar{s}_{\text{в}(j)}^* = 1 - s_{*\text{н}(j)}$.

Определим по аналогии с [15] активные нефтенасыщенность θ_j и водонасыщенность $1-\theta_j$ в j -й среде для случая вытеснения нефти раствором химреагента: $\theta_j = (s_{\text{н}(j)} - \bar{s}_{*\text{н}(j)})/(s_{\text{н}(j)}^* - \bar{s}_{*\text{н}(j)})$, $1-\theta_j = (s_{*\text{н}(j)}^* - \bar{s}_{*\text{н}(j)})/(s_{\text{н}(j)}^* - \bar{s}_{*\text{н}(j)})$. Как и при выводе формулы (2) в [15], можно получить нефте- и водонасыщенность в элементарном столбце в виде

$$s_{\text{н}} = \sum_{j=1}^{n_k} \bar{s}_{*\text{н}(j)} (1-\theta_j) \beta_j + s_{\text{н}}^* \sum_{j=1}^{n_k} \theta_j \beta_j, \quad s_{\text{в}} = s_{*\text{в}} \sum_{j=1}^{n_k} \theta_j \beta_j + \sum_{j=1}^{n_k} \bar{s}_{\text{в}(j)}^* (1-\theta_j) \beta_j.$$

Очевидно, что

$$s_{\text{H}} + s_{\text{B}} = 1, \quad \sum_{j=1}^{n_k} \theta_j \beta_j + \sum_{j=1}^{n_k} (1 - \theta_j) \beta_j = 1.$$

В этом случае концентрация химреагента в элементарном столбце с учетом адсорбции примет вид [14]

$$\psi_c c = (1 + \Gamma c/m) \sum_{j=1}^{n_k} (1 - \bar{s}_{*H(j)}) c^* \theta_{0j} (1 - \theta_j) \beta_j.$$

После несложных преобразований с учетом того, что подошва и кровля трехмерного пласта являются непроницаемыми, окончательно получим следующее уравнение неразрывности для концентрации химреагента [14]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\tilde{k}_a k_{\text{B}}^{\Phi}}{\mu_{\text{B}}} c^{\Phi} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\tilde{k}_a k_{\text{B}}^{\Phi}}{\mu_{\text{B}}} c^{\Phi} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = -mH \frac{\partial (\psi_c c)}{\partial t}, \quad (3)$$

где

$$c^{\Phi} = \left[\sum_{j=1}^{n_k} \frac{k_{\text{B}(j)} k_{\text{a}(j)}}{\mu_{\text{B}}} c^* \theta_{0j} \beta_j \right] / \left[\sum_{j=1}^{n_k} \frac{k_{\text{B}(j)} k_{\text{a}(j)}}{\mu_{\text{B}}} \beta_j \right],$$

$\tilde{k}_a = \sum_{j=1}^{n_k} k_{\text{a}(j)} \beta_j$ – среднее значение абсолютной проницаемости по толщине пласта.

Учтем наличие в области фильтрации источников и стоков. Тогда уравнение (3) запишется в виде [11, 13]

$$\operatorname{div} \left(\tilde{V}_{\text{B}} H \tilde{c} \right) - N_k^h(x, y) F_{\text{B}}(\tilde{s}, \tilde{c}) \tilde{c} = -mH \frac{\partial (\psi_c \tilde{c})}{\partial t}. \quad (4)$$

В случае вытеснения нефти водным раствором ПАВ можно считать, что вязкость водного раствора не зависит от концентрации химреагента, то есть $\mu_{\text{B}} = \text{const}$.

Для того чтобы проанализировать гипотезы о распределении воды по толщине пласта, описанные в [15], необходимо уточнить способ задания θ_{0j} .

2. Оптимальное регулирование извлечения нефти при закачке водного раствора химреагента по технологическому критерию качества решения

Постановка задачи регулирования при двухфазной фильтрации с учетом ввода скважин в эксплуатацию на основе математической модели Баклея–Левверетта с соответствующими начальными и граничными условиями, а также алгоритм решения этой задачи приведены в [16].

Поставим в соответствие размещению k -й скважины в области фильтрации Ω (рис. 1) ее номер. Обозначим множество номеров добывающих скважин через J^* , тогда множество номеров нагнетательных скважин есть $J \setminus J^*$, где J – множество номеров всех скважин. Предположим, что срок T разработки залежи определяется временем отключения последней действующей добывающей скважины. Отключение k -й добывающей скважины происходит при $T_k \leq t \leq T$, где T_k – время достижения k -й скважиной заданного предельно-допустимого значения текущей обводненности ее продукции $1 - F(T_k) = F_{\text{в}k}^*$. Будем рассматривать регулирование процесса извлечения нефти из неоднородной залежи в рамках принятой

модели по критерию максимизации коэффициента текущей нефтеотдачи на заданные моменты времени t_r , $r = 0, 1, 2, \dots$. Математическая модель такого процесса регулирования извлечения нефти формулируется следующим образом: найти максимальный суммарный отбор нефти

$$\sum_{k \in J^*(t_r)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} q_k(t_r) F_{\text{нк}}(t_r) dt_r \rightarrow \max, \quad t_r \in [t_n, t_{n+1}], \quad (5)$$

для заданных планового периода $[t_n, t_{n+1}]$ и ограничений на режимы действующего множества скважин

$$p_* \leq p_{3k} \leq p^*, \quad q_* \leq |q_k| \leq q^* \quad \forall k \in J^*(t_r), \quad (6)$$

с учетом момента времени t_r начала задачи прогнозирования, который определяется из условия

$$t_r = t(F_{\text{вк}}(t_r)) \geq t(F_{\text{вк}}^*(t_r)) \quad \forall k \in J^*(t_r), \quad (7)$$

где номера добывающих и нагнетательных скважин соответствуют оптимальному подмножеству $J^*(t_r) \cup J(t_r) \setminus J^*(t_r)$. Здесь $q_k(t_r)$ – дебит k -й скважины, $F_{\text{вк}}(t_r)$ – доля воды в потоке жидкости для k -й скважины, $p_{3k}(t_r)$ – забойное давление k -й скважины на t_r -й момент времени регулирования.

Пусть $W_h = \{W_{h_x} \times W_{h_y} \in \Omega, h_x = l_x/M_x, h_y = l_y/M_y\}$ – прямоугольная сетка с шагами h_x, h_y , покрывающая область фильтрации Ω , которая строится так, чтобы центры O_k скважин находились в узлах разностной сетки. Будем рассматривать двухфазную трехкомпонентную фильтрацию в прямоугольной области Ω . При численном решении задачи регулирования нефтеизвлечения на каждый контрольный момент времени t_r восстанавливаем оптимальное поле давления в области фильтрации Ω в результате численного решения задачи линейного программирования (ЛП) (8)–(10) [16–18]:

$$\sum_{k \in J^*(t_r)} \alpha \sigma^k(s(t_r)) (p_{ij}^k(t_r) - p_{3k}(t_r)) F_{\text{нк}}(t_r) dt_r \rightarrow \max, \quad t_r \in [t_n, t_{n+1}], \quad (8)$$

при ограничениях

$$\tilde{\sigma}_{i-1j} p_{i-1j} + \tilde{\sigma}_{i+1j} p_{i+1j} + \tilde{\sigma}_{ij-1} p_{ij-1} + \tilde{\sigma}_{ij+1} p_{ij+1} + (\tilde{\sigma} + \alpha \delta_{ij}) p_{ij} + \alpha \delta_{ij} p_{3k} = 0, \quad (9)$$

$$p^* \leq p_{3k} \leq p^{**}, \quad q^* \leq |\alpha \tilde{\sigma}^k(s(t_r)) (p_{ij}^k(t_r) - p_{3k}(t_r))| \leq q^{**} \quad \forall k \in J^*(t_r), \quad (10)$$

где $i = 1, \dots, M_x, j = 1, \dots, M_y, M_x, M_y$ – количество узлов по осям OX и OY соответственно, p_{3k} – забойное давление скважин с координатами (x_k, y_k) , p_{ij} – сеточное давление по области фильтрации Ω , δ_{ij} – сеточный аналог функции Дирака, p^* и p^{**} – нижнее и верхнее ограничения на забойные давления скважин, q^* и q^{**} – нижнее и верхнее ограничения на дебиты скважин.

Найденное поле давления, а также значения оптимальных забойных давлений и дебитов действующих скважин обеспечивают при решении задачи оптимального регулирования процесса извлечения нефти максимальный суммарный отбор нефти из неоднородного пласта на t_r -ю контрольную дату. Здесь алгоритм ЛП используется одновременно в качестве метода решения системы алгебраических уравнений, полученных из разностного аналога (9) для первого уравнения системы (1).

3. О методах вычисления концентрации

Существует два подхода к численному решению системы нелинейных дифференциальных уравнений (1), (4) (см. [11–14]). Схематично их можно записать в следующих видах.

I. $\overline{p, s, c}$. В этой вычислительной схеме счета используется IMPES-метод, который предполагает применение итерационного метода (например, переменных направлений) для вычисления давления p и явной разностной схемы «уголок» для вычисления нефтенасыщенности s и концентрации c . Запишем разностную аппроксимацию уравнения (4):

$$m_{ij} H_{ij} \frac{\psi_{ij}^{n+1} c_{ij}^{n+1} - \psi_{ij}^n c_{ij}^n}{\Delta t} = R_x^h c^n + R_y^h c^n - \overline{F}(s_{ij}^n, c_{ij}^n) N_k^h(i, j), \quad (11)$$

где $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ – временной шаг, c_{ij}^n – значение концентрации химреагента на момент времени t_n для (i, j) -го узла разностной сетки, $\overline{F}(s_{ij}^n, c_{ij}^n) = 1 - F_H(s_{ij}^n, c_{ij}^n)$.

$$R_x^h c^n = \begin{cases} 2h_x^{-1} V_{i+1/2j}^x(s^n) \overline{F}_{i+1/2j}^x(s^n, c^n), & x = 0, \\ h_x^{-1} \left(V_{i+1/2j}^x(s^n) \overline{F}_{i+1/2j}^x(s^n, c^n) - V_{i-1/2j}^x(s^n) \overline{F}_{i-1/2j}^x(s^n, c^n) \right), & 0 < x < l_x, \\ -2h_x^{-1} V_{i-1/2j}^x(s^n) \overline{F}_{i-1/2j}^x(s^n, c^n), & x = l_x; \end{cases} \quad (12)$$

$$R_y^h c^n = \begin{cases} 2h_y^{-1} V_{ij+1/2}^y(s^n) \overline{F}_{ij+1/2}^y(s^n, c^n), & y = 0, \\ h_y^{-1} \left(V_{ij+1/2}^y(s^n) \overline{F}_{ij+1/2}^y(s^n, c^n) - V_{ij-1/2}^y(s^n) \overline{F}_{ij-1/2}^y(s^n, c^n) \right), & 0 < y < l_y, \\ -2h_y^{-1} V_{ij-1/2}^y(s^n) \overline{F}_{ij-1/2}^y(s^n, c^n), & y = l_y. \end{cases} \quad (13)$$

Ориентация по потоку означает, что функции $\overline{F}_{i\pm 1/2, j}^x(s_{i, j}^n, c_{i, j}^n)$, $\overline{F}_{i, j\pm 1/2}^y(s_{i, j}^n, c_{i, j}^n)$ в полуузлах разностной сетки вычисляются по насыщенности в той ячейке, в которую водный раствор химреагента втекает в рассматриваемом направлении.

$$\overline{F}_{i\pm 1/2j}^x(s^n, c^n) = \begin{cases} \overline{F}_{ij}^x(s^n, c^n), & V_{i\pm 1/2j}^x(s^n) \leq 0, \\ \overline{F}_{i\pm 1j}^x(s^n, c^n), & V_{i\pm 1/2j}^x(s^n) > 0, \end{cases} \quad (14)$$

$$\overline{F}_{ij\pm 1/2}^y(s^n, c^n) = \begin{cases} \overline{F}_{ij}^y(s^n, c^n), & V_{ij\pm 1/2}^y(s^n) \leq 0, \\ \overline{F}_{ij\pm 1}^y(s^n, c^n), & V_{ij\pm 1/2}^y(s^n) > 0. \end{cases}$$

Учет ориентации потока обеспечивает устойчивость разностной схемы и хороший дисбаланс по системе в целом. Конечно-разностное уравнение (11) имеет первый порядок аппроксимации относительно h_x, h_y .

II. $\overline{p, s, c}$. В данном случае распределение концентрации по области двухфазной трехкомпонентной фильтрации в достаточно общем виде описывает уравнение переноса с диффузией $\partial(\varphi c)/\partial t = \nabla(D\nabla c) - \nabla(uc)$, где φ , D , u – коэффициенты, которые могут зависеть от времени t , пространственных переменных x , y , нефтенасыщенности s и концентрации c . При решении этого уравнения численными методами возникают трудности, потому что тип уравнения для концентрации может изменяться от параболического до гиперболического, когда $D = 0$, в зависимости

от скорости и коэффициента диффузии (числа Пекле). Поэтому применяемые вычислительные схемы должны быть построены так, чтобы можно было учесть два предельных случая: перенос вещества и диффузию.

Наибольшие трудности встречаются при расчете переноса, когда возникают контактные разрывы. Известно, что наиболее точно процесс переноса может быть численно смоделирован при использовании алгоритмов, в которых непосредственно прослеживается граница раздела фаз и компонентов. Однако такие методы расчета трудно применить для двумерных (трехмерных) потоков с диффузионными, капиллярными и гравитационными эффектами, межфазным массопереносом, а также для пластов со сложной геометрией области фильтрации и наличием скважин. В этом случае необходимо использовать методы, основанные на схемах сквозного счета. В рассматриваемых нами задачах на структуру возникающего течения водного раствора химреагента сильно влияют скачки концентрации, погрешность расчета которых по схемам сквозного счета оказывается достаточно существенной.

Особенно значительное отклонение численного решения от точного наблюдается при расчете продвижения оторочек реагента небольшого объема, когда нефть вытесняется небольшими порциями раствора химреагента, которые чередуются с закачкой чистой воды. Данная технология наиболее часто применяется на практике при разработке неоднородного пласта [1]. Точность применяемых разностных схем первого порядка в этом случае оказывается недостаточной, так как возникают значительные погрешности в расчете границ раздела фаз, в особенности компонент в фазах. Это связано с тем, что схемы первого порядка вносят численную осцилляцию на границе раздела.

Схемы более высокого порядка позволяют точнее рассчитать контактные разрывы [19]. Поэтому, в отличие от расчета насыщенности, для численного решения уравнения переноса может оказаться перспективным использование схем повышенного порядка точности. Применение известных схем второго порядка точности (Лакса – Вендроффа, Кранка – Николсона и др.) приводит в силу их немонотонности к появлению значительных осцилляций, а введение искусственной вязкости заметно снижает точность получаемых численных решений. Этим же недостатком обладают схемы метода конечных элементов.

В работах [2, 6] исследованы некоторые разностные схемы с точки зрения эффективности их использования при решении задач прогнозирования для модельного линейного уравнения переноса ($\varphi = u = 1, D = 0$). В этом случае решение сохраняет основные особенности расчета контактных разрывов. В качестве эталонного решения использовано решение системы уравнений для одномерной модели двухфазной трехкомпонентной фильтрации. Рассматривалось вытеснение нефти оторочкой раствора химреагента при линейной изотерме адсорбции. Межфазный массоперенос химреагента отсутствовал ($\lambda = 0$). Эталонное решение было получено методом характеристик [12].

При решении линейного уравнения переноса использовались схемы «уголок», Лакса – Вендроффа, двухточечная, схемы третьего и четвертого порядков точности, предиктор-корректор, а также предложенная в [12] схема с квадратичной интерполяцией и экстраполяцией значений на границах ячеек.

Построение схем высокого порядка точности поясним для третьего порядка. Возьмем схему «уголок» и разложим решение в ряд Тейлора, сохраняя члены вплоть до третьего порядка. В результате получим аппроксимацию этой схемы вида

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\Delta x - \Delta t}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^2 - \Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 c}{\partial x^3}. \quad (15)$$

Поэтому если в правой части схемы «уголок» вычесть правую часть выражения (15), которая записана в разностном виде, то полученная схема будет аппроксимировать исходное уравнение с третьим порядком точности:

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} = -\frac{\Delta_i c^n}{\Delta x} - \frac{\Delta x - \Delta t}{2\Delta x^2}(\Delta_{i+1} + \Delta_i)c^n + \frac{\Delta x^2 - \Delta t^2}{6\Delta x^3}\Delta_i(\Delta_{i+1} + \Delta_i)c^n,$$

где $\Delta_{i+1}c^n = c_{i+1}^n - c_i^n$ – i -я конечная разность для n -го временного слоя. Здесь вторая производная аппроксимирована со вторым порядком точности, а третья – с третьим порядком. Аналогичным образом строится разностная схема четвертого порядка точности.

Схема предиктор-корректор позволяет точнее рассчитать профили концентрации и не приводит к осцилляциям решения, как в случае схемы Лакса – Вендроффа. Близкие по точности результаты дает разностная схема из [12]. Результаты расчета по этой схеме и их сравнение с результатами расчетов по другим схемам из указанной работы показали преимущество предложенной, которая позволяет получать лучшее приближение к точному решению.

Необходимо отметить, что при всей важности точного вычисления профиля концентрации выбор используемой в вычислительных экспериментах разностной схемы определяется прежде всего точностью, с которой находятся такие основные интегральные показатели регулирования процесса извлечения нефти, как текущая и конечная нефтеотдачи. Такие схемы были предложены в работе [12] для одномерной модели двухфазной трехкомпонентной фильтрации с линейной изотермой адсорбции: рассматривались схемы «уголок», неявно-явная (шахматная), Лакса – Вендроффа, предиктор-корректор, а также следующая схема.

Расчет насыщенности и концентрации по этой схеме проведем по разностным уравнениям. Здесь важно, чтобы аппроксимации были согласованы, то есть выполнялось условие полной консервативности. Для расчета насыщенности использовалась схема «уголок», а расчет концентрации осуществлялся по схеме, записанной в форме предиктор-корректор:

$$\frac{c_{i+1/2}^{n+1/2} - c_{i-1/2}^n}{\Delta \tau} = -\frac{F_{vi+1/2}^n c_{i+1/2}^n - F_{vi}^n c_i^n}{(s_B - m^{-1}c)_{i+1/2}^n \Delta \zeta}, \quad (16)$$

$$\frac{s_{vi}^{n+1} c_i^{n+1} - s_{vi}^n c_i^n + m^{-1}(c_i^{n+1} - c_i^n)}{\Delta \tau} = -\frac{F_{vi}^n c_{i+1/2}^{n+1/2} - F_{vi-1}^n c_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta \zeta}, \quad (17)$$

где

$$c_{i+1/2}^n = \begin{cases} (3c_{i+1}^n + 6c_i^n - c_{i-1}^n)/8, & |\Delta_{i+1}c^n| \leq \max(|\Delta_i c^n|, |\Delta_{i-1}c^n|), \\ (15c_i^n - 10c_{i-1}^n + 3c_{i-2}^n)/8, & |\Delta_{i+1}c^n| > \max(|\Delta_i c^n|, |\Delta_{i-1}c^n|). \end{cases} \quad (18)$$

Принцип построения алгоритма (16)–(18) основан на следующем рассуждении. Анализ результатов расчетов для различных задач прогнозирования вытеснения нефти раствором химреагента показали, что большие осцилляции возникают при расчете разрывных решений в тех случаях, когда на границе ячейки, где происходит вытеснение, используются узлы, расположенные по разные стороны от скачков. Комбинация линейной интерполяции и экстраполяции (18) делает схему (16), (17) монотонной, но порядок аппроксимации при этом становится первым даже при постоянстве функции Баклея – Леверетта. Предложенная схема построена таким образом, чтобы без потери порядка аппроксимации свести к минимуму влияние на величины $c_{i+1/2}^n$ значений концентрации в узлах, которые находятся по разные

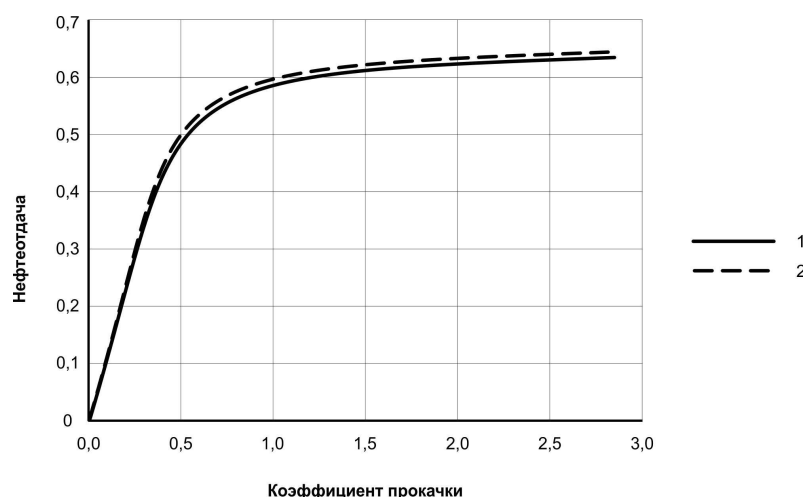


Рис. 1. Зависимость коэффициента текущей нефтеотдачи от коэффициента прокачки порового объема закаченной жидкости для двух вариантов расчета концентрации: 1 – по схеме (16)–(18); 2 – по схеме «уголок» (11). Сетка 65 × 65 узлов

Табл. 1

Схема (16)–(18)	τ	0.1	0.5	1	1.5	2	2.5	2.82
	$\eta(\tau)$	0.21	0.493	0.581	0.615	0.633	0.645	0.65
Схема (11)	τ	0.1	0.5	1	1.5	2	2.5	2,8
	$\eta(\tau)$	0.22	0.497	0.586	0.622	0.641	0.654	0.663

стороны от разрыва, и тем самым уменьшить колебания численного решения и не использовать каких-либо операторов сглаживания. Схема (16)–(18) имеет второй порядок аппроксимации по обеим переменным τ, ζ .

В [6] получены следующие результаты по оценке текущей нефтеотдачи для рассмотренных двух схем: «уголок» и (16)–(18).

На крупных сетках ($N = 3-5$ узлов) абсолютная погрешность определения текущей и конечной нефтеотдачи для данных вычислительных схем значительна; при $\tau \geq 1$ она составляет величину порядка 6.5–8.5%, что превышает расчет эталонной динамики текущей нефтеотдачи.

На средних сетках ($N = 10-20$ узлов) абсолютная погрешность определения текущей и конечной нефтеотдачи у схемы «уголок» составляет величину порядка 3.5–5.5%, а схема (16)–(18) практически точно рассчитывает эталонную динамику текущей нефтеотдачи.

На мелких сетках ($50 < N \leq 100$ узлов) абсолютная погрешность текущей и конечной нефтеотдач у схемы «уголок» составляет до 1%.

Аналогичный подход при вычислении концентрации рассмотрен в монографии [13].

На рис. 1 представлены кривые текущей нефтеотдачи в зависимости от прокаченных объемов пор закаченной жидкости для двух вариантов расчета концентрации: 1 – предложенный в [12, 13] и 2 – «уголок» (11). Использована сетка 65 × 65 узлов.

В табл. 1 в соответствии с рис. 1 приведены показатели зависимости текущей нефтеотдачи $\eta(\tau)$ от коэффициента прокачки τ для двух вариантов расчета концентрации: 1 – по схеме (16)–(18); 2 – по схеме «уголок» (11). Как видно из таблицы, максимальная абсолютная погрешность в вычислении текущей и конечной

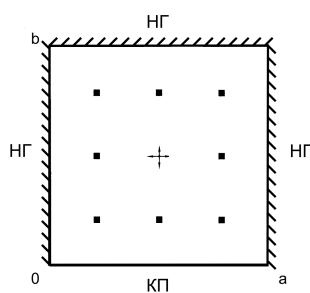


Рис. 2. Элемент заводнения слоистого пласта

нефтеотдач составляет 1.3%. Расчеты концентрации по схеме «уголок» завышают показатели разработки неоднородного пласта.

Из анализа полученных результатов можно заключить, что для численного исследования интегральных показателей разработки неоднородного пласта, а именно коэффициента текущей нефтеотдачи, возможно использование расчета концентрации по схеме «уголок» для сетки 65×65 узлов.

4. Вычислительные эксперименты

Рассмотрена модель неоднородного пласта прямоугольной конфигурации $\Omega = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, вскрытого девятиточечным элементом заводнения, для $a = b = 850$ м, $H = 5$ м, $m = 0.2$, $\mu_n = 3$ мПа·с, $\mu_B = 1$ мПа·с, $s_* = 0.26$, $s^* = 0.8$, $p_k = 22$ МПа, $p^* = 12.5$ МПа, $p^{**} = 22$ МПа, $q^* = 1$ м³/сут, $q^{**} = 500$ м³/сут, $h_x = h_y = 25$ м. Относительные фазовые проницаемости $k_H^\Phi(\tilde{s}, \tilde{c})$, $k_B^\Phi(\tilde{s})$ – линейные полиномы [2, 7, 8].

Размещение девяти скважин в элементе заводнения показано на рис. 2. Математическое ожидание для абсолютной проницаемости в области двухфазной трехкомпонентной фильтрации элемента заводнения: $m = 0.3$, дисперсия: $\sigma^2 = 0.035$, 0.126. Остальные параметры пласта и жидкостей выбраны такими: $c^* = 0.2$, $c_0 = 0.0005$, $s_*^0 = 0.2$.

Абсолютная проницаемость $k_a(x, y)$ в области двухфазной трехкомпонентной фильтрации Ω может или принимать постоянные значения ($k_a = 0.3, 0.5, 0.7$ мкм²) (однородный пласт), или моделироваться по всей области Ω датчиком псевдослучайных чисел по нормальному закону распределения (неоднородный пласт), или в зонах I, II, III принимать постоянные значения ($k_a^I(x, y) = 0.1$ мкм²), $k_a^{II}(x, y) = 0.3$ мкм², $k_a^{III}(x, y) = 0.5$ мкм² (зонально-неоднородный пласт). В вычислительных экспериментах средние интегральные значения абсолютной проницаемости $k_a(x, y)$ по области фильтрации Ω для однородного и неоднородных пластов $SIP = (ab)^{-1} \iint_{\Omega} k_a(x, y) dx dy$ были одинаковыми.

Проведена серия вычислительных экспериментов для рассматриваемого элемента заводнения при следующей гипотезе о характере вытеснения нефти водой.

Вода в первую очередь вытесняет нефть из участков (зон) пласта с наилучшей абсолютной проницаемостью, то есть каждый элементарный объем разбивается на две зоны: водную и нефтяную (нефтенасыщенность в водной зоне предполагается остаточной, а в нефтяной зоне – максимальной). Разделение на две зоны определяется найденным значением абсолютной проницаемости, которое будем называть пороговым значением.

Оптимальные технологические показатели извлечения нефти из слоистого пласта в рамках рассматриваемой гипотезы определялись на основе численного

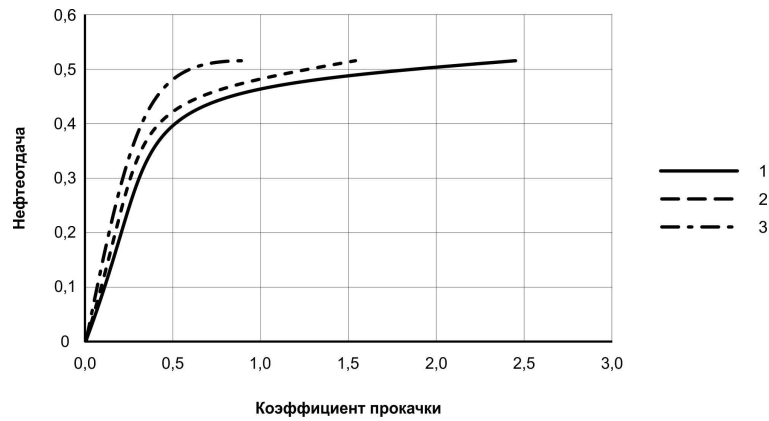


Рис. 3. Зависимость коэффициента нефтеотдачи от коэффициента прокачки жидкости. Варианты численных расчетов для однородного пласта: 1 и 2 – задача прогнозирования без закачки и с закачкой химреагента; 3 – задача регулирования с закачкой химреагента

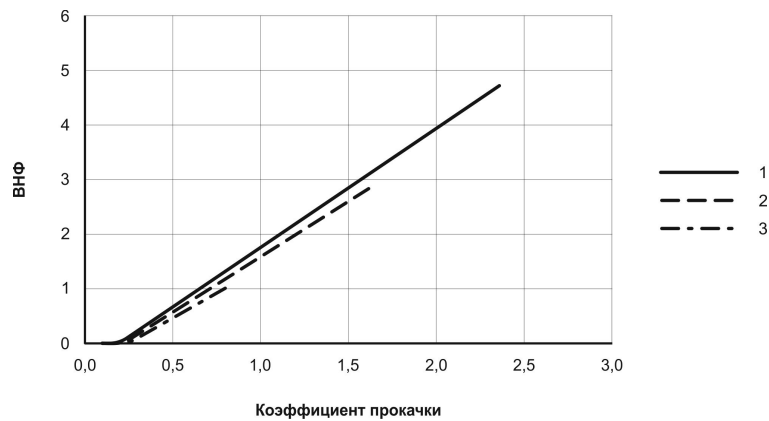


Рис. 4. Зависимость ВНФ от коэффициента прокачки жидкости. Варианты численных расчетов для однородного пласта: 1 и 2 – задача прогнозирования без закачки и с закачкой химреагента; 3 – задача регулирования с закачкой химреагента

решения задачи регулирования, при этом пластовое и забойное давления действующих скважин находились по представленному выше алгоритму. Они сравнивались с неоптимальными технологическими показателями, полученными на основе численного решения задачи прогнозирования, когда пластовое давление определялось по методу переменных направлений, а забойные давления скважин были заданы.

Известно, что фиктивные фазовые проницаемости для равномерного закона распределения имеют следующий вид [7, 14]:

$$k_H^\Phi(\tilde{s}) = k_H(\tilde{s}_H) \left(1 - v\sqrt{3}k_B(\tilde{s}_B) \right), \quad k_B^\Phi(\tilde{s}) = k_B(\tilde{s}_B) \left(1 + v\sqrt{3}k_H(\tilde{s}_H) \right),$$

$$k_H(\tilde{s}_H) = k_{H0} \left(\frac{\tilde{s} - s_*}{s^* - s_*} \right)^\alpha, \quad k_B(\tilde{s}_B) = k_{B0} \left(\frac{s^* - \tilde{s}}{s^* - s_*} \right)^\beta,$$

$$k_H^\Phi(\tilde{s}, \tilde{c}) = k_H^\Phi(\tilde{s}_H) \left(1 - \frac{\tilde{c}}{c^*} \right) + (1 - k_B^\Phi(\tilde{s}_B)) \frac{\tilde{c}}{c^*}.$$

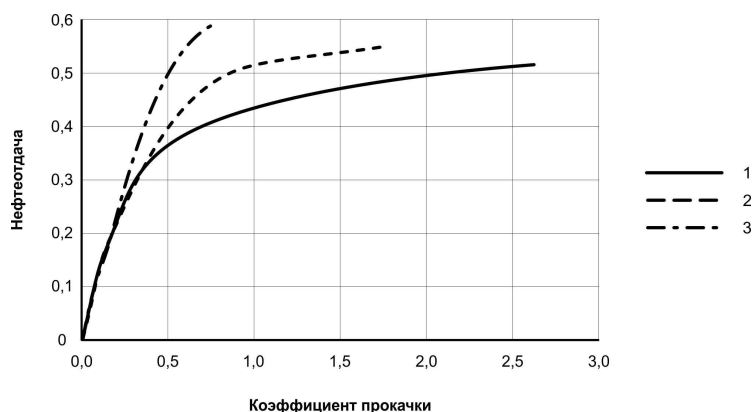


Рис. 5. Зависимость коэффициента нефтеотдачи от коэффициента прокачки жидкости. Варианты численных расчетов для зонально-неоднородного пласта: 1 и 2 – задача прогнозирования без закачки и с закачкой химреагента; 3 – задача регулирования с закачкой химреагента

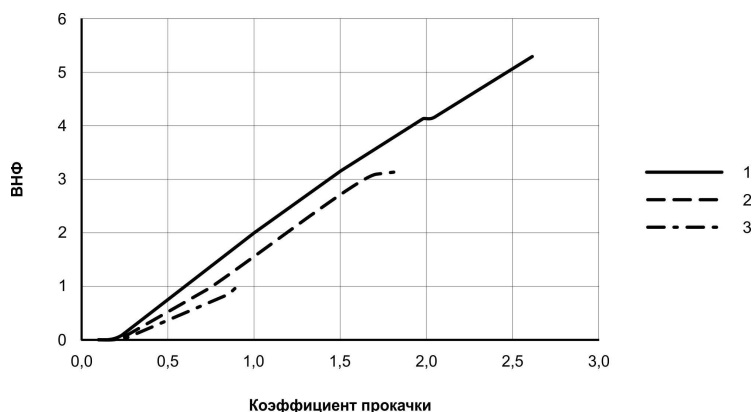


Рис. 6. Зависимость ВНФ от коэффициента прокачки жидкости. Варианты численных расчетов для зонально-неоднородного пласта: 1 и 2 – задачи прогнозирования без закачки и с закачкой химреагента; 3 – задача регулирования с закачкой химреагента

Предельные значения коэффициентов прокачки на всех приводимых ниже рисунках соответствуют отключению последней добывающей скважины при достижении максимального значения обводненности.

На рис. 3 и 4 представлены зависимости коэффициента нефтеотдачи и водо-нефтяного фактора (ВНФ) от коэффициента прокачки поровых объемов жидкости. Рассматривался однородный пласт. Вариант 1 соответствует численному решению задачи прогнозирования без учета закачки в пласт химреагента ($c_0 = 0$), вариант 2 – численному решению задачи прогнозирования при закачке химреагента ($c_0 = 0.0005$), вариант 3 – численному решению задачи регулирования при закачке химреагента ($c_0 = 0.0005$).

На рис. 5 и 6 приведены зависимости коэффициента нефтеотдачи и ВНФ от коэффициента прокачки поровых объемов жидкости. Рассматривался зонально-неоднородный пласт. Варианты 1 и 2 соответствуют численному решению задачи прогнозирования без закачки химреагента ($c_0 = 0$) и при закачке химреагента ($c_0 = 0.0005$), вариант 3 – численному решению задачи регулирования при закачке химреагента ($c_0 = 0.0005$).

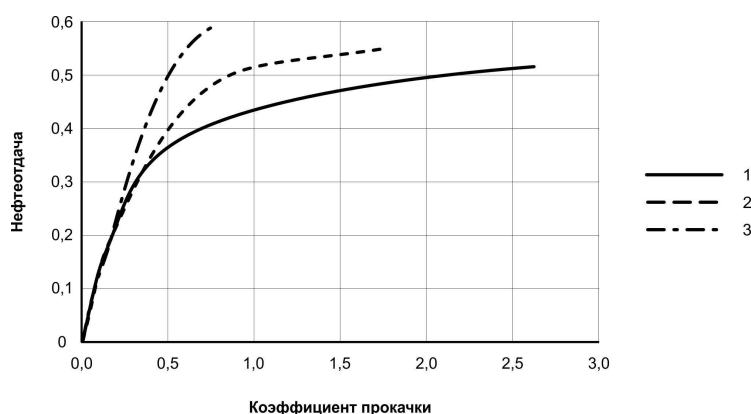


Рис. 7. Зависимость коэффициента нефтеотдачи от коэффициента прокачки жидкости. Варианты численных расчетов для существенно-неоднородного пласта: 1 и 2 – задача прогнозирования без закачки и с закачкой химреагента; 3 – задача регулирования с закачкой химреагента

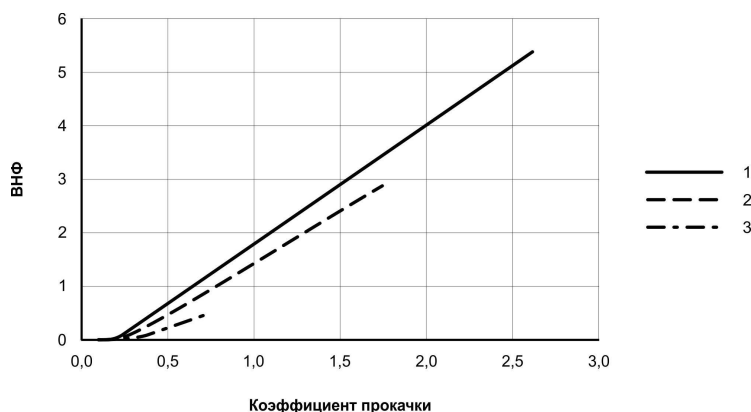


Рис. 8. Зависимость ВНФ от коэффициента прокачки жидкости. Варианты численных расчетов для существенно-неоднородного пласта: 1 и 2 – задачи прогнозирования без закачки и с закачкой химреагента; 3 – задача регулирования с закачкой химреагента

На рис. 7 и 8 показаны зависимости коэффициента нефтеотдачи и ВНФ от коэффициента прокачки поровых объемов жидкости. Рассматривался существенно-неоднородный пласт. Варианты 1 и 2 соответствуют численному решению задачи прогнозирования без закачки химреагента ($c_0 = 0$) и при закачке химреагента ($c_0 = 0.0005$), вариант 3 – численному решению задачи регулирования при закачке химреагента ($c_0 = 0.0005$).

В табл. 2 приведены значения коэффициента прокачки в поровых объемах и соответствующие им значения коэффициента конечной нефтеотдачи и ВНФ для рассмотренных выше трех вариантов распределения абсолютной проницаемости в области двухфазной трехкомпонентной фильтрации (однородный, зонально-неоднородный и существенно-неоднородный пласты).

На основе результатов, представленных на рис. 3–8, и данных табл. 2 можно сделать вывод, что распределение абсолютной проницаемости в элементе заводнения оказывает влияние на скорости водного раствора химреагента в неоднородном пласте, и, как следствие, ведет к получению лучшей динамики коэффициента

Табл. 2

Вид пласта		Однородный	Зонально-неоднородный	Существенно-неоднородный
Задача прогнозирования без закачки химреагента	τ	2.41	2.611	2.591
	η	0.511	0.509	0.508
	ВНФ	4.9	5.292	5.368
Задача прогнозирования с закачкой химреагента	τ	1.564	0.854	1.712
	η	0.514	0.551	0.552
	ВНФ	2.804	0.975	2.877
Задача регулирования с закачкой химреагента	τ	0.848	1.841	0.714
	η	0.516	0.554	0.588
	ВНФ	1.075	3.152	0.517

текущей нефтеотдачи. Использование регулирования значительно улучшает технологические показатели извлечения нефти по сравнению с прогнозированием при значительном уменьшении добычи попутной воды.

Заключение

Предложена постановка нестационарной задачи оптимального регулирования извлечения нефти с учетом закачки в пласт водного раствора химреагента заданной концентрации для нерегулярной сетки скважин и заданием на сторонах элемента заводнения граничных условий I, II родов или их комбинации. Критерий качества решения – максимизация коэффициента текущей нефтеотдачи. Приведен алгоритм решения задачи. Рассмотрен элемент заводнения с учетом заданных краевых условий.

Анализ вычислительных экспериментов показал, что существенным является влияние распределения абсолютной проницаемости в элементе заводнения на распределение скоростей водного раствора химреагента в неоднородном пласте, что, в свою очередь, ведет к лучшей динамике коэффициента текущей нефтеотдачи. Использование регулирования значительно повышает текущие показатели извлечения нефти по сравнению с прогнозированием при значительном уменьшении добычи попутной воды.

Summary

V.D. Slabnov. Numerical Research of Oil Extraction Control Problem for a Mathematical Model of Two-Phase Three-Component Filtration.

A formulation of the optimal oil extraction control problem according to the technological criterion of solution quality is suggested. The process of oil extraction in a laminated layer is described by an averaged model of two-phase three-component filtration using the Buckley–Leverett scheme. Reservoir characteristics can change along coordinate axes. The comparison between the basic technological parameters of oil production, obtained with and without regard to optimal regulation for three variants of absolute permeability distribution in a waterflooding element is made. For all the variants, the best technological parameters of oil extraction are obtained using optimal control.

Keywords: numerical research, mathematical model, two-phase three-component filtration, optimal control.

Литература

1. *Сургучев М.Л.* Вторичные и третичные методы увеличения нефтеотдачи пластов. – М.: Недр, 1985. – 308 с.

2. *Бабалян Г.А., Леви Б.И., Дзюба В.И., Пономарев С.А.* Разработка нефтяных месторождений с применением поверхностно-активных веществ. – М.: Недра, 1983. – 216 с.
3. *Мееров М.В.* Исследование и оптимизация многосвязных систем управления. – М.: Наука, 1986. – 236 с.
4. *Zakirov I.S., Aanonsen S.I., Zakirov E.S., Palatnik B.M.* Optimization Reservoir Performance by Automatic Allocation of Well Rates // Proc. “ECMOR V: European Conference on Mathematics of Oil Recovery”. – Leoben, 1996. – P. 375–384.
5. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 396 с.
6. *Леви Б.И.* Трехмерное моделирование заводнения пластов растворами химреагентов // Проблемы нефти и газа Тюмени. – 1980. – Вып. 48. – С. 39–42.
7. *Мухаметзянов Ф.М., Султанов Р.А., Фатыхов А.Г.* К задаче определения максимального суммарного отбора нефти при закачке водного раствора ПАВ // Задачи подземной гидромеханики и рациональной разработки нефтяных месторождений. – Казань, 1981. – С. 90–97.
8. *Fathi Z., Ramirez W.F.* Optimal Injection Policies for Enhanced Oil Recovery: Part 2 – Surfactant Flooding // Soc. Petrol. Eng. J. – 1984. – V. 24, No 3. – P. 333–341.
9. *Ramirez W.F.* Application of Optimal Control Theory to Enhanced Recovery. – Amsterdam; N. Y.: Elsevier, 1987. – 250 p.
10. *Северов Я.А.* Сравнение гидродинамических показателей двухмерного с трехмерным моделированием пласта // Науч. труды Оренб. нефтян. акцион. компании «ОНАКО». – 2001. – № 3. – С. 165–169.
11. *Леви Б.И., Сурков Ю.В., Тумасян А.Б.* Методика расчета технологических показателей заводнения неоднородных пластов водными растворами ПАВ и карбонизированной водой. – Уфа: ОНТИ БашНИПИнефть, 1974. – 39 с.
12. *Зайдель Я.М., Леви Б.И.* Об использовании метода осреднения для решения пространственных задач двухфазной фильтрации // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1977. – № 3. – С. 71–75.
13. *Чекалин А.Н., Кудрявцев Г.В., Михайлов В.В.* Исследование двух- и трехкомпонентной фильтрации в нефтяных пластах. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1990. – 148 с.
14. *Султанов Р.А.* Обобщение некоторых методов осреднения фильтрации в слоистых пластах при вытеснении нефти растворами химреагентов // Оптимизация нефтедобычи и вопросы подземной гидромеханики. – Казань: Казан. физ.-техн. ин-т, 1987. – С. 110–113.
15. *Султанов Р.А., Слабнов В.Д., Фукин И.А., Скворцов В.В.* К проблеме оптимального регулирования процесса извлечения нефти с учетом вероятностного закона распределения некоторого параметра слоистого пласта // Проблемы управления. – 2009. – № 6. – С. 28–34.
16. *Слабнов В.Д., Султанов Р.А.* К задаче регулирования текущей нефтеотдачи в слоистом пласте // Вопросы математического моделирования процессов фильтрации и рациональной разработки нефтяных месторождений. – Казань: Казан. физ.-техн. ин-т, 1989. – С. 44–48.
17. *Слабнов В.Д., Волков Ю.А., Скворцов В.В.* Влияние некоторых факторов регулирования на основные показатели нефтедобычи из неоднородного пласта // Матем. моделирование. – 2002. – Т. 14, № 1. – С. 3–15.

18. *Слабнов В.Д., Скворцов В.В.* Численное определение давления и оптимальных показателей скважин при решении краевых задач двухфазной фильтрации с помощью линейного программирования // Матем. моделирование. – 2009. – Т. 21, № 11. – С. 83–98.
19. *Вабищевич П.Н., Самарский А.А.* Разностные схемы для нестационарных задач конвекции – диффузии // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1998. – Т. 38, № 2. – С. 207–319.

Поступила в редакцию
12.03.14

Слабнов Виктор Дмитриевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий, Институт экономики, управления и права, г. Казань, Россия.

E-mail: *slabnov@ieml.ru*