УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 148, кн. 2 Физико-математические науки *2006*

УДК 517.518

О ПОРЯДКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОВ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

Г.А. Акишев

Аннотация

В статье изучен порядок приближения классов Бесова тригонометрическими полиномами с гармониками из ступенчатого гиперболического «креста» в пространствах Лебега со смешанной нормой.

Пусть $\bar{x} = (x_1, ..., x_m) \in R^m$, $I^m = [0, 2\pi)^m$, $m \in N$. Через $L_{\bar{p}}(I^m)$ обозначим пространство измеримых по Лебегу, имеющих 2π-период по каждой переменной функций $f(\bar{x})$, для которых

$$\|f\|_{\bar{p}} = \left[\int\limits_0^{2\pi}\left[\cdots\left[\int\limits_0^{2\pi}|f(\bar{x})|^{p_1}dx_1\right]^{p_2/p_1}\cdots\right]^{p_m/p_{m-1}}dx_m\right]^{1/p_m} < +\infty,$$

где $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, $1 \leqslant p_j < +\infty$, $j = 1, \ldots, m$ (см. [1, 2]), через $\overset{\circ}{L}_{\overline{p}}(I^m)$ – множество всех функций $f \in L_{\overline{p}}(I^m)$ таких, что

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\overline{x})\, dx_j = 0, \quad \forall j = 1, ..., m.$$

Будем говорить, что числовая последовательность $\{a_{\bar{n}}\}_{\bar{n}\in Z^m}$ принадлежит $l_{\bar{p}}$, если

$$\|\{a_{\bar{n}}\}_{\bar{n}\in Z^m}\|_{l_{\bar{p}}} = \left\{\sum_{n_m=-\infty}^{\infty}\left[...\left\{\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}|a_{\bar{n}}|^{p_1}\right\}^{p_2/p_1}\cdots\right]^{p_m/p_{m-1}}\right\}^{1/p_m} < +\infty,$$

где $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, $1 \leqslant p_j < +\infty$, $j = 1, \ldots, m$.

Пусть даны векторы $\bar{r} = (r_1, \ldots, r_n)$, $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$, причем $1 \leqslant \theta_j, p_j < +\infty$, $r_j > 0$, $j = 1, \ldots, m$. Рассмотрим класс О.В. Бесова

$$B^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}} = \left\{f \in \overset{\circ}{L}_{\overline{p}}(I^m) : \|f\|_{B^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}}} = \|f\|_{\overline{p}} + \left\|\left\{2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\,\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{p}}\right\}_{\overline{s}\in Z^m_+}\right\|_{l_{\overline{\theta}}} \leqslant 1\right\}.$$

Здесь и в дальнейшем

$$\delta_{\overline{s}}(f, \overline{x}) = \sum_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle},$$

где $\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j x_j$, $\rho(\bar{s}) = \{\bar{k} = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^m : 2^{s_j - 1} \leqslant |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \ldots, m\}$, $a_{\bar{n}}(f)$ – коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(I^m)$ по кратной тригонометрической системе $\{e^{i\langle \bar{n}, \bar{x} \rangle}\}_{\bar{n} \in Z^m}$.

Пусть дан вектор $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, $\gamma_j > 0$, $j = 1, \ldots, m$. Положим

$$Q_n^{\bar{\gamma}} = \bigcup_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < n} \rho(\bar{s}), \quad T(Q_n^{\bar{\gamma}}) = \left\{ t(\bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in Q_n^{\bar{\gamma}}} b_{\bar{k}} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle} \right\}.$$

Обозначим через $E_n^{(\bar{\gamma})}(f)_{\bar{p}}$ наилучшее приближение функции $f \in L_{\bar{p}}(I^m)$ полиномами из множества $T(Q_n^{\bar{\gamma}})$; положим

$$E_n^{\overline{\gamma}} \left(B_{\overline{p}, \overline{\theta}}^{\overline{r}} \right)_{\overline{q}} = \sup_{f \in B_{\overline{p}, \overline{\theta}}^{\overline{r}}} E_n^{\overline{\gamma}}(f)_{\overline{q}}.$$

В исследовании порядка приближения классов функций многих переменных важное значение имеет способ выбора гармоник приближающих полиномов.

Впервые способ приближения классов функций многих переменных тригонометрическими полиномами с гармониками из гиперболических «крестов» предложил К.И. Бабенко [3]. Впоследствии приближения различных классов гладких функций в пространствах Лебега с изотропной нормой этим методом исследованы С.А. Теляковским [4], Б.С. Митягиным [5], Я.С. Бугровым [6], Н.С. Никольской [7], Э.М. Галеевым [8, 9], В.Н. Темляковым [10, 11], Б.С. Кашиным, В.Н. Темляковым [12], Динь Зунгом [13], Н.Н. Пустовойтовым [14], А.С. Романюком [15, 16].

Цель настоящей статьи – изучение порядка приближения классов Бесова в пространствах Лебега со смешанной нормой.

Сначала приведем некоторые обозначения и вспомогательные утверждения. Положим

$$Y^m(n, \bar{\gamma}) = \{\bar{s} = (s_1, \ldots, s_m) \in \mathbb{Z}_+^m : \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \geqslant n\},$$

$$Y_1^m(n, \bar{\gamma}) = \{\bar{s} = (s_1, \ldots, s_m) \in \mathbb{Z}_+^m : \sum_{j=1}^{l} s_j \gamma_j \geqslant n - \sum_{l+1}^{m} s_j \gamma_j > 0\},$$

$$Y_2^m(n, \bar{\gamma}) = \{\bar{s} = (s_1, \ldots, s_m) \in \mathbb{Z}_+^m : s_1, \ldots, s_l > 0, \sum_{j=l+1}^{m} s_j \gamma_j \geqslant n\}.$$

Через $C(p, q, r, y)$ обозначим положительные величины, зависящие от указанных в скобках параметров, вообще говоря, различные в разных формулах.

Запись $A(y) \asymp B(y)$ означает, что существуют положительные C_1, C_2 такие, что $C_1 \cdot A(y) \leqslant B(y) \leqslant C_2 \cdot A(y)$.

Лемма 1 (см. [17]). *Пусть даны целое неотрицательное число $l < \nu \leqslant m$ и вектор $\overline{\gamma} = (\gamma_{l+1}, \ldots, \gamma_m)$, $1 = \gamma_{l+1} = \cdots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \leqslant \cdots \leqslant \gamma_m$; пусть, далее, $\alpha \in (0, +\infty)$, $\theta_j \in [1, +\infty)$, $j = l+1, \ldots, m$, $\overline{\theta} = (\theta_{l+1}, \ldots, \theta_m)$. Тогда имеет место соотношение*

$$\left\| \left\{ 2^{-\alpha \langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle} \right\}_{\overline{s} \in Y^{m-l}(\overline{\gamma}, n)} \right\|_{l_{\overline{\theta}}} \asymp 2^{-n\alpha} n^{\sum\limits_{j=l+2}^{m} 1/\theta_j}.$$

Лемма 2 (см. [18]). *Пусть даны целое неотрицательное число $\bar{\tau} = (\tau_{l+1}, \ldots, \tau_m)$, $(1 \leqslant \tau_j < +\infty)$, $j = l+1, \ldots, m$, и $\chi_{\varkappa(n)}(\bar{s})$ – характеристическая функция множества $\varkappa(n) = \{\bar{s} = (s_1, \ldots, s_m) \in \mathbb{Z}_+^m : \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle = n\}$. Тогда имеет место соотношение*

$$\left\| \left\{ \chi_{\varkappa(n)}(\bar{s}) \right\}_{\bar{s} \in \varkappa(n)} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} \asymp n^{\sum\limits_{j=l+2}^{m} 1/\tau_j}.$$

Теперь изложим основные результаты статьи.

Теорема 1. *Пусть* $\bar{q} = (q_1, \ldots, q_m)$, $1 < q_j < \infty$, $j = 1, \ldots, m$, $\beta = \min\{q_1, \ldots, q_m, 2\}$ *Тогда для любой функции* $f \in L_{\bar{q}}(I^m)$ *имеет место неравенство*

$$\|f\|_{\bar{q}} \leqslant C(q,m) \left\{ \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{q}}^{\beta} \right\}^{1/\beta}.$$

Доказательство. Если $2 < q_j < +\infty$, $j = 1, \ldots, m$, то $\beta = 2$. В этом случае теорема доказана в [17].

Далее неоднократно будем пользоваться следующим результатом О.В. Бесова [19] о том , что если $f \in L_{\bar{q}}(I^m)$, $1 < q_j < \infty$, $j = 1, \ldots, m$, то

$$\|f\|_{\bar{q}} \asymp \left\| \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} |\delta_{\bar{s}}(f, \cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{\bar{q}}.$$

Пусть $1 < q_j < 2$, $j = 1, \ldots, m,$. Тогда $\beta = q_{j_0} = \min\{q_1, \ldots, q_m\}$. Так как $q_1/2 < 1$ и $q_{j_0}/q_1 \leqslant 1$, то в силу неравенства Иенсена (см. [1, с. 125]) имеем

$$\left[\int_0^{2\pi} \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} |\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x})|^2 \right)^{q_1/2} dx_1 \right]^{q_2/q_1} \leqslant \left[\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \int_0^{2\pi} |\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x})|^{q_1} dx_1 \right]^{q_2/q_1} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \left(\int_0^{2\pi} |\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x})|^{q_1} dx_1 \right)^{q_{j_0}/q_1} \right]^{q_2/q_{j_0}}$$

почти для всех $\bar{x}_2 = (x_2, \ldots, x_m)$. В силу этого неравенства по свойству нормы имеем

$$\left\| \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} |\delta_{\bar{s}}(f, \cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{\bar{q}} \leqslant \left\| \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \|\delta_{\bar{s}}(f, \cdot, \bar{x}_2)\|_{q_1}^{q_{j_0}} \right)^{1/q_{j_0}} \right\|_{\bar{q}_2}, \tag{1}$$

где $\bar{q}_2 = (q_2, \ldots, q_m)$. Так как $q_j/q_{j_0} \geqslant 1$, $j = 1, \ldots, m$, то по свойству нормы из (1) получим

$$\left\| \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} |\delta_{\bar{s}}(f, \cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{\bar{q}} \leqslant \left\{ \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \|\delta_{\bar{s}}(f, \cdot)\|_{\bar{q}}^{q_{j_0}} \right\}^{1/q_{j_0}}. \tag{2}$$

Пусть теперь $\beta = \min\{q_1, \ldots, q_m, 2\} = q_{j_0} \neq 2$, то есть $q_{j_0} < 2$ и некоторые $q_j > 2$.

Если $q_1 < 2$, то два раза применяя неравенство Иенсена, имеем

$$\left[\int_0^{2\pi} \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} |\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x})|^2 \right)^{q_1/2} dx_1 \right]^{1/q_1} \leqslant \left[\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \int_0^{2\pi} |\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x})|^{q_1} dx_1 \right]^{1/q_1} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \left(\int_0^{2\pi} |\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x})|^{q_1} dx_1 \right)^{q_{j_0}/q_1} \right]^{1/q_{j_0}}.$$

Тогда учитывая то, что $q_{j_0} \leqslant q_2$, по свойству нормы имеем

$$\left[\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi}\left\{\sum_{\bar s\in\mathbb{Z}_+^m}|\delta_{\bar s}(f,\bar x)|^2\right\}^{q_1/2}dx_1\right)^{q_2/q_1}dx_2\right]^{1/q_2}\leqslant$$

$$\leqslant\left[\int\limits_0^{2\pi}\left(\sum_{\bar s\in\mathbb{Z}_+^m}\|\delta_{\bar s}(f,\cdot,\bar x_2)\|_{q_1}^{q_{j_0}}\right)^{q_2/q_{j_0}}dx_2\right]^{1/q_2}\leqslant\left\{\sum_{\bar s\in\mathbb{Z}_+^m}\|\delta_{\bar s}(f,\cdot,\bar x_3)\|_{(q_1,q_2)}^{q_{j_0}}\right\}^{1/q_{j_0}}$$

почти для всех $\bar x_3=(x_3,\dots,x_m)$. Далее продолжая этот процесс, по свойству нормы имеем (так как $q_{j_0}\leqslant q_j,\ j=3,4,\dots,m$)

$$\|f\|_{\bar q}\leqslant\left\|\left\{\sum_{\bar s\in\mathbb{Z}_+^m}|\delta_{\bar s}(f,\cdot)|^2\right\}^{1/2}\right\|_{\bar q}\leqslant\left\{\sum_{\bar s\in\mathbb{Z}_+^m}\left\|\delta_{\bar s}(f)\right\|_{\bar q}^{q_{j_0}}\right\}^{1/q_{j_0}}. \tag{3}$$

Таким образом, теорема доказана в случае $q_1<2,\ \beta<2$.

Пусть $\beta=q_{j_0}<2$, но $q_1>2$ и $k_0\in\{1,\dots,j_0\}$ – первый номер, для которого $q_{k_0}\leqslant 2$, то есть $q_j>2$, для $j=1,2,\dots,k_0-1$. Тогда по свойству нормы имеем

$$\left\|\left\{\sum_{\bar s\in\mathbb{Z}_+^m}|\delta_{\bar s}(f,\cdot),\bar x_{k_0}|^2\right\}^{1/2}\right\|_{\bar q_0}\leqslant\left\{\sum_{\bar s\in\mathbb{Z}_+^m}\left\|\delta_{\bar s}(f,\cdot,\bar x_{k_0})\right\|_{\bar q_0}^2\right\}^{1/2},$$

где $\bar x_{k_0}=(x_{k_0},\dots,x_m)$, $q_0=(q_1,\dots,q_{k_0}-1)$. Используя это неравенство и два раза применяя неравенство Иенсена (см. [1, с. 125]), с учетом соотношений $q_{k_0}/2<1$, $q_{j_0}/q_{k_0}\leqslant 1$ будем иметь

$$\left\|\left\{\sum_{\bar s\in\mathbb{Z}_+^m}|\delta_{\bar s}(f,\cdot,\bar x_{k_0+1})|^2\right\}^{1/2}\right\|_{(\bar q_0,q_{k_0})}\leqslant\left\{\sum_{\bar s\in\mathbb{Z}_+^m}\left\|\delta_{\bar s}(f,\cdot,\bar x_{k_0+1})\right\|_{(\bar q_0,q_{k_0})}^{q_{k_0}}\right\}^{1/q_{k_0}}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\sum_{\bar s\in\mathbb{Z}_+^m}\left\|\delta_{\bar s}(f,\cdot,\bar x_{k_0+1})\right\|_{(\bar q_0,q_{k_0})}^{q_{j_0}}\right\}^{1/q_{j_0}}$$

почти для всех $\bar x_{k_0+1}=(x_{k_0+1},\dots,x_m)$. Отсюда по свойству нормы получим (т. к. $q_{j_0}\leqslant q_j,\ j=k_0+1,\dots,m$)

$$\left\|\left\{\sum_{\bar s\in\mathbb{Z}_+^m}|\delta_{\bar s}(f,\cdot)|^2\right\}^{1/2}\right\|_{\bar q}\leqslant\left\|\left\{\sum_{\bar s\in\mathbb{Z}_+^m}\left\|\delta_{\bar s}(f,\cdot,\bar x_{k_0+1})\right\|_{(\bar q_0,q_{k_0})}^{q_{j_0}}\right\}^{1/q_{j_0}}\right\|_{(q_{k_0+1},\dots,q_m)}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\sum_{\bar s\in\mathbb{Z}_+^m}\left\|\delta_{\bar s}(f,\cdot)\right\|_{\bar q}^{q_{j_0}}\right\}^{1/q_{j_0}} \tag{4}$$

в случае $q_1>2,\ \beta=q_{j_0}<2$. Из неравенств (2)–(4) в силу теоремы О.В. Бесова [18] получим утверждение теоремы. □

Теперь теорему 1 применим для оценки порядка приближения функциональных классов.

Теорема 2. *Пусть* $\bar{q} = (q_1, \dots, q_m)$, $1 < q_j < +\infty$, $\beta = \min\{q_1, \dots, q_m, 2\}$, $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $0 < r_1 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant \dots \leqslant r_m$, $\gamma_j = r_j/r_1$, $j = 1, \dots, m$. *Тогда имеют место соотношения*

1. $E_n^{\overline{\gamma}}(B^{\overline{r}}_{\overline{q},\overline{\theta}})_{\bar{q}} \asymp 2^{-nr_1}$, *если* $1 \leqslant \theta_j \leqslant \beta$;

2. $E_n^{\overline{\gamma}}(B^{\overline{r}}_{\overline{q},\overline{\theta}})_{\bar{q}} \leqslant C(q,\theta,m,r) \cdot 2^{-nr_1} \cdot n^{\sum\limits_{j=l+1}^{m}(1/\beta - 1/\theta_j)}$, *если* $\begin{array}{l} \theta_j \leqslant \beta,\ j = 1, \dots, l, \\ \theta_j > \beta,\ j = l+1, \dots, m. \end{array}$

Доказательство. Пусть $\theta_j \leqslant \beta$, $j = 1, \dots, m$. Применяя теорему 1 к функции $f - S_n^{\overline{\gamma}}(f) \in L_{\bar{q}}(I^m)$ и используя неравенство Иенсена, получим

$$E_n^{\overline{\gamma}}(f)_{\bar{q}} \leqslant \left\| f - S_n^{\overline{\gamma}}(f) \right\|_{\overline{q}} \leqslant C(q,m) \cdot \left\{ \sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle \geqslant n} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{q}}^{\beta} \right\}^{1/\beta} \leqslant$$

$$\leqslant C(q,m) \cdot \left\{ \sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle \geqslant n} \left(2^{\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{q}} \right)^{\beta} \right\}^{1/\beta} \leqslant$$

$$\leqslant C(q,m) \cdot 2^{-nr_1} \left\| \left\{ 2^{\langle \overline{s}, \overline{r} \rangle} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{q}} \right\}_{\overline{s} \in Z_+^m} \right\|_{l_{\overline{\theta}}}.$$

Следовательно,

$$E_n^{\overline{\gamma}}(B^{\overline{r}}_{\overline{q},\overline{\theta}})_{\bar{q}} \leqslant C(q,m) \cdot 2^{-nr_1}.$$

Для оценки снизу величины $E_n^{\overline{\gamma}}(B^{\overline{r}}_{\overline{q},\overline{\theta}})_{\bar{q}}$ рассмотрим функцию

$$f_0(\bar{x}) = \prod_{j=1}^{\nu} 2^{-s_j^0(r_j + 1 - 1/q_j)} \sum_{\overline{k} \in \rho(\overline{s}_0)} e^{i\langle \overline{k}, \overline{x} \rangle} = \delta_{\overline{s}^0}(f, \overline{x}),$$

где $\overline{s_0} = (s_1^0, \dots, s_m^0)$, $\langle \overline{s}^0, \overline{\gamma} \rangle = 0$.

Так как f_0 непрерывна, то $f_0 \in L_{\bar{q}}(I^m)$. Учитывая соотношение

$$\left\| \sum_{k=2^{s-1}}^{2^s - 1} e^{ikt} \right\|_p \asymp 2^{s(1-1/p)}, \quad 1 < p < +\infty, \tag{5}$$

получим

$$\left\| \left\{ 2^{\langle \overline{s}, \overline{r} \rangle} \left\| \delta_{\overline{s}}\left(f_{(0)}\right) \right\|_{\overline{q}} \right\}_{\overline{s} \in Z_+^m} \right\|_{\overline{q}} = \|\delta_{\overline{s}^0}(f_0)\|_{\overline{q}} 2^{\langle \overline{s}^0, \overline{r} \rangle} \leqslant C(q,m),$$

то есть $C_0 f_0 \in B^{\overline{r}}_{\overline{q},\overline{\theta}}$. Так как $\langle \overline{s}_0, \overline{\gamma} \rangle = n$, то $S_n^{\overline{\gamma}}(f_0, \overline{x}) = 0$. Поэтому, учитывая (5), будем иметь

$$\left\| f_0 - S_n^{\bar{\gamma}}(f_0) \right\|_{\bar{q}} = \|f_0\|_{\bar{q}} \geqslant C(q,m) \cdot 2^{-nr_1}.$$

Следовательно,

$$E_n^{\overline{\gamma}}(B^{\overline{r}}_{\overline{q},\overline{\theta}})_{\bar{q}} \geqslant C(q,m) \cdot 2^{-nr_1}.$$

Этим первый пункт доказан.

Пусть $\theta_j < \beta,\ j = 1, \dots, l$ и $\theta_j \geqslant \beta,\ j = l+1, \dots, m$. Тогда, применяя теорему 1 к функции $f - S_n^{\overline{\gamma}}(f) \in L_{\overline{q}}(I^m)$, получим

$$\left\|f - S_n^{\overline{\gamma}}(f)\right\|_{\overline{q}} \leqslant C\,(q,m) \cdot \left[\left\{\sum_{\overline{s}\in Y_1^m(\overline{\gamma},n)} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{q}}^{\beta}\right\}^{1/\beta} + \right.$$

$$\left. + \left\{\sum_{\overline{s}\in Y_2^m(\overline{\gamma},n)} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{q}}^{\beta}\right\}^{1/\beta}\right] = C(q,m)\{J_1(n) + J_2(n)\}. \quad (6)$$

Так как $\theta_j < \beta,\ j = 1, \dots, l$ и $r_j > 0$, то при фиксированных $s_{l+1}, \dots, s_m$

$$\sum_{\overline{s}_l\in Z_+^l} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{q}}^{\beta} \leqslant \left\{\sum_{s_l=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{s_1=1}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{l} 2^{s_j r_j}\,\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{q}}\right)^{\theta_1}\right)^{\theta_2/\theta_1}\cdots\right)^{\theta_l/\theta_{l-1}}\right\}^{\beta/\theta_l} =$$

$$= \left\|\left\{\prod_{j=1}^{l} 2^{s_j r_j}\,\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{q}}\right\}_{\overline{s}_l\in Z_+^l}\right\|_{l_{\overline{\theta}_l}}^{\beta},$$

где $\overline{s}_l = (s_1, \dots, s_l),\ \overline{\theta}_l = (\theta_1, \dots, \theta_l)$.

Поэтому

$$J_2(n) = \left\{\sum_{\overline{s}\in Y_2^m(\overline{\gamma},n)} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{q}}^{\beta}\right\}^{1/\beta} = \left\{\sum_{\overline{s}_{m-l}\in Y_3^{m-l}(\overline{\gamma},n)}\ \sum_{\overline{s}_l\in Z^l} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{q}}^{\beta}\right\}^{1/\beta} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\sum_{\overline{s}_{m-l}\in Y_3^{m-l}(\overline{\gamma},n)} \left\|\left\{\prod_{j=1}^{l} 2^{s_j r_j}\,\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{q}}\right\}_{\overline{s}_l\in Z_+^l}\right\|_{l_{\overline{\theta}_l}}^{\beta}\right\}^{1/\beta}, \quad (7)$$

где $Y_3^{m-l}(\overline{\gamma},n) = \left\{\overline{s}_{m-l} = (s_{l+1}, \dots, s_m) \in Z_+^{m-l} : \sum\limits_{j=l+1}^{m} s_j\gamma_j \geqslant n\right\}$.

Так как $\beta < \theta_j,\ j = l+1, \dots, m$, то, применяя неравенство Гельдера с показателями $\tau_j = \theta_j/\beta,\ \tau_j' = \tau_j/(\tau_j - 1),\ j = l+1, \dots, m$, получим

$$\sum_{\overline{s}_{m-l}\in Y_3^{m-l}(\overline{\gamma},n)} \left\|\left\{\prod_{j=1}^{l} 2^{s_j r_j}\,\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{q}}\right\}_{\overline{s}_l\in Z_+^l}\right\|_{l_{\overline{\theta}_l}}^{\beta} \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\left\{\prod_{j=l+1}^{m} 2^{-s_j r_j}\right\}_{\overline{s}_{m-l}\in Y_3^{m-l}(\overline{\gamma},n)}\right\|_{l_{\overline{\varepsilon}_{m-l}}} \times$$

$$\times \left\|\left\{\prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j}\,\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{q}}\right\}_{\overline{s}\in Z_+^m}\right\|_{l_{\overline{\theta}}}, \quad (8)$$

где $\overline{\epsilon}_{m-l} = (\epsilon_{l+1}, \ldots, \epsilon_m)$, $\epsilon_j = \beta\tau_j^{'}$, $j = l+1, \ldots, m$.

Пользуясь леммой 1 с $\alpha = r_1$, $\theta_j = \epsilon_j$, будем иметь

$$\left\| \left\{ \prod_{j=l+1}^{m} 2^{-s_j r_j} \right\}_{\overline{s}_{m-l} \in Y_3^{m-l}(\overline{\gamma}, n)} \right\|_{l_{\overline{\epsilon}_{m-l}}} \leqslant C(m, r, \theta) \cdot 2^{-nr_1} n^{\sum\limits_{j=l+2}^{m} 1/\epsilon_j}. \tag{9}$$

Из неравенств (7)–(9) следует, что

$$J_2(n) \leqslant C(\theta, q, m, r) 2^{-nr_1} n^{\sum\limits_{j=l+2}^{m} (1/\beta - 1/\theta_j)} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \left\| \delta_{\overline{s}}(f) \right\|_{\overline{q}} \right\}_{\overline{s} \in Z_+^m} \right\|_{l_{\overline{\theta}}}, \tag{10}$$

где

$$\frac{1}{\epsilon_j} = \frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{\beta}{\theta_j}\right) = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\theta_j}.$$

Теперь оценим $J_1(n)$. Так как $r_j > 0$ и $\theta_j < \beta$, $j = 1, \ldots, l$, то в силу неравенства Иенсена имеем

$$J_1(n) = \left\{ \sum_{\overline{s} \in Y_1^m(\overline{\gamma}, n)} \left\| \delta_{\overline{s}}(f) \right\|_{\overline{q}}^{\beta} \right\}^{1/\beta} =$$

$$= \left\{ \sum_{\sum\limits_{j=1}^{l} s_j \gamma_j < n} \; \sum_{\sum\limits_{j=l+1}^{m} s_j \gamma_j > n - \sum\limits_{j=l+1}^{m} s_j \gamma_j} \left(\prod_{j=1}^{l} 2^{-s_j r_j} \right)^{\beta} \left(\prod_{j=1}^{l} 2^{s_j r_j} \left\| \delta_{\overline{s}}(f) \right\|_{\overline{q}} \right)^{\beta} \right\}^{1/\beta} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-nr_1} \left\{ \sum_{\sum\limits_{j=l+1}^{m} s_j \gamma_j < n} \left(2^{\sum\limits_{j=l+1}^{m} s_j r_j} \right)^{\beta} \sum_{\overline{s}_l \in Z_+^l} \left(\prod_{j=1}^{l} 2^{s_j r_j} \left\| \delta_{\overline{s}}(f) \right\|_{\overline{q}} \right)^{\beta} \right\}^{1/\beta} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-nr_1} \left\{ \sum_{\sum\limits_{j=l+1}^{m} s_j \gamma_j < n} \left(2^{\sum\limits_{j=l+1}^{m} s_j r_j} \right)^{\beta} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{l} 2^{s_j r_j} \left\| \delta_{\overline{s}}(f) \right\|_{\overline{q}} \right\}_{\overline{s}_l \in Z_+^l} \right\|_{l_{\overline{\theta}_l}}^{\beta} \right\}^{1/\beta}. \tag{11}$$

Так как $\beta < \theta_j$, $j = l+1, \ldots, m$, то, применяя неравенство Гельдера с показателями $\tau_j = \theta_j/\beta$, $\tau_j^{'} = \tau_j/(\tau_j - 1)$, $j = l+1, \ldots, m$, из (11) получим

$$J_1(n) \leqslant 2^{-nr_1} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \left\| \delta_{\overline{s}}(f) \right\|_{\overline{q}} \right\}_{\overline{s} \in Z_+^m} \right\|_{l_{\overline{\theta}}} \times$$

$$\times \left\| \left\{ \chi_{\sigma_n}(\overline{s}_{m-l}) \right\}_{\overline{s}_{m-l} \in Z_+^{m-l}} \right\|_{l_{\overline{\epsilon}_{m-l}}}, \tag{12}$$

где $\sigma_n = \left\{ \overline{s}_{m-l} = (s_{l+1}, \ldots, s_m) \in Z_+^{m-l} : \sum\limits_{j=l+1}^{m} s_j \gamma_j < n \right\}$, χ_{σ_n} – характеристическая функция множества σ_n, и $\overline{\epsilon}_{m-l} = (\epsilon_{l+1}, \ldots, \epsilon_m)$, $\epsilon_j = \beta\tau_j^{'}$, $j = l+1, \ldots, m$.

В силу леммы 2

$$\left\|\{\chi_{\sigma_n}(\overline{s}_{m-l})\}_{\overline{s}_{m-l}\in Z_+^{m-l}}\right\|_{l_{\overline{\epsilon}_{m-l}}} \leqslant C(q,\theta,m,l)n^{\sum\limits_{j=l+1}^{m}1/\epsilon_j} =$$

$$= C(q,\theta,m,l)n^{\sum\limits_{j=l+1}^{m}(1/\beta-1/\theta_j)}.$$

Поэтому из неравенства (12) получим оценку

$$J_1(n) \leqslant C(q,\theta,m,l)2^{-nr_1}n^{\sum\limits_{j=l+1}^{m}(1/\beta-1/\theta_j)}\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}2^{s_jr_j}\,\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{q}}\right\}_{\overline{s}\in Z_+^m}\right\|_{l_{\overline{\theta}}}. \qquad (13)$$

Теперь из неравенств (6), (10), (13) будем иметь

$$E_n^{\overline{\gamma}}(f)_{\bar{q}} \leqslant \left\|f-S_n^{\overline{\gamma}}(f)\right\|_{\overline{q}} \leqslant C(q,\theta,m,r)\cdot 2^{-nr_1}\cdot n^{\sum\limits_{j=l+1}^{m}(1/\beta-1/\theta_j)},$$

для любой функции $f\in B^{\overline{r}}_{\overline{q},\overline{\theta}}$, $\theta_j<\beta$, $j=1,\dots,m$, и $\theta_j\geqslant\beta$, $j=l+1,\dots,m$.

Таким образом,

$$E_n^{\overline{\gamma}}(B^{\overline{r}}_{\overline{q},\overline{\theta}})_{\bar{q}} \leqslant C(q,\theta,m,r)\cdot 2^{-nr_1}\cdot n^{\sum\limits_{j=l+1}^{m}(1/\beta-1/\theta_j)},$$

где $\theta_j<\beta$, $j=1,\dots,l$, и $\theta_j\geqslant\beta$, $j=l+1,\dots,m$. Теорема доказана. □

Теорема 3. *Пусть* $1<p_j<q_j<+\infty$, $r_j>1/p_j-1/q_j$, $1\leqslant\theta_j<\infty$, $\bar{r}=(r_1,r_2)$, $\gamma_j=r_j/r_1$, $j=1,2$. *Тогда справедливо неравенство*

$$E_n^{\overline{\gamma}}(B^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}})_{\bar{q}} \leqslant C(p,q,\theta,r)2^{-n\alpha}n^{\beta},$$

где $\alpha=\min\{r_1+\dfrac{1}{q_1}-\dfrac{1}{p_1}, r_2+\dfrac{1}{q_2}-\dfrac{1}{p_2}\}$ *и*

$$\beta=\begin{cases} 0, & \text{если}\begin{cases}\theta_j\leqslant q_j \quad j=1,2;\\ q_j<\theta_j,\quad j=1,2,\quad r_1+\dfrac{1}{q_1}-\dfrac{1}{p_1}\neq r_2+\dfrac{1}{q_2}-\dfrac{1}{p_2};\\ \theta_1\leqslant q_1,\quad q_2<\theta_2\quad r_1+\dfrac{1}{q_1}-\dfrac{1}{p_1}\neq r_2+\dfrac{1}{q_2}-\dfrac{1}{p_2};\end{cases}\\[2ex] \dfrac{1}{q_2}-\dfrac{1}{\theta_2}, & \text{если}\begin{cases} r_1+\dfrac{1}{q_1}-\dfrac{1}{p_1}=r_2+\dfrac{1}{q_2}-\dfrac{1}{p_2},\quad \theta_j>q_j,\quad j=1,2;\\ \theta_1\leqslant q_1,\quad \theta_2>q_2.\end{cases}\end{cases}$$

Доказательство. М.К. Потаповым [20] доказано, что если $f\in L_{\overline{p}}(I^2)$, $1<p_j<q_j<+\infty$, $j=1,2$, то

$$\|f\|_{\overline{q}} \leqslant C(p,q)\left\{\sum_{s_2=1}^{\infty}2^{s_2q_2(1/p_2-1/q_2)}\left[\sum_{s_1=1}^{\infty}2^{s_1q_1(1/p_1-1/q_1)}\,\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{p}}^{q_1}\right]^{q_2/q_1}\right\}^{1/q_2}.$$

Так как $r_j > 1/p_j - 1/q_j$, $j = 1, 2$, то из приведенного утверждения следует, что $B^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}} \subset L_{\overline{q}}(I^2)$. Пусть $f \in B^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}}$. Тогда, применяя к функции $f - S^{\overline{\gamma}}_n(f) \in L_{\overline{q}}(I^2)$ теорему М.К. Потапова, имеем

$$\left\|f - S^{\overline{\gamma}}_n(f)\right\|_{\overline{q}} \leqslant C(p,q) \left\{ \sum_{s_2 \leqslant n} 2^{s_2 q_2 (1/p_2 - 1/q_2)} \times \right.$$
$$\times \left[\sum_{s_1 > n - s_2} 2^{s_1 q_1 (1/p_1 - 1/q_1)} \left\|\delta_{\overline{s}}(f)\right\|^{q_1}_{\overline{p}} \right]^{q_2/q_1} +$$
$$\left. + \sum_{s_2 \geqslant n} 2^{s_2 q_2 (1/p_2 - 1/q_2)} \left[\sum_{s_1 > 0} 2^{s_1 q_1 (1/p_1 - 1/q_1)} \left\|\delta_{\overline{s}}(f)\right\|^{q_1}_{\overline{p}} \right]^{q_2/q_1} \right\}^{1/q_2}. \quad (14)$$

Если $\theta_j \leqslant q_j$, $j = 1, 2$, то применяя неравенство Иенсена и учитывая то, что $r_j > 1/p_j - 1/q_j$, получим

$$I_1(n) = \left\{ \sum_{s_2 \leqslant n} 2^{s_2 q_2 (1/p_2 - 1/q_2)} \left[\sum_{s_1 > n - s_2} 2^{s_1 q_1 (1/p_1 - 1/q_1)} \left\|\delta_{\overline{s}}(f)\right\|^{q_1}_{\overline{p}} \right]^{q_2/q_1} \right\}^{1/q_2} \leqslant$$
$$\leqslant \left\{ \sum_{s_2 \leqslant n} 2^{s_2 \theta_2 (1/p_2 - 1/q_2)} \left[\sum_{s_1 > n - s_2} 2^{s_1 \theta_1 (1/p_1 - 1/q_1)} \left\|\delta_{\overline{s}}(f)\right\|^{\theta_1}_{\overline{p}} \right]^{\theta_2/\theta_1} \right\}^{1/\theta_2} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{-n(r_1 + 1/q_1 - 1/p_1)} \left\{ \sum_{s_2 \leqslant n} 2^{s_2 r_2 \theta_2} \cdot 2^{s_2 \theta_2 (r_1 + 1/q_1 - 1/p_1 - r_2 + 1/p_2 - 1/q_2)} \times \right.$$
$$\left. \times \left[\sum_{s_1 > n - s_2} 2^{s_1 r_1 \theta_1} \left\|\delta_{\overline{s}}(f)\right\|^{\theta_1}_{\overline{p}} \right]^{\theta_2/\theta_1} \right\}^{1/\theta_2}. \quad (15)$$

Если $r_1 + \dfrac{1}{q_1} - \dfrac{1}{p_1} \leqslant r_2 + \dfrac{1}{q_2} - \dfrac{1}{p_2}$, то $2^{s_2 \theta_2 (r_1 + 1/q_1 - 1/p_1 - r_2 + 1/p_2 - 1/q_2)} \leqslant 1$. Если же $r_1 + \dfrac{1}{q_1} - \dfrac{1}{p_1} > r_2 + \dfrac{1}{q_2} - \dfrac{1}{p_2}$, то $2^{s_2 \theta_2 (r_1 + 1/q_1 - 1/p_1 - r_2 + 1/p_2 - 1/q_2)} \leqslant 2^{n \theta_2 (r_1 + 1/q_1 - 1/p_1 - r_2 + 1/p_2 - 1/q_2)}$ для $s_2 \leqslant n$. Поэтому из (15) получим

$$I_1(n) \leqslant 2^{-n\alpha}, \quad (16)$$

где $\alpha = \min\left\{ r_1 + \dfrac{1}{q_1} - \dfrac{1}{p_1}, r_2 + \dfrac{1}{q_2} - \dfrac{1}{p_2} \right\}$, $\theta_j \leqslant q_j$, $j = 1, 2, \ldots$. Аналогичными рассуждениями можно убедиться в том, что

$$I_2(n) = \left\{ \sum_{s_2 \geqslant n} 2^{s_2 q_2 (1/p_2 - 1/q_2)} \left[\sum_{s_1 > 0} 2^{s_1 q_1 (1/p_1 - 1/q_1)} \left\|\delta_{\overline{s}}(f)\right\|^{q_1}_{\overline{p}} \right]^{q_2/q_1} \right\}^{1/q_2} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{-n\alpha} \left\{ \sum_{s_2 = 1}^{\infty} 2^{s_2 r_2 \theta_2} \left[\sum_{s_1 = 1}^{\infty} 2^{s_1 r_1 \theta_1} \left\|\delta_{\overline{s}}(f)\right\|^{\theta_1}_{\overline{p}} \right]^{\theta_2/\theta_1} \right\}^{1/\theta_2} \quad (17)$$

для $\theta_j \leqslant q_j,\ j=1,2$. Теперь из неравенств (14), (16) и (17) получится оценка

$$E_n^{\overline{\gamma}}(f)_{\overline{q}} \leqslant C(p,q,r)\cdot 2^{-n\alpha} \tag{18}$$

для функции $f \in B^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}}$ в случае $\theta_j \leqslant q_j,\ j=1,2$, где $\alpha = \min\left\{r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1},\right.$ $\left. r_2+\frac{1}{q_2}-\frac{1}{p_2}\right\}$.

Пусть $q_j < \theta_j,\ j=1,2$. Тогда, применяя неравенство Гельдера $\tau_j = \theta_j/q_j$, $\tau_j^{'} = \tau_j/(\tau_j-1)$, получим

$$I_1(n) \leqslant \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{2} 2^{s_j r_j} \left\|\delta_{\overline{s}}(f)\right\|_{\overline{p}} \right\}_{\overline{s}\in Z_+^2} \right\|_{l_{\overline{\theta}}} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{s_2\leqslant n} 2^{s_2(1/p_2-1/q_2-r_2)q_2\tau_2'} \cdot \left[\sum_{s_1>n-s_2} 2^{s_2(1/p_1-1/q_1-r_1)q_1\tau_1'} \right]^{q_2\tau_2^{'}/(q_1\tau_1')} \right\}^{1/(q_2\tau_2')} \leqslant$$

$$\leqslant C(p,q,\theta) \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{2} 2^{s_j r_j} \left\|\delta_{\overline{s}}(f)\right\|_{\overline{p}} \right\}_{\overline{s}\in Z_+^2} \right\|_{l_{\overline{\theta}}} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{s_2\leqslant n} 2^{s_2(r_1+1/q_1-1/p_1-r_2-1/q_2+1/p_2)q_2\tau_2'} \right\}^{1/(q_2\tau_2')} \cdot 2^{-n(r_1+1/q_1-1/p_1)}. \tag{19}$$

Если $r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1} = r_2+\frac{1}{q_2}-\frac{1}{p_2}$, то

$$I_3(n) \leqslant \left\{ \sum_{s_2\leqslant n} 2^{s_2(r_1+1/q_1-1/p_1-r_2-1/q_2+1/p_2)q_2\tau_2^{'}} \right\}^{1/(q_2\tau_2')} \leqslant C(p,q,r)n^{1/(q_2\tau_2')}. \tag{20}$$

Если же $r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1} \neq r_2+\frac{1}{q_2}-\frac{1}{p_2}$, то

$$I_3(n) \leqslant C(p,q,r)2^{-n(r_1+1/q_1-1/p_1-r_2-1/q_2+1/p_2)_+}, \tag{21}$$

где $y_+ = \max\{y,0\}$. Из неравенств (19)–(21) следует, что

$$I_1(n) \leqslant C(p,q,r,\theta)2^{-n\alpha}n^{\beta} \tag{22}$$

в случае $q_j < \theta_j,\ j=1,2$, где $\alpha = \min\left\{r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}, r_2+\frac{1}{q_2}-\frac{1}{p_2}\right\}$ и

$$\beta = \begin{cases} \frac{1}{q_2}-\frac{1}{\theta_2}, & \text{если } r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1} = r_2+\frac{1}{q_2}-\frac{1}{p_2}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Далее, снова применяя неравенство Гельдера с показателями $\tau_j = \theta_j/q_j$, $\tau_j^{'} = \tau_j/\tau_j - 1$, имеем

$$I_2(n) \leqslant C(p,q,r,\theta)2^{-n\alpha} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{2} 2^{s_j r_j} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{p}} \right\}_{\overline{s}\in Z_+^2} \right\|_{l_{\overline{\theta}}}, \tag{23}$$

$\alpha = \min\left\{ r_1 + \dfrac{1}{q_1} - \dfrac{1}{p_1}, r_2 + \dfrac{1}{q_2} - \dfrac{1}{p_2} \right\}$.

Теперь в силу неравенств (22), (23) из (14) для функции $f \in B^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}}$ получим

$$E_n^{\overline{\gamma}}(f)_{\overline{q}} \leqslant C(p,q,r,)2^{-n\alpha}n^{\beta}$$

в случае $q_j < \theta_j$, $j = 1,2$, где α, β определены аналогично, как и в неравенстве (22).

Пусть $\theta_1 \leqslant q_1$, $\theta_2 > q_2$. Тогда, применяя к сумме по индексу s_1 неравенство Йенсена, по s_2 – неравенство Гельдера с $\theta_2/q_2 = \tau_2 > 1$ и учитывая соотношение (20), будем иметь

$$I_1(n) \leqslant C(p,q,r,\theta) \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{2} 2^{s_j r_j} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{p}} \right\}_{\overline{s}\in Z_+^2} \right\|_{l_{\overline{\theta}}} 2^{-n\alpha}n^{\beta}, \tag{24}$$

где α, β определены так же, как и в неравенстве (22). Далее, учитывая неравенства $r_j > \dfrac{1}{p_j} - \dfrac{1}{q_j}$, $j = 1,2$, имеем

$$I_2 \leqslant C(p,q,r,\theta) \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{2} 2^{s_j r_j} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{p}} \right\}_{\overline{s}\in Z_+^2} \right\|_{l_{\overline{\theta}}} 2^{-n\alpha}, \tag{25}$$

где $\alpha = \min\left\{ r_1 + \dfrac{1}{q_1} - \dfrac{1}{p_1}, r_2 + \dfrac{1}{q_2} - \dfrac{1}{p_2} \right\}$, $\theta_1 \leqslant q_1$, $\theta_2 > q_2$. В силу неравенств (24), (25) из (14) следует

$$E_n^{\overline{\gamma}}(f)_{\overline{q}} \leqslant C(p,q,r,)2^{-n\alpha}n^{\beta}$$

в случае $\theta_1 \leqslant q_1$, $\theta_2 > q_2$ для функции $f \in B^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}}$, где числа α, β определены в (22). Этим теорема доказана. □

Отметим, что в случае $p_1 = \cdots = p_m$, $\theta_1 = \cdots = \theta_m$ точные порядки приближения класса Бесова установлены в работах А.С. Романюка [15, 16]. Аналогичная задача в пространствах Лоренца с анизотропной метрикой ранее изучена в [17, 18].

Summary

G.A. Akishev. On degree of approximation function classes in the space Lebesgue with anisotropic norm.

There is the anisotropic space Lebesgue of periodic function in the paper. In the paper is obtained the estimate degree of approximation O.V. Besov's classes in anisotropic space Lebesgue by trigonometric polynomials with harmonics in hyperbolic crosses.

Литература

1. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М., 1977. – 456 с.
2. *Аманов Т.И.* Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. – Алма-ата, 1976. – 224 с.
3. *Бабенко К.И.* О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 132, № 5. – С. 982–985.
4. *Теляковский С.А.* Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами // Матем. сб. – 1964. – Т. 63. – С. 426–444.
5. *Митягин Б.С.* Приближение функций в пространствах L^p и C на торе // Матем. сб. – 1962. – Т. 58, № 3. – С. 397–414.
6. *Бугров Я.С.* Приближение классов функций с доминирующей смешанной производной // Матем. сб. – 1964. – Т. 64. – С. 410–418.
7. *Никольская Н.С.* Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p // Сиб. матем. журн. – 1974. – Т. 15, № 2. – С. 395–412.
8. *Галеев Э.М.* Приближение суммами Фурье классов функций с несколькими ограниченными производными // Матем. заметки. – 1978. – Т. 23, № 2. – С. 197–212.
9. *Галеев Э.М.* Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных W_p^r и H_p^r в пространстве L_q // Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 1985. – Т. 49, № 5. – С. 916–934.
10. *Темляков В.Н.* Приближение периодических функций нескольких переменных с ограниченной смешанной разностью // Матем. сб. – 1980. – Т. 113, № 1. – С. 65–80.
11. *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН СССР. – 1986. – Т. 178. – С. 3–112.
12. *Кашин Б.С., Темляков В.Н.* Об одной норме и аппроксимационных характеристиках классов функций многих переменных // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. – М., 1999. – С. 69–99.
13. *Динь Зунг* Приближение функций многих переменных на торе тригонометрическими полиномами // Матем. сб. – 1986. – Т. 131, № 2. – С. 251–271.
14. *Пустовойтов Н.Н.* Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // Матем. заметки. – 1999. – Т. 65. – С. 107–117.
15. *Романюк А.С.* Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. матем. журн. – 1991. – Т. 43. – С. 1398–1408.
16. *Романюк А.С.* Приближение классов периодических функций многих переменных // Матем. заметки. – 2002. – Т. 71, № 1. – С. 109–121.
17. *Акишев Г.* Оценка порядка приближения классов Бесова тригонометрическими полиномами // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. – 2004. – № 3. – С. 9–16.
18. *Акишев Г.* О приближении функциональных классов в пространствах со смешанной нормой // Матем. журн. – 2005. – Т. 5. – С. 5–15.
19. *Бесов О.В.* Теорема Литльвуда-Пэли для смешанной нормой // Тр. МИАН СССР. – 1984. – Т. 170. – С. 31–36.

20. *Потапов М.К.* Теоремы вложения смешанной метрике // Тр. МИАН СССР. – 1980. – Т. 156. – С. 143–156.

Поступила в редакцию
05.06.06

Акишев Габдолла Акишевич – кандидат физико-математических наук, доцент математического факультета Карагандинского государственного университета им. Е.А. Букетова, Республика Казахстан.

E-mail: *akishev@kargu.krg.kz*