25 апреля 2020 г.

А.В. Лапин. Эквивалентные нормы

Научно-популярная статья

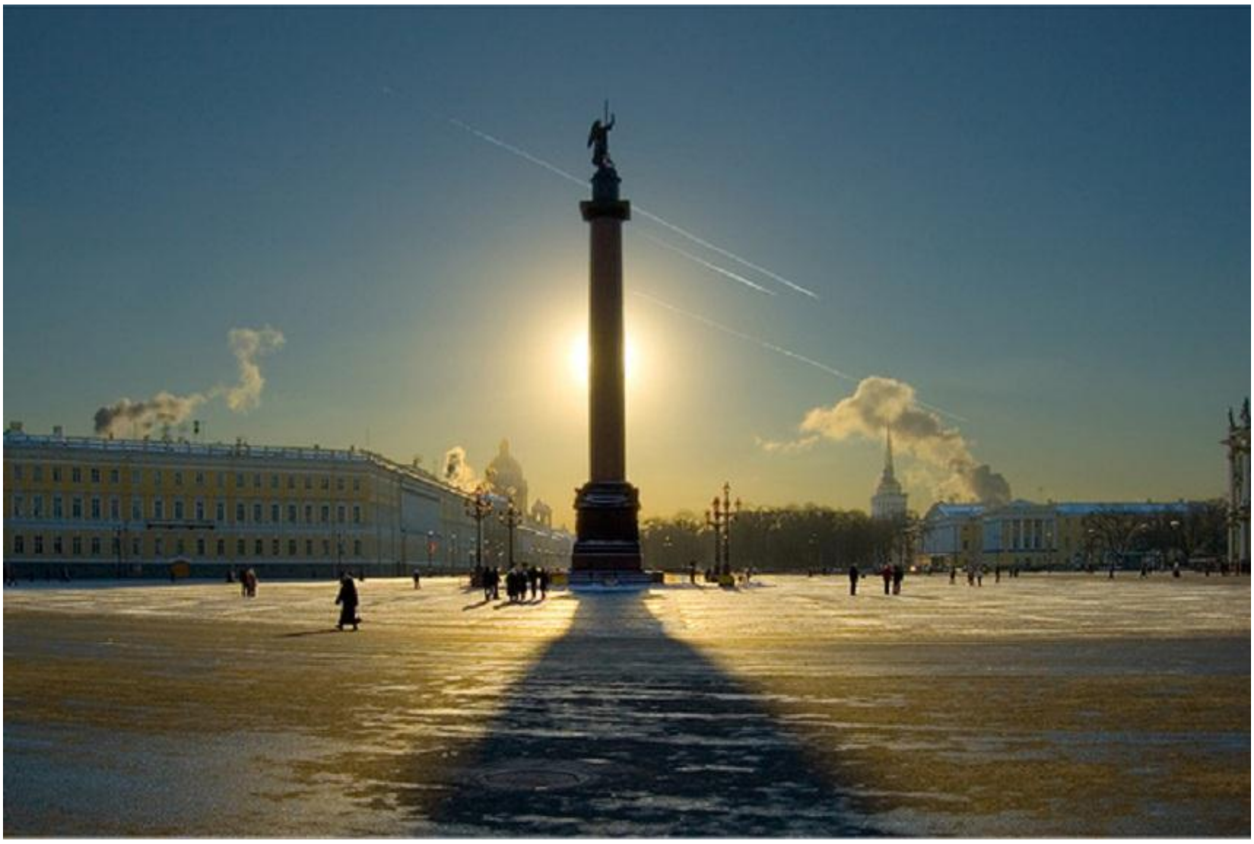

Фото: [Александрийский столп]

Для КМС ИВМиИТ подготовил Казанцев А.В.

Эквивалентность норм – едва ли не самая важная тема всей Российской истории. Потому, что это – тема справедливости. Норма выработки, лимит, норматив, тариф, ставка, талон, пайка, ... – в этом далеко не полном перечне образов каждый соотечественник найдет для себя что-то знакомое... И не важно, как зовут этого соотечественника – Алексей Григорьевич Стаханов или Иван Денисович Шухов. Главное, что эквивалентность норм сопровождает его всю жизнь. А вот чтобы помочь ему правильно сориентироваться в многообразии этих норм, как раз и служит великая наука Математика – поэтому-то она и Царица всех этих наук, и древнейшая из них, и вечно молодая исследовательница непознанного...

Знакомство с эквивалентностью норм происходит обычно в курсе функционального анализа. Вашему вниманию представляется лекция одного из самых блистательных аналитиков России, профессора КФУ Александра Васильевича Лапина.

<u>Эквивалентные нормы характеризуются тем</u>, что такие базовые свойства, как ограниченность, сходимость, компактность, сохраняются при замене нормы некоторого линейного пространства на эквивалентную. Эквивалентные нормы в конечномерном пространстве уже появлялись. Это нормы векторов: евклидова, максимум-норма и т.д.

Две нормы $\|.\|_1$ и $\|.\|_2$ в линейном пространстве X называются эквивалентными, если существуют положительные постоянные m и M такие, что

$$m\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant M\|x\|_1 \;\; \forall x \in X.$$

Далее отношение эквивалентности норм обозначаем $\|.\|_1 \sim \|.\|_2$.

Надо отметить, что в конечномерном пространстве ВСЕ НОРМЫ ЭКВИВАЛЕНТНЫ. Но при этом постоянные эквивалентности МОГУТ ЗАВИСЕТЬ ОТ РАЗМЕРНОСТИ пространства (и, как правило, зависят).

А функциональные пространства, которые используются 'на практике' – они все бесконечномерные. И вот построение (или просто знание) эквивалентных норм очень важно, скажем, в теории дифференциальных и интегральных уравнений. Да и не только в этих науках.

Отметим, что отношение эквивалентности норм транзитивно: если $\|.\|_1 \sim \|.\|_2$ и $\|.\|_2 \sim \|.\|_3$., то $\|.\|_1 \sim \|.\|_3$.

Эквивалентность - это в общем случае отношение, обладающее свойством транзитивности. В нашем случае это означает, что если некая норма 1 эквивалентна норме 2, а норма 2 – норме 3, то и 1 эквивалентна 3. Именно это свойство используется в доказательстве теоремы 2 на стр. 9.[1]

Кроме того, использовано определение конечномерности пространства (а куда без этого денешься?). Раз пространство конечномерное, то у него есть конечный базис, а значит, каждому элементу можно поставить во взаимно-однозначное соответствие вектор коэффициентов разложения по базису.

Теорема 2. *Все нормы в конечномерном линейном пространстве эквивалентны.*

Доказательство. Пусть X – линейное пространство над полем F ($F = \mathbb{R}$ или $F = \mathbb{C}$) размерности n с базисом $\{e_i\}, i = 1, 2 \ldots, n$. Определим на X норму $\|.\|_1$. Далее будем использовать обозначение $\beta_1 = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|_1 > 0$. Возьмем произвольный элемент $x \in X$ и пусть $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots \xi_n e_n, \xi_i \in F$, – его разложение по данному базису. Поставим в соответствие элементу x вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) \in F^n$ пространства F^n с нормой $\|\xi\|_\infty = \max_i |\xi_i|$. Из аксиомы треугольника для норм следует неравенство

$$\|x\|_1 = \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots \xi_n e_n\|_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|_1 \, \|e_i\|_1 \leqslant \beta\|\xi\|_\infty.$$

Докажем теперь неравенства противоположного вида. Для этого определим функцию $f(\xi) = \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots \xi_n e_n\|_1$. Она непрерывна, так как

$$|f(\xi) - f(\eta)| = \big|\|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots \xi_n e_n\|_1 - \|\eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots \eta_n e_n\|_1\big| \leqslant$$
$$\leqslant \|(\xi_1 - \eta_1)e_1 + (\xi_2 - \eta_2)e_2 + \ldots (\xi_n - \eta_n)e_n\|_1 \leqslant \beta_1\|\xi - \eta\|_\infty \;\forall \xi, \eta \in F^n.$$

---

[1] С. 9 – из лекций А.В. Лапина по ФУНКАНу. Теорема 2 приведена с доказательством на этих страницах.

Пусть $S_1 = \{\xi \in F^n : \|\xi\|_\infty = 1\}$ –ограниченное и замкнутое множество в конечномерном пространстве F^n, т.е. компакт. По теореме Вейерштрасса (см. следствие ?? к теореме ?? в параграфе ??) непрерывная функция $f(\xi)$ достигает минимума на S_1:

$$\exists \xi^0 \in S_1 : f(\xi^0) = \min_{\xi \in S_1} f(\xi) = \alpha_1.$$

Число α_1 положительно. Действительно, если допустить, что $\alpha_1 = f(\xi^0) = 0$, то $\|\xi_1^0 e_1 + \xi_2^0 e_2 + \ldots \xi_n^0 e_n\|_1 = 0$, поэтому $\xi_1^0 e_1 + \xi_2^0 e_2 + \ldots \xi_n^0 e_n = 0$ для ненулевого вектора ξ^0. Это противоречит линейной независимости системы $\{e_i\}, i = 1, 2 \ldots, n$.

Пусть теперь ξ – любой ненулевой вектор и $\eta = \left(\frac{\xi_1}{\|\xi\|_\infty}, \frac{\xi_2}{\|\xi\|_\infty}, \ldots \frac{\xi_n}{\|\xi\|_\infty}\right) \in S_1$. Тогда

$$\|x\|_1 = f(\xi) = \|\xi\|_\infty f(\eta) \geqslant \alpha_1 \|\xi\|_\infty.$$

Итак, мы установили, что для любой нормы $\|.\|_1$ в пространстве X справедливы неравенства

$$\alpha_1 \|\xi\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant \beta_1 \|\xi\|_\infty. \tag{3}$$

Для любой другой нормы $\|.\|_2$ в X справедливы аналогичные неравенства:

$$\alpha_2 \|\xi\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta_2 \|\xi\|_\infty \tag{4}$$

с постоянными $\alpha_2 = \min\limits_{\xi \in S_1} \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots \xi_n e_n\|_2 > 0$ и $\beta_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \|e_i\|_2 > 0$. Из неравенств (3) и (4) следует эквивалентность норм $\|.\|_1$ и $\|.\|_2$:

$$\frac{\alpha_2}{\beta_1} \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \frac{\beta_2}{\alpha_1} \|x\|_1 \ \forall x \in X.$$

□

Доказывается, что любая из норм в исходном пространстве эквивалентна максимум-норме вектора, составленного из коэффициентов разложения элемента пространства по базису. Отсюда делается вывод об эквивалентности норм (см. выше)

евклидова норма $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$, максимум-норма $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, норма $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.

Для них справедливы следующие неравенства эквивалентности:

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant n \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|, \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{n} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|.$$

А теперь почитайте, пожалуйста, внимательно **пример 2 на стр.11**.

Здесь есть ряд нюансов, каждый из которых требует особого внимания:

1) Показать, что $X = \{u \in C^1[0,1] : u(0) = 0\}$ – действительно линейное пространство (его можно интерпретировать как совокупность карьерных траекторий с нулевым стартапом – еще одно воплощение равенства стартовых возможностей). То есть продемонстрировать справедливость импликаций $u, v \in X \Rightarrow u + v \in X$ и $\lambda \in \mathbb{R}, u \in X \Rightarrow \lambda u \in X$.

2) Проверить корректную определенность всех встречающихся интегралов.

3) Убедиться в том, что $\|u\|_1$ и $\|u\|_2$ – действительно нормы. Это означает, что нужно проверить аксиомы 1 – 3 из определения нормы в применении к нашему X.

Теперь можно заняться собственно примером 2:

2. Определим линейное пространство $X = \{u \in C^1[0,1]) : u(0) = 0\}$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций, равных нулю в точке 0. Оснастим его нормой

$$\|u\|_1 = \Big(\int_0^1 (u^2(x) + u'^2(x))dx\Big)^{1/2}.$$

Наряду с этим пространством рассмотрим пространство X с нормой

$$\|u\|_2 = \Big(\int_0^1 u'^2(x)dx\Big)^{1/2}.$$

Докажем, что эти нормы эквивалентны. Ясно, что $\|u\|_2 \leqslant \|u\|_1$, поэтому достаточно доказать противоположное неравенство.

В силу условия $u(0) = 0$ справедливо равенство

$$u(x) = \int_0^x u'(t)dt \ \forall x \in [0,1].$$

Возведя обе части этого равенства в квадрат и воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского, получим:

$$u^2(x) = \Big(\int_0^x u'(t)dt\Big)^2 \leqslant x \int_0^1 u'^2(t)dt \leqslant \int_0^1 u'^2(t)dt \ \forall x \in [0,1].$$

Отсюда легко вывести два следующих неравенства:

$$\Big(\int_0^1 u^2(x)dx\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\int_0^1 u'^2(x)dx\Big)^{1/2} \quad \forall u \in X. \tag{5}$$

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |u(x)| \leqslant \Big(\int_0^1 u'^2(x)dx\Big)^{1/2} \quad \forall u \in X. \tag{6}$$

Из неравенства (5) следует $\|u\|_1 \leqslant \sqrt{2}\|u\|_2$.

Сейчас будем решать **пример 6, стр.12**. Там речь идет об эквивалентности (или её отсутствии) стандартной нормы пространства C^1 и норм из примера 4. Кстати, неплохо бы проверить, что в примере 4 определены именно нормы.

6. Какие из норм предыдущего примера эквивалентны исходной норме пространства $C^1[a,b]$: $\|x\| = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| + \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x'(t)|$?

Прежде, чем приступать к решению примера 6, хочу акцентировать внимание на важном факте.

4. Проверить, можно ли в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций использовать в качестве нормы следующие функции:

   (a) $|x(a)| + \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x'(t)|$;

   (b) $\displaystyle\int_a^b |x(t)|\,dt + \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x'(t)|$.

<u>Как в разобранном примере 2, так и в примере 4 нормы включают в себя 'старшие' слагаемые.</u> Обратите внимание, что все нормы примеров 4 и 6 содержат максимум модуля производной. Это и есть старший член. В действительности – это так называемая

полунорма. Она отличается от нормы тем, что не выполнена только часть первой аксиомы: из $\|x\|=0$ не следует, что x – нулевой элемент. В нашем случае – это функция, равная произвольной константе.

Ну так вот. Все нормы содержат старшую полунорму, и это принципиально. Теперь для доказательства эквивалентности норм достаточно оценить сверху 'хвост' каждой нормы через другую. Так было сделано в разобранном примере 2 – доказано неравенство (5). А в другую сторону там доказывать ничего не надо было. Вперед!

Ну ладно. Эквивалентность норм – это наличие постоянных c_1 и c_2 таких, что

$$c_1 \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le c_2 \|x\|_1$$

для всех x из пространства. Отсутствие эквивалентности – это отсутствие какой-либо из постоянных. Если

$$\|x\|_1 \le c\|x\|_2 ,$$

то норма 2 – сильнее нормы 1.

Теперь рассмотрим **пример 9**:

9. Доказать, что на множестве непрерывных на $[a, b]$ функций нормы

$$\| x \|_C = \max_{a\le t\le b} | x(t) | \text{ и } \| x \|_1 = \int_a^b | x(t) | \, dt$$

не эквивалентны.

В примере 9 максимум-норма $\|x\|_C$ сильнее интегральной (докажите!). А вот обратного неравенства с какой-либо фиксированной константой, единой для всех элементов x не существует. Для доказательства этого утверждения построим последовательность функций x_n: x_n равна n на отрезке длины $1/n$ (например, $[a, a+1/n]$) и нулю в остальных точках отрезка:

$$x_n(t) = \begin{cases} n, \, t \in [a, a+1/n], \\ 0, \, t \in (a+1/n, b]. \end{cases}$$

Тогда интеграл от x_n равен 1: $\int_a^b | x_n(t) | \, dt = 1$. А вот максимум равен n и стремится к бесконечности: $\max_{a\le t\le b} | x_n(t) | = n$. Поэтому неравенство

$$\| x_n \|_C \le const \cdot \int_a^b | x_n(t) | \, dt$$

не выполняется ни с какой постоянной.

Еще раз про примеры. В большинстве случаев они не так и сложны. решив хотя бы часть из них, вы поймете материал. Это не механическое заучивание доказательств. Конечно, изучение доказательств полезно для развития мышления, умения выстраивать логические цепочки и пр. Но для понимания материала, который понадобится в дальнейшей вашей учебе, исключительно полезно порешать задачки-примеры. После этого придет 'ощущение понимания'.