УДК 517.54

ОБ УРАВНЕНИИ ГАХОВА ДЛЯ ОПЕРАТОРА БЕРНАЦКОГО

А.В. Казанцев

Аннотация

Установлена область в плоскости параметров такая, что образ любой звездообразной функции с нулевым корнем уравнения Гахова при отображении оператором Бернацкого, соответствующим параметру области, попадает в класс Гахова, состоящий из функций, для которых такой корень единствен. Показано, что данную область нельзя расширить без потери единственности корня для образа хотя бы одной звездообразной функции. Для образа всего класса звездообразных функций с нулевым корнем вычислен гаховский поперечник и дано эффективное описание множества траекторий выхода из класса Гахова по линиям уровня.

Ключевые слова: оператор Бернацкого, уравнение Гахова, звездообразные функции, класс Гахова, гаховский поперечник.

Введение

В своей посмертно вышедшей статье [1] Мечислав Бернацкий привел многообещающую, но неточную (исправленную в [2]) формулировку основного результата, утверждавшую сохранение класса однолистных функций оператором

$$J[f](z) = \int\limits_0^z \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

Тем самым было положено начало целому направлению в геометрической теории функций, изучающему свойства образов подклассов однолистных функций при отображениях различными операторами (см., например, [3]). В настоящей статье устанавливается область значений параметра, для которых оператор Бернацкого (см. ниже формулу (1)) переводит класс звездообразных функций с нулевым корнем уравнения Гахова в класс функций с единственным корнем такого уравнения. Данный результат обобщается в соответствии с постановкой из работы [4]; при этом корректируется одно важное утверждение из [4], на котором основано указанное обобщение.

Приведем необходимые определения, в целом следуя статьям [3, 5].

Пусть H – класс всех функций f, голоморфных в $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$; в классе $A = \{f \in H : f(0) = f'(0) - 1 = 0\}$ выделим два следующих подкласса: класс H_0 функций $f \in A$, локально однолистных в $\mathbb{D}$, то есть таких, что $f'(z) \neq 0$ при всех $z \in \mathbb{D}$, и класс A_0 функций $f \in A$, удовлетворяющих условию $f(z) \neq 0$ при всех $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$.

Пусть $c \in \mathbb{C}$. Оператором Бернацкого мы называем интегральный оператор

$$J_c[f](z) = \int\limits_0^z \left(\frac{f(t)}{t}\right)^c dt, \tag{1}$$

задаваемый на A_0, где $w^c = e^{c\ln w}$ при $w \neq 0$, и ветвь логарифма выбирается так, что $\ln 1 = 0$. При $c = 1$ оператор (1) превращается в классический интеграл Бернацкого из [1]. Отображение $J_1 : A_0 \to H_0$ есть биекция, обратное к J_1 представляет собой известное преобразование Александера $J_1^{-1}[u](z) = zu'(z)$ [6].

Как правило, вместе с (1) рассматривается интегральное преобразование

$$I_c[g](z) = \int\limits_0^z (g'(t))^c\,dt,$$

которое представляет собой произведение числа c на функцию g в смысле Хорнича [7]. Ставшее уже классическим соотношение $J_1(S^*) = S^0$ с помощью суперпозиции $J_c = I_c \circ J_1$ влечет за собой равенство

$$J_c(S^*) = I_c(S^0), \quad c \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Здесь S^0 и S^* – подклассы A, состоящие соответственно из всех выпуклых и звездообразных в $\mathbb{D}$ функций.

Для семейства операторов $X_c : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$, $c \in \mathbb{C}$, будем использовать обозначение $[\mathcal{M}, \mathcal{N}]_X = \{c \in \mathbb{C} : X_c(\mathcal{M}) \subset \mathcal{N}\}$, где $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}$, $\mathcal{N} \subset \mathcal{R}$ (см., например, [3]). Из (2) следует, что для любого $\mathcal{N} \subset H_0$ имеет место равенство $[S^*, \mathcal{N}]_J = [S^0, \mathcal{N}]_I$.

В статье [8] показано, что для S^* и класса $S \subset A$ однолистных в $\mathbb{D}$ функций множество $[S^*, S]_J$ совпадает с объединением круга $\overline{\mathbb{D}}_{1/2} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1/2\}$ и отрезка $[1/2, 3/2]$ (см. также [9] и [5]). В настоящей работе (разд. 1 и 2) будет установлено равенство $[\widetilde{S}^*, \widetilde{\mathcal{G}}_1]_J = \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$ для $\widetilde{S}^* = S^* \bigcap \{f \in H_0 : f''(0) = 0\}$ и класса Гахова $\widetilde{\mathcal{G}}_1$, состоящего из всех функций $f \in H_0$, для которых уравнение Гахова

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{2\bar{z}}{1 - |z|^2} \tag{3}$$

будет иметь единственный корень в точке $z = 0$, являющийся максимумом гиперболической производной (конформного радиуса)

$$h_f(z) = (1 - |z|^2)|f'(z)| \tag{4}$$

функции f. По поводу связи корней (3) с экстремумами (4) см., например, [10, 11].

Наряду с классом $\widetilde{\mathcal{G}}_1$ будем рассматривать класс $\widetilde{\mathcal{G}}_s$, состоящий из всех функций $f \in H_0$, для которых уравнение (3) имеет единственный корень в точке $z = 0$, являющийся седлом или полуседлом функции (4). Определения классов Гахова даны, например, в [4] (см. также разд. 4 настоящей работы); геометрия корней уравнения Гахова исследована в [12]. Тильдой обозначается добавление условия $f''(0) = 0$; таким образом, если X – подкласс H_0, то $\widetilde{X} = \{f \in X : f''(0) = 0\}$; $\widetilde{\mathcal{G}} = \widetilde{\mathcal{G}}_1 \bigcup \widetilde{\mathcal{G}}_s$.

Далее нам понадобятся несколько определений и вспомогательных утверждений, связанных с классами Гахова (см., например, [4]). Через $\mathcal{V}$ обозначим класс функций $\varphi(z) = \alpha z^2 + \dots \in H$ с условием $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Для произвольной функции $f \in H_0$ рассмотрим множество M_f корней уравнения (3) в $\mathbb{D}$ и число k_f таких корней. Использование линий уровня $f_r(z) = f(rz)/r$, $0 \leq r \leq 1$, функции f позволяет ввести для нее слоение $\mathfrak{R}_f[0,1] = \bigcup\limits_{r\in[0,1]} M_{f_r} \times \{r\}$ и функционал

$$\bar{r}_f = \sup\,\{\xi \in [0,1] : r \in [0,\xi] \Longrightarrow k_{f_r} = 1\}. \tag{5}$$

Положим $\{f, z\} = (f''/f')'(z) - (f''/f')^2(z)/2$. Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Если* $\varphi(z) = \gamma z^2 + \dots \in \mathcal{V}$, *то* $|\gamma| \leq 1$. *Равенство имеет место только в случае, когда* $\varphi(z) = \varepsilon z^2$, $|\varepsilon| = 1$.

Лемма 2. *Для любой функции* $f \in H_0$ *слоение* $\mathfrak{R}_f[0,1]$ *не имеет предельных точек на* $\partial\mathbb{D} \times (0,1)$.

Лемма 3. *Если* $f \in \widetilde{H}_0$, *то* $\{0\} \times [0,1] \subset \mathfrak{R}_f[0,1]$. *Если, кроме того,* $|\{f,0\}| > 2$, $\rho := \sqrt{2/|\{f,0\}|}$, *то 1)* $z = 0$ *– точка максимума функции* h_{f_r} *при* $r < \rho$; *2)* $(0,r)$ *– точка бифуркации слоения* $\mathfrak{R}_f[0,1]$ *тогда и только тогда, когда* $r = \rho$; *3) если* $k_{f_r} = 1$ *при* $r < \rho$, *то* $\bar{r}_f = \rho$; *4) если* $\bar{r}_f = s$ *и* $M_{f_s} = \{0\}$, *то* $s = \rho$ *и неравенство* $k_{f_r} > 1$ *при* $r > \rho$ *вблизи* ρ *выполняется за счет бифуркации типа* Ψ *слоения* $\mathfrak{R}_f[0,1]$ *в точке* $(0,\rho)$.

Напомним, что бифуркация слоения $\mathfrak{R}_f[0,1]$ в точке $(0,\rho)$ имеет тип Ψ, если максимум в нуле при $r = \rho$ с дальнейшим ростом r переходит в седло с ответвлением двух максимумов. Отметим, что утверждение 3) леммы 3 имеет место, даже если $k_{f_\rho} > 1$. Для обоснования утверждения 4) леммы 3 существенно выполнение неравенства $\bar{r}_f < 1$, а также утверждения леммы 2.

На введении функционала (5) основана следующая постановка из [4], развивающая концепцию неулучшаемости условий единственности корня уравнения (3). Задавая подкласс $X \subset H_0$ с $\widetilde{X} \neq \varnothing$, требуется вычислить *гаховский поперечник* $\rho(\widetilde{X}) = \inf\{\bar{r}_f : f \in \widetilde{X}\}$ класса $\widetilde{X}$ и дать эффективное описание *экстремального множества* $E(\widetilde{X}) = \{f \in \widetilde{X} : \bar{r}_f = \rho(\widetilde{X})\}$. В разд. 3 установлено расширение основного результата разд. 1, организуемое указанной постановкой, и скорректирована теорема 1 из [4], обеспечивающая содержательность этой постановки в случае бифуркации Ψ (в нуле).

В разд. 4 исследуется уравнение Гахова для функции Ройстера [13].

1. Основной результат

Теорема 1. *Имеет место соотношение*

$$[\widetilde{S}^*, \widetilde{\mathcal{G}}_1]_J = \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}.$$

Доказательство. Условие $|c| \leq 1$ возникает в результате исследования единственности корня уравнения Гахова для функции

$$u = J_c[f] \tag{6}$$

при $f \in \widetilde{S}^*$. Действительно, в этом случае

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{7}$$

где $\varphi \in \mathcal{V}$, то есть, в частности,

$$|\varphi(z)| \leq |z|^2, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{8}$$

Из (1), (6) и (7) имеем

$$z\frac{u''(z)}{u'(z)} = c\left[z\frac{f'(z)}{f(z)} - 1\right] = \frac{2c\varphi(z)}{1-\varphi(z)}, \quad z \in \mathbb{D},$$

откуда в силу (8) получим

$$\left|z\frac{u''(z)}{u'(z)}\right| \leq \frac{2|c||z|^2}{1-|z|^2} \leq \frac{2|z|^2}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{9}$$

при $|c| \le 1$. Существование точек $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, обращающих в равенство уравнение Гахова для функции u, приводит к равенствам в обеих оценках (9), что, в свою очередь, дает $|c| = 1$, и по лемме Шварца $\varphi(z) = \varepsilon z^2$ и $|\varepsilon| = 1$.

Как известно (например, из [14, с. 12]), если $a \neq 0$ – корень уравнения Гахова для $u(z)$, то $a\overline{\eta}$ – корень уравнения Гахова для $u_\eta(z) = \overline{\eta} u(\eta z)$. Поэтому без ограничения общности отмеченный выше случай равенств в (9) достаточно рассмотреть для значения $\varepsilon = 1$, то есть когда $\varphi(z) = z^2$. Уравнение Гахова при этом упрощается с учетом равенства $|c| = 1$ и преобразуется в уравнение

$$ce^{i2\theta}(1 - \rho^2) = 1 - \rho^2 e^{i2\theta}, \tag{10}$$

где $z = \rho e^{i\theta}$, откуда $\cos 2\theta = 1$. Тогда постулированное выше наличие равенства в уравнении Гахова для $u(z)$ при некоторых $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ обеспечивает существование точек $\rho \in (0, 1)$, обращающих в тождество уравнение (10). Но тогда $c = 1$, и такие ρ заполняют весь интервал $(0, 1)$. В итоге $u(\mathbb{D})$ есть полоса, и уравнение Гахова для u имеет континуум корней.

Мы обосновали соотношение

$$1 \notin [\widetilde{S}^*, \widetilde{\mathcal{G}}_1]_J \tag{11}$$

и включение $[\widetilde{S}^*, \widetilde{\mathcal{G}}_1]_J \supset \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$. Чтобы установить противоположное включение, достаточно показать, что для любого $c \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ найдется функция $\widetilde{f} \in \widetilde{S}^*$, такая что $\widetilde{u} = J_c[\widetilde{f}] \notin \widetilde{\mathcal{G}}_1$. Действительно, последнее утверждение можно переписать в теоретико-множественной форме $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{C} \setminus [\widetilde{S}^*, \widetilde{\mathcal{G}}_1]_J$, эквивалентной включению $[\widetilde{S}^*, \widetilde{\mathcal{G}}_1]_J \subset \overline{\mathbb{D}}$, которое благодаря (11) усиливается до требуемого включения $[\widetilde{S}^*, \widetilde{\mathcal{G}}_1]_J \subset \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$.

Итак, фиксируем произвольное $c \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ и выберем $r \in (0, 1)$ такое что

$$r^2|c| > 1. \tag{12}$$

В качестве $\widetilde{f}$ возьмем r-линию уровня $\widetilde{f} = f_r$ функции $f(z) = z/(1 - z^2)$, то есть $f_r(z) = f(rz)/r$. Обозначив $u := J_c[f]$, легко проверить, что r-линии уровня функций u и f связаны соотношением $u_r = J_c[f_r]$. Теперь осталось показать, что $\widetilde{u} := u_r \notin \widetilde{\mathcal{G}}_1$. Для этого воспользуемся результатами статьи [15]. Начнем с очевидного: функция u_r голоморфна в круге $\mathbb{D}_{1/r} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1/r\}$, содержащем $\overline{\mathbb{D}}$. Отсюда получаются два следствия.

Во-первых, $\widetilde{u}$ – элемент малого класса Блоха $\mathcal{B}_0 = \{f \in H : \lim\limits_{z \to \partial\mathbb{D}} h_f(z) = 0\}$. Во-вторых, в силу локальной однолистности u найдется постоянная $B > 0$ такая, что

$$\left| z \frac{\widetilde{u}''(z)}{\widetilde{u}'(z)} \right| \le B < \frac{2|z|^2}{1 - |z|^2}, \tag{13}$$

причем левое неравенство в (13) выполняется при всех $z \in \mathbb{D}$, правое – только при $\rho < |z| < 1$, где в качестве ρ можно взять $\rho = B^{1/2}(B + 2)^{-1/2}$. Поэтому все корни уравнения Гахова для $\widetilde{u}$ лежат в $\overline{\mathbb{D}}_\rho$, а по теореме 1 из [10] и условию локальной однолистности u число таких корней конечно. Согласно предложению 2 из [15] отсюда следует, что

$$m - s = 1, \tag{14}$$

где m и s – соответственно количество максимумов и седел среди элементов множества $M_{\widetilde{u}}$.

Чтобы воспользоваться формулой М.И. Киндера (14), вычислим модуль шварциана $\{\widetilde{u}, z\} = U'(z) - U^2(z)/2$, $U = \widetilde{u}''/\widetilde{u}'$, функции $\widetilde{u}$ в нуле. Имеем $|\{\widetilde{u}, 0\}| = 2r^2|c| > 2$ в силу (12). Это означает, что $z = 0$ – седловая точка гиперболической производной $h_{\widetilde{u}}$ (см. предложение 1 и сопутствующие формулы в [15]). Тогда из (14) следует $m = 1 + s \geq 2$, поэтому $k_{\widetilde{u}} \geq m + s \geq 3$, то есть $\widetilde{u} \notin \widetilde{\mathcal{G}}_1$.

Теорема 1 доказана. □

2. Семейство $J_c[\mathcal{P}]$ и уточнение основного результата

Доказательство теоремы 1 демонстрирует, что ее можно уточнить за счет выделения случая $c = 1$ и исследования картины разрешимости уравнения Гахова для функций семейства $J_c[\mathcal{P}]$, где

$$\mathcal{P} = \{\bar{\varepsilon} p(\varepsilon z) : |\varepsilon| = 1\} \tag{15}$$

– семейство вращений функции $p(z) = z/(1 - z^2)$.

Выше было отмечено, что если $|\eta| = 1$ и $u_\eta = \bar{\eta} u(\eta z)$, то $M_{u_\eta} = \bar{\eta} M_u$. Кроме того, легко показать, что если $u = J_c[f]$, то $u_\eta = J_c[f_\eta]$. Поэтому без ограничения общности достаточно исследовать уравнение Гахова для функции $F_c = J_c[p]$, которое имеет вид

$$\frac{F_c''(z)}{F_c'(z)} \equiv 2cp(z) = \frac{2\bar{z}}{1 - |z|^2}. \tag{16}$$

2.1. Разрешимость уравнения Гахова для функции F_c. Исследование уравнения (16) при $c = 1$ дает уже отмечавшийся выше результат

$$F_1(z) = s(z) \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{1 + z}{1 - z}, \tag{17}$$

то есть $F_1(\mathbb{D})$ есть полоса, и $M_{F_1} = \mathbb{D} \bigcap \mathbb{R}$. Поэтому всюду далее считаем, что $c \neq 1$.

С помощью представления

$$z = \rho e^{i\theta} \tag{18}$$

в полярных координатах и после отделения нулевого корня ($\rho = 0$) уравнение (16) можно привести к виду

$$c(1 - \rho^2) + \rho^2 = e^{-i2\theta}. \tag{19}$$

Отделяя в (19) вещественную и мнимую части, исключая из них θ и сокращая получившееся уравнение на $1 - \rho^2$, после очевидных преобразований будем иметь

$$\rho^2 = \frac{|c|^2 - 1}{|c - 1|^2}; \tag{20}$$

для данного значения ρ выполняется соотношение

$$1 - \rho^2 = \frac{2(1 - \operatorname{Re} c)}{|c - 1|^2}. \tag{21}$$

Таким образом, при $c \neq 1$ уравнение (16) имеет корни в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ тогда и только тогда, когда

$$|c| > 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{Re} c < 1. \tag{22}$$

При этом из (18)–(21) следует, что

$$M_{F_c} = \{0, z_+(c), z_-(c)\}, \tag{23}$$

где $z = z_{\pm}(c)$ – корни уравнения

$$z^2 = -\frac{|c|^2 - 1}{(c-1)^2}. \tag{24}$$

2.2. Граничное поведение гиперболической производной h_{F_c}. По определению для любой функции $f \in H_0$ множество M_f содержится в открытом круге $\mathbb{D}$. Тем не менее геометрический характер элементов M_f как стационарных точек функции h_f может быть связан с наличием точек ω на окружности $\partial\mathbb{D}$, для которых

$$\alpha := \limsup_{z\to\omega, z\in\mathbb{D}} h_f(z) > 0. \tag{25}$$

Назовем такие точки ω *неблоховскими*, так как они возникают при условии $f \notin \mathcal{B}_0$ или в его важном частном случае $f \notin \mathcal{B}$, где $\mathcal{B} = \{f \in H : \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} h_f(z) < \infty\}$ – известное пространство Блоха.

Примерами отмеченной выше связи между характером стационарных точек h_f и выполнением неравенства (25) для некоторых $\omega \in \partial\mathbb{D}$ могут служить функции f класса $\widetilde{\mathcal{G}}_s$ (см., например, [4]), когда наличие седла или полуседла функции h_f в нуле (единственном элементе M_f) предполагает существование неблоховских точек. Последние также учитываются уравнением Гахова, поскольку порождают особенности гиперболической производной h_f. В интересующем нас случае $f = F_c$ из (19) следует, что уравнение Гахова для функции F_c имеет только два корня над $\partial\mathbb{D} : z = \pm 1$. Установим, при каких c они будут неблоховскими.

Положим $c = a + ib$ и воспользуемся представлением

$$|F'(z)| = \frac{1}{|1-z^2|^a} \exp\left(-b \operatorname{Im} \ln \frac{1}{1-z^2}\right), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{26}$$

а также оценками

$$\operatorname{Im} \ln \frac{1}{1-z^2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{27}$$

где вновь используется ветвь логарифма с условием $\ln 1 = 0$ [16, с. 125–126].

Из (26) и (27) следует, что при $a \le 1$ имеет место неравенство

$$h_{F_c}(z) \le 2^{\max(-a,0)} e^{\pi|b|/2} (1-|z|^2)^{\min(1-a,1)}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

При $a < 1$ это неравенство дает $F_c \in \mathcal{B}_0$, при $a = 1$ – только $F_c \in \mathcal{B}$. Далее, если $a \ge 1$, то

$$h_{F_c}(z) \le \frac{1-|z|^2}{|1-z^2|^a} e^{\pi|b|/2} \to 0 \quad \text{при} \quad z \to \partial\mathbb{D} \setminus \{\pm 1\},$$

а в случае $z = x \in (-1,1)$ из (26) получается соотношение

$$h_{F_c}(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{a-1}}, \quad x \in (-1,1),$$

откуда $\lim\limits_{x\to\pm 1} h_{F_c} = 1$ при $a = 1$ и $\lim\limits_{x\to\pm 1} h_{F_c} = +\infty$ при $a > 1$. Таким образом, в силу (25) точки $z = \pm 1$ являются неблоховскими в точности при $a \ge 1$: $F_c \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_0$, когда $a = 1$, и $F_c \notin \mathcal{B}$, когда $a > 1$.

2.3. Геометрия критических точек h_{F_c}. Как отмечалось выше, $M_{F_1} = \mathbb{D} \bigcap \mathbb{R}$, а при $c \neq 1$ уравнение Гахова для F_c разрешимо в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} c < 1 < |c|$, причем имеют место соотношения (23), (24). Поверхность $\Psi = h_{F_1}(z)$, $w = s(z)$ над полосой $s(\mathbb{D})$ представляет собой параболический цилиндр (см., например, [17]). Чтобы определить геометрический характер точки $0 \in M_{F_c}$ при $c \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, а также точек $z_\pm(c) \in M_{F_c}$ при выполнении условий (22), найдем производную Шварца функции F_c. Имеем

$$\{F_c, z\} = 2c \frac{1 + (1-c)z^2}{(1-z^2)^2}, \quad z \in \mathbb{D}; \tag{28}$$

в частности, $\{F_c, 0\} = 2c$. Последнее равенство позволяет заключить, что в точке $z = 0$ поверхность $\Psi = h_{F_c}(z)$ имеет максимум при $|c| < 1$ и седло при $|c| > 1$ (см. предложение 1 из [15]). Наличие максимума в $z = 0$ при $c \in \partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$ является следствием единственности нулевого корня уравнения Гахова при $c \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$ и принадлежности $F_c \in \mathcal{B}_0$ при $\operatorname{Re} c < 1$.

Геометрический характер поверхности $\Psi = h_{F_c}(z)$ в точках $z = z_\pm(c)$ при выполнении условий (22) устанавливается с помощью равенства

$$|\{F_c, z_\pm(c)\}| = \frac{2}{(1 - |z_\pm(c)|^2)^2} \left[1 - \frac{4(|c|^2 - 1)(1 - \operatorname{Re} c)}{|c||c-1|(|c + |c|^2 - 2| + |c||c-1|)}\right], \tag{29}$$

получаемого из (28) и (24). Из (29) следует, что условия (22) обеспечивают выполнение неравенства $|\{F_c, z\}| < 2/(1 - |z|^2)^2$ при $z = z_\pm(c)$. Это означает [17], что в точках $z = z_\pm(c)$ поверхность $\Psi = h_{F_c}(z)$ имеет локальные максимумы.

Подведем итоги вышесказанному. Справедливо

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{P}$ – семейство* (15). *Тогда $J_1[\mathcal{P}] = \mathcal{S}$, где*

$$\mathcal{S} = \{\bar{\varepsilon} s(\varepsilon z) : |\varepsilon| = 1\}$$

и s – функция, задаваемая (17); *при этом $\mathcal{S} \subset (\widetilde{H}_0 \setminus \widetilde{\mathcal{G}}) \bigcap (\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_0)$.*

Множество $J_c[\mathcal{P}]$ содержится в пересечении $\widetilde{\mathcal{G}}_1 \bigcap \mathcal{B}_0$, если $c \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$, $J_c[\mathcal{P}] \subset \widetilde{\mathcal{G}}_s \bigcap (\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_0)$ при $\operatorname{Re} c = 1$, $c \neq 1$, и $J_c[\mathcal{P}] \subset \widetilde{\mathcal{G}}_s \setminus \mathcal{B}$ при $\operatorname{Re} c > 1$.

Наконец, $J_c[\mathcal{P}] \subset (\widetilde{H}_0 \setminus \widetilde{\mathcal{G}}) \bigcap \mathcal{B}_0$, когда c лежит в области (22). *При этом уравнение Гахова для любой функции из $J_c[\mathcal{P}]$ имеет седло в нуле и два локальных максимума в соответствующих точках вида $z_\pm(c)\bar{\varepsilon}$, где $z_\pm(c)$ – корни уравнения* (24).

Уточнением теоремы 1 служит следующее утверждение.

Теорема 2. *Имеют место соотношения*

$$[\widetilde{S}^* \setminus \mathcal{P}, \widetilde{\mathcal{G}}_1]_J = \overline{\mathbb{D}} \quad \text{и} \quad [\mathcal{P}, \widetilde{\mathcal{G}}_1]_J = \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}. \tag{30}$$

Доказательство. Второе равенство (30) следует из предложения 1, установим справедливость первого.

При обосновании теоремы 1 для любого $c \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ построена такая $\widetilde{f} \in \widetilde{S}^*$, что $J_c[\widetilde{f}] \notin \widetilde{\mathcal{G}}_1$. Из построения функции $\widetilde{f}$ ясно, что семейству $\mathcal{P}$ она не принадлежит. Действуя, как в доказательстве теоремы 1, получим $[\widetilde{S}^* \setminus \mathcal{P}, \widetilde{\mathcal{G}}_1]_J \subset \overline{\mathbb{D}}$. Противоположное включение складывается из двух следующих. Монотонность множества $[X, \widetilde{\mathcal{G}}_1]_J$ по X с помощью теоремы 1 дает $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\} \subset [\widetilde{S}^* \setminus \mathcal{P}, \widetilde{\mathcal{G}}_1]_J$, а включение $1 \in [\widetilde{S}^* \setminus \mathcal{P}, \widetilde{\mathcal{G}}_1]_J$ извлекается из анализа цепочки (9) в обосновании теоремы 1.

Теорема 2 доказана. □

3. Гаховский поперечник и экстремальное множество для $J_c[\widetilde{S}^*]$

Начнем с задачи вычисления $\rho(\widetilde{S}^*)$ и $E(\widetilde{S}^*)$, которую решают два следующих предложения.

Предложение 2. *Если* $f \in \widetilde{S}^*$, *то*

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \le \frac{6|z|}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{31}$$

Отделение начала координат разбивает это неравенство на два: строгое

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| < \frac{6|z|}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}\setminus\{0\}, \tag{32}$$

и нестрогое

$$|\{f,0\}| \le 6. \tag{33}$$

Равенство в (33) *возможно только для* $f \in \mathcal{P}$. *При этом*

$$\sup_{f\in\widetilde{S}^*} = |\{p_\varepsilon, 0\}| = 6, \quad |\varepsilon| = 1. \tag{34}$$

Доказательство. Воспользуемся импликацией

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)} \implies z\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{2z\varphi'(z)}{1-\varphi^2(z)} + \frac{2\varphi(z)}{1-\varphi(z)}, \tag{35}$$

справедливой при всех $z \in \mathbb{D}$ для любой функции $f \in \widetilde{S}^*$ и соответствующей ей функции $\varphi \in \mathcal{V}$. Оценка модуля правой части (35) по теореме Голузина [18] дает

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \le \frac{4|z|^2}{1-|z|^4} + \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \le \frac{6|z|^2}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{36}$$

откуда при $z \ne 0$ следует неравенство (31), которое при $z = 0$ проверяется непосредственно. Правая оценка в (36), очевидно, является строгой при $z \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$, что немедленно приводит к (32). Наконец, из (31) следует неравенство (33): $|\{f,0\}| = \lim\limits_{z\to 0} |(1/z)(f''/f')(z)| \le 6$. Последнее можно получить и на основе представления $\varphi(z) = \gamma z^2 + \cdots$ функции $\varphi \in \mathcal{V}$ из (35), для которой $|\gamma| \le 1$; действительно, $|\{f,0\}| = 6|\gamma| \le 6$. Поэтому равенство в (33) по лемме 1 немедленно дает $\varphi(z) = \varepsilon z^2$, $|\varepsilon| = 1$, откуда $f \in \mathcal{P}$; кроме того, выполняется соотношение (34). □

Замечание 1. Доказательство проведено независимо от [4], где утверждение предложения 2 есть частный случай леммы 5 при $\alpha = 0$.

Замечание 2. Соотношение из левой части (35) задает биекцию $\iota : \mathcal{V} \to \widetilde{S}^* : \varphi \mapsto f$ такую, что если $\varphi(z) = \gamma z^2 + \cdots$, то $f''(z)/f'(z) = 6\gamma z + \cdots$.

Теперь установим следующее

Предложение 3. *Если* $f \in \widetilde{S}^*$, *то* $f \in \widetilde{\mathcal{G}}_1$ *при* $0 \le r \le 1/\sqrt{3}$, *причем постоянную* $1/\sqrt{3}$ *увеличить нельзя, как показывает пример функции* $f = p$. *Более того, имеют место равенства* $\rho(\widetilde{S}^*) = 1/\sqrt{3}$ *и* $E(\widetilde{S}^*) = \mathcal{P}$.

Доказательство. Пусть $f \in \widetilde{S}^*$. Рассмотрим цепочку неравенств

$$\left| z\frac{f_r''(z)}{f_r'(z)} \right| < \frac{6r^2|z|}{1-r^2|z|^2} \le \frac{2|z|}{1-|z|^2/3} < \frac{2|z|}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}. \tag{37}$$

Первое неравенство в (37) имеет место при $r \in [0,1]$ и следует из (32) (достаточно нестрогой версии, получающейся из (31)). Переход ко второму неравенству в (37) ограничивает отрезок изменения r до $[0, 1/\sqrt{3}]$; это позволяет установить последнее неравенство, строгость которого обеспечивает принадлежность $f \in \widetilde{\mathcal{G}}_1$ при $r \in [0, 1/\sqrt{3}]$. Отмеченная в формулировке предложения неулучшаемость постоянной $1/\sqrt{3}$ для функции $f = p$ обоснована в [17] (см. также замечание 3 из [4]).

Мы доказали, что при $0 \le r \le 1/\sqrt{3}$ имеет место равенство $M_{f_r} = \{0\}$, то есть для любой функции $f \in \widetilde{S}^*$ будет $\bar{r}_f \ge 1/\sqrt{3}$. Кроме того, неулучшаемость $1/\sqrt{3}$ для $f = p$ означает, что $\bar{r}_{p_\varepsilon} = 1/\sqrt{3}$, $|\varepsilon| = 1$. Поэтому $\rho(\widetilde{S}^*) = 1/\sqrt{3}$ и $\mathcal{P} \subseteq E(\widetilde{S}^*)$.

Осталось установить включение $E(\widetilde{S}^*) \subseteq \mathcal{P}$. Для этого, обозначив $\rho := \rho(\widetilde{S}^*)$, покажем, что из $f \in \widetilde{S}^*$ и $\bar{r}_f = \rho$ следует $f = p_\varepsilon$ для некоторого ε, $|\varepsilon| = 1$.

Действительно, так как $\bar{r}_f = \rho$ и $k_{f_\rho} = 1$, то $r = \rho$ – предельная точка значений $r > \rho$ с $k_{f_r} > 1$. Значит, найдется последовательность $r_n \to \rho$ $(n \to \infty)$ такая, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ будет выполняться неравенство $r_n > \rho$ и существовать элемент $\xi_n \in M_{f_{r_n}} \setminus \{0\}$. Из построенной таким образом последовательности $(\xi_n, r_n) \in \mathfrak{R}_f[0,1]$ выберем сходящуюся подпоследовательность, так что с сохранением обозначений можно записать $(\xi_n, r_n) \to (\xi_0, \rho) \in \overline{\mathbb{D}} \times (0,1)$. Следовательно, (ξ_0, ρ) – предельная точка слоения $\mathfrak{R}_f[0,1]$, причем по лемме 2 $(\xi_0, \rho) \notin \partial\mathbb{D} \times (0,1)$. Получающееся отсюда включение $\xi_0 \in \mathbb{D}$ обусловливает корректность предельного перехода при $n \to \infty$ в следующей импликации

$$r_n \frac{f''}{f'}(r_n \xi_n) = \frac{2\bar{\xi}_n}{1-|\xi_n|^2} \implies \rho \frac{f''}{f'}(\rho\xi_0) = \frac{2\bar{\xi}_0}{1-|\xi_0|^2},$$

устанавливающей принадлежность $(\xi_0, \rho) \in M_{f_\rho} \times \{\rho\}$, а так как $M_{f_\rho} = \{0\}$, то $\xi_0 = 0$.

Итак, имеются две различные последовательности, $(0, r_n) \ne (\xi_n, r_n)$, из $\mathfrak{R}_f[0,1]$, сходящиеся к точке $(0, \rho)$, которая, таким образом, оказывается точкой бифуркации слоения $\mathfrak{R}_f[0,1]$. Значит, $\rho = \sqrt{2/|\{f,0\}|}$ по лемме 3. Так как $\rho = 1/\sqrt{3}$, то отсюда следует, что $|\{f,0\}| = 2/\rho^2 = 6$, и по предложению 2 окончательно имеем $f \in \mathcal{P}$, то есть $f = p_\varepsilon$ для некоторого ε, $|\varepsilon| = 1$. $\square$

Замечание 3. В работе [4] предложение 3 обосновано как следствие 1 из теоремы 1. В формулировке и доказательстве указанной теоремы в [4] автором допущены досадные неточности, которые, тем не менее, вполне поддаются корректировке. Вариант такой корректировки может быть основан на следующей лемме и уточняется ниже в виде замечания 7.

Лемма 4. *Пусть $B > 0$ – постоянная и пусть $\mathcal{F}$ – любое семейство функций $f \in \widetilde{H}_0$, удовлетворяющих неравенству*

$$(1-|z|^2)\left| \frac{1}{z}\frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \le B, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{38}$$

причем выполняется условие

i) *равенство в* (38) *при $z = 0$ достигается хотя бы на одной функции из $\mathcal{F}$.*

Тогда если $B \le 2$, то $\rho(\mathcal{F}) = 1$ и $E(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, а если $B > 2$, то $\rho(\mathcal{F}) = \sqrt{2/B}$ и $E(\mathcal{F}) = \{f \in \mathcal{F} : |\{f,0\}| = B\}$.

Если при этом семейство $\mathcal{F}$ является взаимно-однозначным образом класса $\mathcal{V}$ при отображении $\iota : \varphi \mapsto f$, задаваемом подчиненностью вида $\Phi(z; f(z)) \prec F(z)$, $z \in \mathbb{D}$, так, что $f''(z)/f'(z) = B\gamma z + \cdots$ при $\varphi(z) = \gamma z^2 + \ldots$, то в случае $B > 2$ имеет место соотношение $E(\mathcal{F}) = \{\iota(\varepsilon z^2) : |\varepsilon| = 1\}$.

Доказательство. Перепишем (38) для линий уровня. При $B < 2$ имеем

$$\left|\frac{f_r''(z)}{f_r'(z)}\right| < \frac{2r^2|z|}{1 - r^2|z|^2} \le \frac{2|z|}{1 - |z|^2}, \quad z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}, \tag{39}$$

для всех $r \in [0,1]$. При $B \ge 2$ из (38) следуют неравенства

$$\left|\frac{f_r''(z)}{f_r'(z)}\right| \le \frac{Br^2|z|}{1 - r^2|z|^2} < \frac{Br^2|z|}{1 - |z|^2}; \tag{40}$$

первое из них выполняется для $r \in [0,1]$ и $z \in \mathbb{D}$, второе – для $r \in [0,1)$ и $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$.

В случае $B < 2$ выполнение соотношений (39) означает, что для любого $r \in$ $\in [0,1]$ имеет место равенство $M_{f_r} = \{0\}$, то есть $k_{f_r} = 1$. Отсюда $\bar{r}_f = 1$ для любой $f \in \mathcal{F}$, поэтому $\rho(\mathcal{F}) = 1$ и, таким образом, $E(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

Если же $B = 2$, то соотношения $\rho(\mathcal{F}) = 1$, $E(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ получаются уже из неравенств (40), обеспечивающих выполнение равенства $k_{f_r} = 1$ при $r \in [0,1)$.

Пусть теперь $B > 2$. Тогда при $0 \le r \le \sqrt{2/B}$ итоговое неравенство в (40) влечет за собой неравенство

$$\left|\frac{f_r''(z)}{f_r'(z)}\right| < \frac{2|z|}{1 - |z|^2}, \quad z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}.$$

Значит, в этом случае

$$k_{f_r} = 1 \quad \text{при} \quad r \in [0, \sqrt{2/B}] \quad \text{и} \quad f \in \mathcal{F}, \tag{41}$$

откуда

$$\bar{r}_f \ge \sqrt{2/B} \quad \text{при} \quad f \in \mathcal{F}, \tag{42}$$

Далее, неравенство (38) при $z = 0$ приобретает вид $|\{f, 0\}| \le B$. По условию i) существует функция $g \in \mathcal{F}$ такая, что $|\{g, 0\}| = B$. Обозначим $\rho := \sqrt{2/B}$. Воспользуемся леммой 3. Согласно утверждению 2) этой леммы точка $(0, \rho)$ есть точка бифуркации слоения $\mathfrak{R}_g[0,1]$. Так как в силу (41) равенство $k_{g_r} = 1$ выполняется при $0 \le r \le \rho$, то из утверждения 3) леммы 3 вытекает равенство

$$\bar{r}_g = \rho, \tag{43}$$

а по утверждению 4) бифуркация в точке $(0, \rho)$ имеет тип Ψ.

Только что доказанная импликация $g \in \mathcal{F}$, $|\{g, 0\}| = B \Rightarrow \bar{r}_g = \rho$ по существу обосновывает включение

$$\{f \in \mathcal{F} : |\{f, 0\}| = B\} \subset E(\mathcal{F}) \tag{44}$$

и влечет за собой $g \in E(\mathcal{F})$, откуда $E(\mathcal{F}) \ne \varnothing$. Кроме того, соотношения (42) и (43) устанавливают равенство $\rho(\mathcal{F}) = \sqrt{2/B}$. Покажем справедливость включения, противоположного (44).

Пусть $f \in E(\mathcal{F})$. Тогда

$$\bar{r}_f = \sqrt{2/B}. \tag{45}$$

Из (41) следует, что $M_{f_{\sqrt{2/B}}} = \{0\}$. Согласно утверждению 4) леммы 3 отсюда следует, что
$$\bar{r}_f = \sqrt{2/|\{f,0\}|}. \tag{46}$$
Равенства (45) и (46) немедленно дают $|\{f,0\}| = B$, и включение (44) на самом деле оказывается равенством.

Последнее утверждение настоящей леммы – простое следствие леммы 1. Действительно, если $f = \iota(\varphi) \in E(\mathcal{F})$, где $\varphi(z) = \gamma z^2 + \cdots \in \mathcal{V}$, то согласно доказанному выше имеем $|\{f,0\}| = B$, а по условию леммы 4 будет $|\{f,0\}| = B|\gamma|$. Но тогда $|\gamma| = 1$, и по лемме 1 $\varphi(z) = \varepsilon z^2$ и $f(z) = \iota(\varepsilon z^2)$, $|\varepsilon| = 1$.

Лемма 4 доказана. □

Замечание 4. Если $g \in \mathcal{F}$ – функция из условия i) леммы 4, то данному условию будет удовлетворять и любая функция вида $g_\varepsilon(z) = \bar{\varepsilon} g(\varepsilon z)$: $|\{g_\varepsilon, 0\}| = B$.

Семейство $\mathcal{F} \subset H$ будем называть *компактным*, если для любой последовательности $f_n \in \mathcal{F}$ с равномерной сходимостью $f_n \rightrightarrows f$ внутри $\mathbb{D}$ и условием $f(\mathbb{D}) \not\ni \infty$ предельная функция f принадлежит $\mathcal{F}$ (ср. с [19, с. 7]; условие конечности f добавлено из [20, гл. I, § 1]).

Замечание 5. Класс H_0 (как и $\widetilde{H}_0$) является компактным семейством в смысле приведенного определения. Действительно, пусть $f_n \in H_0$, $n \geq 1$, и $f_n \rightrightarrows f$ внутри $\mathbb{D}$, причем f конечна в $\mathbb{D}$. Тогда по теореме 1 [20, с. 17] выполняются условия $f \in A$ и $f_n' \rightrightarrows f'$ внутри $\mathbb{D}$, а по теореме 2 [20, с. 19] производная f' не равна нулю ни в одной точке $\mathbb{D}$, поскольку тем же свойством обладают и производные f_n', $n \geq 1$. В итоге $f \in H_0$, что и требовалось доказать.

Справедливо

Следствие 1. *Заключение леммы* 4 *останется справедливым, если в ней условие* i) *заменить условием компактности семейства* $\mathcal{F}$ *и равенством* $B = \sup\limits_{f\in\mathcal{F}} |\{f,0\}|$.

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что заменяющие условия обеспечивают существование функции $g \in \mathcal{F}$ такой, что $|\{g,0\}| = B$.

Из оценки (38) следует, что для всякой функции $f \in \mathcal{F}$ и любого $\rho \in (0,1)$ имеет место неравенство $|f(z)| \leq \rho/(1-\rho^2)^{B/2}$, $|z| < \rho$. Это означает, что семейство $\mathcal{F}$ равномерно ограничено внутри $\mathbb{D}$.

По определению B как точной верхней грани множества $\{|\{f,0\}| : f \in \mathcal{F}\}$ существует последовательность $f_n \in \mathcal{F}$ такая, что $|\{f_n,0\}| \to B$, $n \to \infty$. Так как данная последовательность равномерно ограничена внутри $\mathbb{D}$, то по принципу сгущения [20] из нее можно выделить подпоследовательность f_{n_k}, равномерно сходящуюся внутри $\mathbb{D}$ к голоморфной, а значит, конечной в $\mathbb{D}$ функции g. Поэтому $|\{g,0\}| = \lim\limits_{k\to\infty} |\{f_{n_k},0\}| = B$, а компактность семейства дает $g \in \mathcal{F}$. □

Замечание 6. Класс $\widetilde{S}^*$ удовлетворяет условиям как леммы 4, так и следствия 1; в обоих случаях $B = 6$.

Замечание 7. Проведенный анализ показывает, что для корректировки теоремы 1 из [4] в ее формулировке достаточно исправить строгое неравенство (5) на нестрогое, распространив его в $\mathbb{D}$, и добавить условие компактности $\mathcal{F}$.

Заключительную часть данного раздела посвятим нахождению гаховского поперечника и экстремального множества для класса $J_c[\widetilde{S}^*]$, когда c пробегает внешность $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ единичного круга.

Теорема 3. *Пусть* $c \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. *Тогда* $\rho(J_c[\widetilde{S}^*]) = 1/\sqrt{|c|}$ *и* $E(\widetilde{S}^*) = J_c[\mathcal{P}]$.

Доказательство. Фиксируем произвольную точку c из $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Тогда в силу первого неравенства (9) для функции $u = J_c[f]$, где f – любая функция класса $\widetilde{S}^*$, имеет место оценка

$$(1 - |z|^2)\left|\frac{1}{z}\frac{u''(z)}{u'(z)}\right| \le 2|c|, \quad z \in \mathbb{D},$$

а в силу представления (28) – соотношение $|\{F_c, 0\}| = 2|c|$ для $F_c = J_c[p]$. Требуемое равенство $\rho(J_c[\widetilde{S}^*]) = 1/\sqrt{|c|}$ получается применением первой части леммы 4, а для нахождения $E(J_c[\widetilde{S}^*])$ потребуется вторая.

Фигурирующая в ней биекция ι представляется в виде суперпозиции $\iota = J_c \circ \lambda$ биекции $\lambda : \mathcal{V} \to \widetilde{S}^* : \varphi \mapsto f$, задаваемой соотношением (7) (см. замечание 2), и оператора Бернацкого, биективность которого основана на выборе однозначной ветви логарифма в определении w^c при $w \ne 0$ (см. (1)). Поэтому с учетом равенств $\iota(\eta^2 z^2) = J_c \circ \lambda(\eta^2 z^2) = J_c[p_\eta]$, $|\eta| = 1$, имеем

$$E(J_c[\widetilde{S}^*]) = \{J_c[p_\eta] : |\eta| = 1\} = J_c[\mathcal{P}]$$

в силу (15).

Теорема 3 доказана. □

4. Функция Ройстера

Функция Ройстера может быть определена как действие $R_\mu = J_{1-\mu}[q]$ оператора Бернацкого на функции $q(z) = z/(1-z)$ и традиционно записывается в форме

$$R_\mu(z) = \frac{1}{\mu}(1 - (1-z)^\mu) = -\frac{1}{\mu}\left[e^{\mu \ln(1-z)} - 1\right],$$

где, как и выше, выбирается ветвь логарифма с $\ln 1 = 0$; функция R_μ однолистна тогда и только тогда, когда $|\mu - 1| \le 1$ или $|\mu + 1| \le 1$ [8, 13]. Аналогом R_μ в классе функций $f \in H_0$ с дополнительной нормировкой $f''(0) = 0$ является функция F_c (см. разд. 2).

Импликация

$$\frac{1-\mu}{1-z} = \frac{2\bar{z}}{1-|z|^2} \implies z = z_\mu \equiv \frac{1-\bar{\mu}}{1+\mu}$$

демонстрирует переход от уравнения Гахова для R_μ к его решению. Таким образом, $z_\mu \in \mathbb{D}$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re}\mu > 0$.

Для формулировки заключительного результата настоящей статьи напомним, что классом (множеством) Гахова называется класс $\mathcal{G} = \{f \in H_0 : k_f \le 1\}$. Данный класс распадается в дизъюнктное объединение трех подклассов – класса $\mathcal{G}_0 = \{f \in H_0 : k_f = 0\}$ и двух классов функций $f \in H_0$ с единственным корнем уравнения (3): для функций класса $\mathcal{G}_1$ соответствующие корни будут максимумами гиперболических производных (4), а для f из $\mathcal{G}_s$ – седлами и полуседлами h_f [4, 14].

Аналогично предложению 1 устанавливается

Предложение 4. *Пусть* $\mathcal{R} = \{\bar{\varepsilon} q(\varepsilon z) : |\varepsilon| = 1\}$ *и* $\mathcal{R}_\mu = J_{1-\mu}[\mathcal{R}]$. *Тогда* $\mathcal{R}_\mu \subset \mathcal{G}$. *При этом* $\mathcal{R}_\mu \subset \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{B}_0$, *если* $\operatorname{Re}\mu > 0$, $\mathcal{R}_\mu \subset \mathcal{G}_0 \cap (\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_0)$ *для* $\operatorname{Re}\mu = 0$ *и* $\mathcal{R}_\mu \subset \mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{B}$, *когда* $\operatorname{Re}\mu < 0$.

Summary

A.V. Kazantsev. On the Gakhov Equation for the Biernacki Operator.

The paper establishes the region in the parameter plane such that the image of any starlike function with the zero root of the Gakhov equation under the mapping by the Biernacki operator corresponding to the parameter of this region is found in the Gakhov class consisting of the functions, for which this root is unique. It is demonstrated that the above region cannot be extended without loss of the uniqueness of the root for the image of at least one starlike function. For the image of the whole class of starlike functions having the zero root, the Gakhov width is calculated and the effective description is given for the set of trajectories of the exit out of the Gakhov class along the level lines.

Keywords: Biernacki operator, Gakhov equation, starlike functions, Gakhov class, Gakhov width.

Литература

1. *Biernacki M.* Sur l'integrale des fonctions univalentes // Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Math., Astron. et Phys. – 1960. – V. 8, No 1.– P. 29–34.
2. *Похилевич В.А.* Об одной теореме М. Бернацкого в теории однолистных функций // Укр. матем. журн. – 1965. – Т. 17, № 4. – С. 63–71.
3. *Kim Y.C., Sugawa T.* On power deformations of univalent functions // Monatsh. Math. – 2012. – V. 167, No 2. – P. 231–240.
4. *Казанцев А.В.* О выходе из множества Гахова, контролируемом условиями подчиненности // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2014. – Т. 156, кн. 1. – С. 31–43.
5. *Kim Y.C., Ponnusamy S., Sugawa T.* Mapping properties of nonlinear integral operators and pre-Schwarzian derivatives // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – V. 299, No 2. – P. 433–447.
6. *Alexander J.W.* Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions // Ann. of Math. (2). – 1915. – V. 17, No 1. – P. 12–22.
7. *Hornich H.* Ein Banachraum analytischer Funktionen in Zusammenhang mit den schlichten Funktionen // Monatsh. Math. – 1969. – Bd. 73. – S. 36–45.
8. *Аксентьев Л.А., Нежметдинов И.Р.* Достаточные условия однолистности некоторых интегральных представлений // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1982. – Вып. 18. – С. 3–11.
9. *Merkes E.P.* Univalence of an integral transform // Contemp. Math. – 1985. – V 38. – P. 113–119.
10. *Ruscheweyh St., Wirths K.-J.* On extreme Bloch functions with prescribed critical points // Math. Z. – 1982. – Bd. 180, H. 1. – S. 91–105.
11. *Аксентьев Л.А.* Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области // Изв. вузов. Матем. – 1984. – № 2. – С. 3–11.
12. *Киндер М.И.* Исследование уравнения Ф.Д. Гахова в случае многосвязных областей // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1985. – Вып. 22. – С. 104–116.
13. *Royster W.C.* On the univalence of a certain integral // Michigan Math. J. – 1965. – V. 12, No 4. – P. 385–387.
14. *Казанцев А.В.* Четыре этюда на тему Ф.Д. Гахова: учеб. пособие. – Йошкар-Ола: Мар. гос. ун-т, 2012. – 64 с.

15. *Казанцев А.В.* Бифуркации и новые условия единственности критических точек гиперболических производных // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2011. – Т. 153, кн. 1. – С. 180–194.

16. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1965. – 716 с.

17. *Казанцев А.В.* Экстремальные свойства внутренних радиусов и их приложения: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1990. – 145 с.

18. *Голузин Г.М.* Оценка производной для функций, регулярных и ограниченных в круге // Матем. сб. – 1945.– Т. 16, № 3. – С. 295–306.

19. *Duren P.L.* Univalent functions. – N. Y.: Springer-Verlag, 1983. – xiv + 383 p.

20. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

Поступила в редакцию
26.03.15

Казанцев Андрей Витальевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *kazandrey0363@rambler.ru*