КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Д. Н. Тумаков, К. Н. Стехина

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Казань

июнь 2016

УДК 004.9(075.8)

Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

методической комиссии ИВМиИТ
Протокол №3 от 12 ноября 2014 г.

заседания кафедры прикладной математики
Протокол №3 от 13 ноября 2014 г.

Авторы-составители:
канд. физ.-мат. наук, доц. Д. Н. Тумаков,
канд. физ.-мат. наук, доц. К. Н. Стехина

Научный редактор
доктор физ.-мат. наук, проф. Н. Б. Плещинский

Рецензент:
кандидат физ.-мат. наук, доц. ИВМиИТ КФУ Е. В. Рунг

Дифференциальные и интегральные уравнения. Численные методы решения: Учебно-методическое пособие / Д. Н. Тумаков, К. Н. Стехина. — Казань, 2014. — 35 с.

Пособие посвящено методам численного решения начальных и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и интегральных уравнений. Предназначено для магистрантов Института вычислительной математики и информационных технологий Казанского федерального университета, осваивающих курс "Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений".

Оглавление

Введение

Обыкновенные дифференциальные и интегральные уравнения являются математическими моделями для многих прикладных задач, в частности, в таких областях как электродинамика и теория упругости. Решение этих уравнений, как правило, не удается получить аналитически. Поэтому единственная возможность их исследования (или решения) обычно связана с применением численных методов. Учебно-методическое пособие "Дифференциальные и интегральные уравнения. Численные методы решения" ставит целью познакомить читателей с основными подходами к численному решению подобных задач.

Глава 1

Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

1.1 Введение в теорию дифференциальных уравнений

Дифференциальные уравнения (ДУ) – основа математических моделей физических и других явлений и процессов. Основная цель теории ДУ — разработка методов поиска решений дифференциальных уравнений и исследование их свойств. Уравнение называется дифференциальным, если в нем содержатся производные искомых функций или дифференциалы величин, зависимости между которыми нужно найти. Обыкновенное ДУ имеет вид

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

где x – независимая переменная, $y = y(x)$ – искомая функция. Порядок уравнения определяется порядком старшей производной в уравнении. В ДУ с частными производными искомая функция зависит от двух и более независимых переменных. Решением ДУ называют такую функцию $y(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Решить обыкновенное дифференциальное уравнение – значит найти все его решения. Общее решение уравнения (1.1) содержит произвольные постоянные, прим их число совпадает с порядком уравнения: $y = y(x, C_1, \dots, C_n)$. Общее решение может быть и не разрешено явно относительно $y(x)$: $\Phi(x, y(x), C_1, \dots, C_n) = 0$. В этом случае решение принято называть общим интегралом уравнения (1.1). Любое конкретное решение ДУ называют его частным решением. Графики решений ДУ называют интегральными кривыми. Задавая некоторые значения всем произвольным постоянным в общем решении или в общем интеграле, получаем конкретную функцию. Эта функция называется частным решением или частным интегралом уравнения (1.1). Для отыскания значений произвольных постоянных, а следовательно, и частного решения, используются различные дополнительные условия к уравнению (1.1). Например, могут быть заданы так называемые начальные условия при $x = x_0$:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \qquad (1.2)$$

В правых частях начальных условий (1.2) заданы числовые значения функции и производных, причем общее число начальных условий равно числу определяемых произвольных констант. Задача отыскания частного решения уравнения (1.1) по начальным условиям называется задачей Коши. Если же условия заданы на концах некоторого промежутка, то задача называется краевой. Решения таких задач, если они существуют, могут быть найдены точно или приближенно.

Для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка задача Коши – это уравнение $y'(x) = f(x, y(x))$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Уравнение имеет бесконечное число решений. Начальное условие выделяет из всего множества интегральных кривых одну – проходящую через точку с координатами (x_0, y_0). Все приближенные методы решения задачи $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(x_0) = y_0$ делятся на две основные группы: аналитические и численные. В первом случае в качестве приближенного решения рассматривается элемент $y_n(x)$ последовательности функций, сходящейся к точному решению. В численных методах определяются приближенные значения функции $y(x)$ в некоторых заранее выбранных точках.

Для линейного дифференциального уравнения второго порядка краевая задача – это уравнение $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$, с краевыми условиями $\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A$, $\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B$.

В простейшем случае, когда $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, краевые условия задают на концах отрезка только значения функции $y(a)$, $y(b)$. Такие условия называют краевыми условиями первого рода. В этом случае краевая задача называется первой краевой задачей.

В случае, когда $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0$, т.е. на концах отрезка заданы только значения производных. Краевые условия называют условиями второго рода или "мягкими". Последнее название обусловлено тем, что они определяют на концах отрезка всего лишь наклоны интегральных кривых, а не значения функции $y(x)$. В этом случае краевая задача называется второй краевой задачей.

В общем случае, когда α_0 и (или) β_0; α_1 и (или) β_1, не равны нулю, краевые условия называются условиями третьего рода.Тогда краевая задача называется третьей краевой задачей.

Рассмотрим некоторые из численных методов решения задач Коши и краевых задач.

1.2 Метод Эйлера

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ)

$$y' = f(x, y) \tag{1.3}$$

на отрезке $[a, b]$ с граничным условием вида

$$y(x_0) = y_0. \tag{1.4}$$

Необходимо найти значения $y_i = y(x_i)$ в точках $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ (узлах сетки). Пусть $h = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \ldots, n-1$.

Метод Эйлера – простейший алгоритм численного решения задачи Коши для ОДУ. Так как

$$y'(x_i) = f(x_i, y_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h},$$

то общий алгоритм для нахождения значений искомой функции в точках $x_{i+1} = x_i + h$ можно представить в виде

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \cdot h, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Пример. Решить задачу Коши $y'(x) = y(x)$, $y(0) = 1$ на отрезке $[0, 1]$ методом Эйлера.

Построим сетку на заданном отрезке $[0, 1]$. Возьмем, например, шаг разбиения $h = 0,2$. Получим следующие узлы сетки $x_0 = 0$, $x_1 = x_0 + h = 0.2$, $x_2 = x_1 + h = 0.4$, $x_3 = x_2 + h = 0.6$, $x_4 = x_3 + h = 0.8$ и $x_5 = x_4 + h = 1$.

Решение в нулевом узле задано: $y_0 = 1$. Решение в каждом следующем узле сетки будем искать по формуле $y_{i+1} = y_i + y_i \cdot h$.
$x_1 = 0.2$, $y_1 = y_0 + y_0 \cdot h = 1 + 1 \cdot 0.2 = 1.2$;
$x_2 = 0.4$, $y_2 = y_1 + y_1 \cdot h = 1.2 + 1.2 \cdot 0.2 = 1.44$;
$x_3 = 0.6$, $y_3 = y_2 + y_2 \cdot h = 1.44 + 1.44 \cdot 0.2 = 1.728$;
$x_4 = 0.8$, $y_4 = y_3 + y_3 \cdot h = 1.728 + 1.728 \cdot 0.2 = 2.0736$;
$x_5 = 1$, $y_5 = y_4 + y_4 \cdot h = 2.0736 + 2.0736 \cdot 0.2 = 2.48832$.
Таким образом, в каждом узле сетки найдено значение функции.

Задания для самостоятельной работы (шаг $h = 0.01$)
1. $y' = x + y - xy$, $y(0) = 0$, $x \in [0, 1]$.
2. $y' = x^2 y - y + 2$, $y(0) = 2$, $x \in [0, 1]$.
3. $y' = 4x - 2y - 1$, $y(0) = 4$, $x \in [0, 1]$.
4. $y' = -xy^2 + 2$, $y(0) = -1$, $x \in [0, 1]$.
5. $y' = 3x + x^2 - y^2$, $y(0) = 3$, $x \in [0, 1]$.
6. $y' = y + 2y^2$, $y(0) = -1$, $x \in [0, 1]$.
7. $y' = x - x^2 y + 1$, $y(0) = 1$, $x \in [0, 1]$.
8. $y' = x - y + 2$, $y(0) = 0$, $x \in [0, 1]$.
9. $y' = 5x - y^2$, $y(0) = -2$, $x \in [0, 1]$.
10. $y' = 3y + y^3$, $y(0.3) = 0.2$, $x \in [0.3, 1]$.

1.3 Метод Рунге-Кутта

Рассмотрим теперь наиболее распространенный метод решения граничной задачи для ДУ – метод Рунге-Кутта. Идея метода состоит в получении приближения следующего вида:

$$y_{i+1} = y_i + h\varphi(x_i, y_i, h), \tag{1.5}$$

где

$$\varphi(x_i, y_i, h) = \sum_{n=1}^{N} C_n k_n^i, \tag{1.6}$$

$$k_1^i = f(x_i, y_i) \quad k_2^i = f(x_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{21} k_1^i),$$

$$k_3^i = f(x_i + \alpha_3 h, y_i + \beta_{31} k_1^i + \beta_{32} k_2^i),$$

$$k_N^i = f(x_i + \alpha_N h, y_i + \sum_{j=1}^{N-1} \beta_{Nj} k_j^i).$$

Рассмотрим для решения граничной задачи Коши классический метод Рунге-Кутта 4-го порядка:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

где

$$k_1 = f(x_i, y_i), \quad k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2}),$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_2}{2}), \quad k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3).$$

Существует не один, а группа методов Рунге-Кутта, отличающихся друг от друга порядком, т.е. количеством параметров k_n. В данном случае описан метод 4-го порядка, который является одним из наиболее применяемых на практике, так как обеспечивает высокую точность и в то же время отличается сравнительной простотой. Поэтому в большинстве случаев он упоминается в литературе просто как "метод Рунге-Кутта" без указания его порядка.

Пример. Решить задачу Коши $y'(x) = y(x)$, $y(0) = 1$ на отрезке $[0, 1]$ методом Рунге-Кутта.

Построим сетку на заданном отрезке $[0, 1]$. Возьмем, например, шаг разбиения $h = 0.2$. Получим следующие узлы сетки $x_0 = 0$, $x_1 = x_0 + h = 0.2$, $x_2 = x_1 + h = 0.4$, $x_3 = x_2 + h = 0.6$, $x_4 = x_3 + h = 0.8$ и $x_5 = x_4 + h = 1$.

Решение в нулевом узле задано $y_0 = 1$. Решение в каждом следующем узле сетки будем искать по формуле

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

где

$$k_1 = f(x_i, y_i) = y_i, \quad k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2}) = y_i + \frac{hk_1}{2},$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_2}{2}) = y_i + \frac{hk_2}{2}, \quad k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3) = y_i + hk_3.$$

Для первого узла

$x_1 = 0.2$, $k_1 = y_0 = 1$, $k_2 = y_0 + \dfrac{hk_1}{2} = 1 + \dfrac{0.2 \cdot 1}{2} = 1.1$,

$$k_3 = y_0 + \frac{hk_2}{2} = 1 + \frac{0.2 \cdot 1.1}{2} = 1.11,$$

$$k_4 = y_0 + hk_3 = 1 + 0.2 \cdot 1.11 = 1.222,$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1 + \frac{0.2}{6}(1 + 2.2 + 2.22 + 1.222) = 1.2214,$$

Для второго узла

$x_2 = 0.4$, $k_1 = y_1 = 1.2214$, $k_2 = y_1 + \dfrac{hk_1}{2} = 1.2214 + \dfrac{0.2 \cdot 1.2214}{2} = 1.34354$,

$$k_3 = y_1 + \frac{hk_2}{2} = 1.2214 + \frac{0.2 \cdot 1.34354}{2} = 1.355754,$$

$$k_4 = y_1 + hk_3 = 1.2214 + 0.2 \cdot 1.355754 = 1.4925508,$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) =$$

$$= 1.2214 + \frac{0.2}{6}(1.2214 + 2.68708 + 2.711508 + 1.4925508) = 1.49181796.$$

Проведем аналогичные вычисления для оставшихся узлов. Получим

$x_3 = 0.6$, $k_1 = y_2 = 1.49181796$, $k_2 = y_2 + \dfrac{hk_1}{2} = 1.640999756$,

$$k_3 = y_2 + \frac{hk_2}{2} = 1.6559179356, \; k_4 = y_2 + hk_3 = 1.82300154712,$$

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.822106456344;$$

$x_4 = 0.8$, $k_1 = y_3 = 1.822106456344$, $k_2 = y_3 + \dfrac{hk_1}{2} = 2.0043171019784$,

$$k_3 = y_3 + \frac{hk_2}{2} = 2.02253816654184, \; k_4 = y_3 + hk_3 = 2.22661408965237,$$

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 2.22552082577856;$$

$$x_5 = 1, \quad k_1 = y_4 = 2.22552082577856,\ k_2 = y_4 + \frac{hk_1}{2} = 2.44807290835642,$$

$$k_3 = y_4 + \frac{hk_2}{2} = 2.4703281166142,\ k_4 = y_4 + hk_3 = 2.7195864491014,$$

$$y_5 = y_4 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 2.71825113660594.$$

Таким образом, в каждом узле сетки найдено значение функции.

Задания для самостоятельной работы (шаг $h = 0.01$)

1. $y' = 2xy - 1$, $y(0) = -1$, $x \in [0, 1]$.
2. $y' = -x^2 - 4y$, $y(0) = 0$, $x \in [0, 1]$.
3. $y' = \dfrac{y}{1+x}$, $y(0) = 2$, $x \in [0, 1]$.
4. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$, $x \in [0, 0.5]$.
5. $y' = 1 - 2x^2 y$, $y(0) = -2$, $x \in [0, 1]$.
6. $y' = y + x^2$, $y(0) = 1$, $x \in [0, 1]$.
7. $y' = xy - x^2$, $y(0) = 0$, $x \in [0, 1]$.
8. $y' = 4y^2 + 2$, $y(0.2) = -3$, $x \in [0.3, 1]$.
9. $y' = x - x^3$, $y(0) = 3$, $x \in [0, 1]$.
10. $y' = y^2 x - x^3$, $y(0) = 1$, $x \in [0, 1]$.

1.4 Метод пристрелки и метод прогонки

Рассмотрим краевую задачу для ОДУ второго порядка

$$y'' = f(x, y, y') \tag{1.7}$$

с краевыми условиями

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_N) = y_N. \tag{1.8}$$

Если исходное ОДУ – линейное, т.е. имеет вид $y'' = f_1(x)y' + f_2(x)y + f_3(x)$, то для поиска истинного решения достаточно всего двух "прицелочных выстрелов" (для уравнения второго порядка). Действительно, пусть найденные два решения $v(x)$ и $w(x)$ дают v_N и w_N, тогда искомым решением является

$$y(x) = \frac{y_N - w_N}{v_N - w_N} v(x) + \frac{v_N - y_N}{v_N - w_N} w(x).$$

Рассмотрим другой способ решения задачи (1.7), (1.8) – метод прогонки. Суть метода состоит в сведении исходной граничной задачи к системе линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Действительно, для этого достаточно представить вторую производную в виде

$$y''(x_n) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

с шагом h. Получаемая таким образом матрица системы будет трехдиагональной.

Пример. Решить методом прогонки первую краевую задачу $y''(x)+y'(x) = x+1$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1.5$ на отрезке $[0, 1]$.

Разобьем промежуток $[0, 1]$ на n равных частей. Пусть для определенности $n = 5$ и $h = (1 - 0)/5 = 0.2$. Построим сетку узлов с шагом h: $x_i = 0+ih,\ \ i = 0, \ldots, 5$. Решение исходной задачи будем отыскивать в виде таблицы значений в точках сетки $y_i = y(x_i),\ \ i = 0, \ldots, 5$.

Заменяя производные в исходном уравнении конечно-разностными отношениями

$$y' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \qquad y'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

получим

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = x_i + 1.$$

Перегруппируем слагаемые и запишем уравнение в виде

$$A_i y_{i-1} - B_i y_i + C_i y_{i+1} = G_i,\ \ i = 1, \ldots, 4,$$

где

$$A_i = \frac{2-h}{2h^2}, \quad B_i = \frac{2}{h^2}, \quad C_i = \frac{2+h}{2h^2}, \quad G_i = x_i + 1.$$

Далее аналогичным образом необходимо аппроксимировать граничные условия, используя для замены производных разность вперед или назад. В нашем случае производные в граничных условиях отсутствуют и следовательно недостающие (первое и последнее) уравнения системы примут вид

$$y_0 = 1, \qquad y_5 = 1.5.$$

Вычислим и запишем расширенную матрицу системы: $A_0 = 1$, $G_0 = 1$,

$$A_i = \frac{2-0.2}{2\cdot(0.2)^2} = 22.5, \quad B_i = \frac{2}{(0.2)^2} = 50, \quad C_i = \frac{2+0.2}{2\cdot(0.2)^2} = 27.5,$$

$i = 1, \ldots, 4$, так как в нашем случае эти коэффициенты не зависят от i,
$G_1 = x_1 + 1 = 0.2 + 1 = 1.2$, $G_2 = x_2 + 1 = 0.4 + 1 = 1.4$,
$G_3 = x_3 + 1 = 0.6 + 1 = 1.6$, $G_4 = x_4 + 1 = 0.8 + 1 = 1.8$,
$A_5 = 1$, $G_5 = 1.5$.
Таким образом, матрица системы примет вид

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 22.5 & -50 & 27.5 & 0 & 0 & 0 & 1.2 \\ 0 & 22.5 & -50 & 27.5 & 0 & 0 & 1.4 \\ 0 & 0 & 22.5 & -50 & 27.5 & 0 & 1.6 \\ 0 & 0 & 0 & 22.5 & -50 & 27.5 & 1.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1.5 \end{array}\right)$$

Будем искать решение системы в виде $y_i = s_i y_{i+1} + t_i$, $i = 0, \ldots, 4$. Прогоночные коэффициенты s_i, t_i определяются следующим образом: из первого уравнения системы находим s_0, t_0; подставляя y_{i-1} в i-ое уравнение системы, получим рекуррентные формулы

$$s_i = \frac{C_i}{B_i - A_i s_{i-1}}, \qquad t_i = \frac{A_i t_{i-1} - G_i}{B_i - A_i s_{i-1}}, \quad i = 1, \ldots, 5.$$

В нашем случае получим

$$s_0 = 0, \quad t_0 = 1;$$

$$s_1 = \frac{C_1}{B_1 - A_1 s_0} = \frac{27.5}{50 - 22.5 \cdot 0} = 0.55,$$

$$t_1 = \frac{A_1 t_0 - G_1}{B_1 - A_1 s_0} = \frac{22.5 \cdot 1 - 1.2}{50 - 22.5 \cdot 0} = 0.426;$$

$$s_2 = \frac{C_2}{B_2 - A_2 s_1} = \frac{27.5}{50 - 22.5 \cdot 0.55} \approx 0.7309,$$

$$t_2 = \frac{A_2 t_1 - G_2}{B_2 - A_2 s_1} = \frac{22.5 \cdot 0.426 - 1.4}{50 - 22.5 \cdot 0.55} \approx 0.2175;$$

$$s_3 = \frac{C_3}{B_3 - A_3 s_2} = \frac{27.5}{50 - 22.5 \cdot 0.7309} \approx 0.8196,$$

$$t_3 = \frac{A_3 t_2 - G_3}{B_3 - A_3 s_2} = \frac{22.5 \cdot 0.2175 - 1.6}{50 - 22.5 \cdot 0.7309} \approx 0.0982;$$

$$s_4 = \frac{C_4}{B_4 - A_4 s_3} = \frac{27.5}{50 - 22.5 \cdot 0.8196} \approx 0.8714,$$

$$t_4 = \frac{A_4 t_3 - G_4}{B_4 - A_4 s_3} = \frac{22.5 \cdot 0.0982 - 1.8}{50 - 22.5 \cdot 0.8196} \approx 0.0130;$$

$$s_5 = 0, \quad t_5 = 1.5.$$

Выполним обратный ход метода прогонки, т.е. вычислим значения функции y_i по формуле $y_i = s_i y_{i+1} + t_i$, $i = 0, \ldots, 5$, начиная с последнего. Получим

$y_5 = t_5 = 1.5;$

$y_4 = s_4 y_5 + t_4 = 0.8714 \cdot 1.5 + 0.0130 = 1.3201;$

$y_3 = s_3 y_4 + t_3 = 0.8196 \cdot 1.3201 + 0.0982 \approx 1.1802;$

$y_2 = s_2 y_3 + t_2 = 0.7309 \cdot 1.1802 + 0.2175 \approx 1.0801;$

$y_1 = s_1 y_2 + t_1 = 0.55 \cdot 1.0801 + 0.426 \approx 1.0200;$

$y_0 = t_0 = 1.$

Таким образом, в каждом узле сетки найдено значение функции.

Задания для самостоятельной работы (шаг $h = 0.01$)

1. $y'' + 5y' + xy + 1 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(1) + y(1) = 0$.
2. $y'' + 4y' + 2xy + 1 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(1) - y(1) = 0$.
3. $y'' + x^2y' + 2xy = 0$, $y(0) + y'(0) = 0$, $y(1) = 1$.
4. $y'' + 3y' + xy = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = 0$.
5. $y'' + xy' + xy + 3 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(1) - 2y(1) = -1$.
6. $y'' + y' + 3x + 2 = 0$, $y(0) - 2y'(0) = 0$, $y(1) = 1$.
7. $y'' + y' + x^2y + 7 = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.
8. $y'' + 4y' - x - 9 = 0$, $y(1) = 1$, $y(2) = 0$.
9. $y'' + x^2y' - y + 7 = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) - y'(1) = 1$.
10. $y'' - y' + 3xy + 3 = 0$, $y(-1) = -1$, $y(0) = 0$.

Глава 2

Численные методы решения интегральных уравнений

2.1 Классификация интегральных уравнений

Проведем краткую классификацию линейных интегральных уравнений. Интегральным уравнением Фредгольма второго рода называют уравнение вида

$$y(x) - \int\limits_a^b K(x,t)y(t)dt = f(x), \quad a \le x \le b, \tag{2.1}$$

где $y(x)$ – искомая функция, $K(x,t)$ – ядро интегрального уравнения, $f(x)$ – свободный член.

Немногим отличается интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int\limits_a^b K(x,t)y(t)dt = f(x), \quad a \le x \le b, \tag{2.2}$$

здесь отсутствует $y(x)$ как свободное слагаемое. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется однородным, если $f(x) \neq 0$ – неоднородным.

В уравнениях Фредгольма ядро $K(x,t)$ и свободный член $f(x)$ являются либо непрерывными, либо удовлетворяют условиям

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(x,t)|^2 dxdt < +\infty, \quad \int\limits_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

Интегральным уравнением Вольтерра второго и первого родов называется уравнения следующего вида:

$$y(x) - \int_a^x K(x,t)y(t)dt = f(x) \tag{2.3}$$

и

$$\int_a^x K(x,t)y(t)dt = f(x). \tag{2.4}$$

Уравнение Вольтерра можно считать частным случаем уравнения Фредгольма, если определить ядро уравнений (2.3), (2.4) следующим образом:

$$K(x,t) = \begin{cases} K'(x,t) & , \quad t \leq x \quad , \\ 0 & , \quad t > x \quad , \end{cases}$$

где $K'(x,t)$ – некоторая функция. Это позволяет переносить результаты, полученные для уравнения Фредгольма, на уравнения Вольтерра.

2.2 Уравнения Фредгольма второго рода. Теоремы

Запишем интегральное уравнение Фредгольма второго рода в виде

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt = f(x), \quad a \leq x \leq b, \tag{2.5}$$

выделив параметр интегрального уравнения λ.

Число λ называется характеристическим числом или характеристическим значением интегрального уравнения (2.5), если существует нетривиальное решение соответствующего однородного уравнения. Само нетривиальное решение называется собственной функцией интегрального уравнения, соответствующей характеристическому числу λ. Если λ является характеристическим числом,то величина $1/\lambda$ называется собственным числом интегрального уравнения (2.5). Правильным или регулярным значением параметра λ называется такое его значение, при котором однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

Теорема 1 *Уравнение Фредгольма (2.5) имеет не более счетного множества характеристических чисел, которые могут сгущаться только на бесконечности.*

Теорема 2 *Если значение λ правильное, то интегральное уравнение разрешимо при любой $f(x)$ и его решение единственно.*

Теорема 3 *Если значение λ характеристическое, то однородное интегральное уравнение имеет нетривиальное решение.*

Теорема 4 *Для того чтобы неоднородное интегральное уравнение было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы его свободный член $f(x)$ удовлетворял условиям*

$$\int_a^b f(x)\psi_k(x)dx = 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

где $\psi_k(x)$ – совокупность всех линейно независимых решений соответствующего союзного однородного уравнения.

Из теорем Фредгольма следует так называемая альтернатива Фредгольма, которую чаще всего используют при исследовании ИУ.

Альтернатива Фредгольма. Либо неоднородное уравнение разрешимо, какова бы ни была его правая часть, либо соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальные решения.

2.3 Уравнения с вырожденным ядром

Уравнение Фредгольма второго рода с вырожденным ядром имеет вид

$$y(x) - \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} g_k(x)h_k(t)\right] y(t)dt = f(x), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.6}$$

Представим уравнение (2.6) в виде

$$y(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} A_k g_k(x), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.7}$$

где

$$A_k = \int_a^b h_k(t)y(t)dt.$$

Таким образом, решение уравнение (2.6) сводится к определению коэффициентов A_k.

Умножим обе части уравнения (2.7) на $h_m(x)$ и проинтегрируем по x в пределах от a до b. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$A_m - \sum_{k=1}^{n} s_{mk} A_k = f_m, \quad m = 1, \dots, n, \tag{2.8}$$

где

$$s_{mk} = \int_a^b h_m(x) g_k(x) dx, \quad f_m = \int_a^b f(x) h_m(x) dx \quad k, m = 1, \dots, n.$$

Пример. Решить интегральное уравнение

$$y(x) - \int_{-\pi}^{\pi} (x \cos t + \sin x \cdot t^2 + \cos x \cdot \sin t) y(t)\, dt = x, \quad -\pi \le x \le \pi. \tag{2.9}$$

Введем обозначения

$$A_1 = \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos t\, dt, \quad A_2 = \int_{-\pi}^{\pi} y(t) t^2\, dt, \quad A_3 = \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin t\, dt, \tag{2.10}$$

где A_1, A_2, A_3 – неизвестные постоянные. Тогда уравнение (2.9) примет вид

$$y(x) = A_1 x + A_2 \sin x + A_3 \cos x + x. \tag{2.11}$$

Подставим выражение (2.11) в (2.10), получим

$$A_1 = \int_{-\pi}^{\pi} (A_1 t + A_2 \sin t + A_3 \cos t + t) \cos t\, dt,$$

$$A_2 = \int_{-\pi}^{\pi} (A_1 t + A_2 \sin t + A_3 \cos t + t)\, t^2\, dt,$$

$$A_3 = \int_{-\pi}^{\pi} (A_1 t + A_2 \sin t + A_3 \cos t + t) \sin t\, dt.$$

Вычислим интегралы в правых частях и получим

$$\begin{aligned} A_1 - \pi A_3 &= 0, \\ A_2 + 4\pi A_3 &= 0, \\ -2\pi A_1 - \pi A_2 + A_3 &= 2\pi. \end{aligned}$$

Решим полученную систему

$$A_1 = \frac{2\pi^2}{1+2\pi^2}, \quad A_2 = \frac{8\pi^2}{1+2\pi^2}, \quad A_3 = \frac{2\pi}{1+2\pi^2}.$$

Таким образом, подставив полученные значения для A_i в (2.11), получим решение уравнения (2.9)

$$y(x) = \frac{2\pi}{1+2\pi^2}\left(\pi x - 4\pi \sin x + \cos x\right) + x.$$

Задания для самостоятельной работы

1. $y(x) - \int\limits_0^{\pi/2} y(t) \cos x \cos t \, dt = x - \frac{1}{2}(-2+\pi)\cos x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$

2. $y(x) - \int\limits_0^{\pi/2} y(t) \sin x \cos t \, dt = x - \frac{1}{2}(-2+\pi)\sin(x), \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$

3. $y(x) - \int\limits_0^{\pi/2} y(t) \sin x \sin t \, dt = x - \sin x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$

4. $y(x) - \int\limits_0^{\pi/2} y(t) t \cos x \cos t \, dt = x - \frac{1}{4}\left(-8+\pi^2\right)\cos x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$

5. $y(x) - \int\limits_0^{\pi/2} y(t) K(x,t) dt = x - \frac{1}{2}(-2+\pi)\cos x - \sin x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2},$
$K(x,t) = \cos x \cos t + \sin x \sin t.$

6. $y(x) - \int\limits_0^{\pi/2} y(t) K(x,t) dt = x - \frac{\pi^3 x}{24} - \sin x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2},$
$K(x,t) = xt + \sin x \sin t.$

7. $y(x) - \int\limits_{-1}^{1} y(t) K(x,t) dt = x, \quad -1 \le x \le 1,$

$K(x,t) = xt + x^2t^2.$

8. $y(x) - \int\limits_{-1}^{1} y(t)K(x,t)dt = -2 + x - 2x^2, \quad -1 \le x \le 1,$

$K(x,t) = (x+1)t + x^2(t+1).$

9. $y(x) - \int\limits_{0}^{\pi} y(t)K(x,t)dt = 3x - \frac{1}{3}\pi^3 \cos(x), \quad 0 \le x \le \pi,$

$K(x,t) = t\cos x + x\cos t.$

10. $y(x) - \int\limits_{0}^{\pi} y(t)x\cos t\, dt = 2\pi x + x^2, \quad 0 \le x \le \pi.$

2.4 Метод коллокаций

Одним из простейших методов решения ИУ является метод коллокаций. Будем искать приближенное решение уравнения (2.1) в виде функции

$$y_n(x) = G(x, A_1, A_2, \ldots, A_n)$$

со свободными параметрами $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Определим невязку

$$\varepsilon[y_n(x)] = y_n(x) - \int\limits_a^b K(x,t)y_n(t)dt - f(x) \tag{2.12}$$

Выберем

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} A_i\varphi_i(x), \tag{2.13}$$

где $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ – линейно независимые координатные функции. Подставим (2.13) в (2.12), получим

$$\varepsilon[y_n(x)] = \psi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} A_i\psi_i(x), \tag{2.14}$$

где

$$\psi_0(x) = \varphi_0(x) - f(x) - \int\limits_a^b K(x,t)\varphi_0(t)dt,$$

$$\psi_i(x) = \varphi_i(x) - \int\limits_a^b K(x,t)\varphi_i(t)dt, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Потребуем, чтобы невязка обращалась в нуль в заданных точках (точках коллокации) $x_1, x_2, \ldots, x_n$, принадлежащих отрезку $[a, b]$. Таким образом, получим СЛАУ относительно A_i

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \psi_i(x_j) = -\psi_0(x_j), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.15}$$

Отметим, что на практике положение точек коллокаций выбирается часто в центрах отрезков разбиения или в самих узлах разбиения, что не всегда является оптимальным. Поэтому выбор оптимальных точек коллокаций представляет собой отдельную задачу, требующую дополнительных исследований.

Пример. Методом коллокации решить интегральное уравнение

$$y(x) - \int_0^1 \frac{t^2 y(t)}{x^2 + t^2}\, dt = x \arctan \frac{1}{x}, \quad 0 \le x \le 1. \tag{2.16}$$

Положим $y_2(x) = A_1 + A_2 x$. Подставим это выражение в (2.12), получим

$$\varepsilon[y_2(x)] = -A_1 x \arctan \frac{1}{x} + A_2 \left[x - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right] - x \arctan \frac{1}{x}.$$

Выберем точки коллокации $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Учтем, что

$$\lim_{x \to 0} x \arctan \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \to 0} x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 0,$$

тогда имеем систему

$$\begin{aligned} 0 \cdot A_1 - \frac{1}{2} A_2 &= 0, \\ -\frac{\pi}{4} A_1 + \frac{1}{2}(1 + \ln 2) A_2 &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

для определения коэффициентов A_1 и A_2. Получим, что $A_1 = -1$ и $A_2 = 0$. Таким образом, $y_2 = -1$.

Задания для самостоятельной работы (число узлов $n = 100$)

1. $y(x) - \int\limits_0^{\pi} y(t) \cos(t + x)\, dt = x + 2\cos x + \pi \sin x, \quad 0 \le x \le \pi.$

2. $y(x) - \int\limits_0^{\pi} y(t)\, t \cos(t+x)\, dt = x + 2\pi \cos x + \left(-4 + \pi^2\right) \sin x,$
$0 \le x \le \pi.$

3. $y(x) - \int\limits_0^1 y(t)\, t\, (t+x)\, dt = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{2x}{3}, \quad 0 \le x \le 1.$

4. $y(x) - \int\limits_1^2 y(t)\, t\, (t+x)\, dt = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{x} - x, \quad 1 \le x \le 2.$

5. $y(x) - \int\limits_0^1 y(t)\, t\, (t-x)\, dt = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{x}{4} + x^2, \quad 0 \le x \le 1.$

6. $y(x) - \int\limits_{-1}^1 y(t) t^2 (t-x)\, dt = 2x + 5x^2, \quad -1 \le x \le 1.$

7. $y(x) - \int\limits_0^{\pi/2} y(t) \sin t (t+x)\, dt = 2 - \pi, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}.$

8. $y(x) - \int\limits_0^{\pi/2} y(t) \sin t\, (t-x)\, dt = 2 - \pi + 2x, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}.$

9. $y(x) - \int\limits_0^1 y(t)\, x\, (t-x)^2\, dt = \dfrac{3x}{4} + \dfrac{2x^2}{3} - \dfrac{x^3}{2}, \quad 0 \le x \le 1.$

10. $y(x) - \int\limits_0^1 y(t)\, x\, (t-x)\, dt = -1 + \dfrac{7x}{6} - \dfrac{x^2}{2}, \quad 0 \le x \le 1.$

2.5 Метод наименьших квадратов

Рассмотрим другой метод минимизации невязки – метод наименьших квадратов. Идея метода состоит в минимизации следующего интеграла:

$$I = \int\limits_a^b \left(\varepsilon[y_n(x)]\right)^2 dx = \int\limits_a^b \left[\psi_0(x) + \sum_{i=1}^n A_i \psi_i(x)\right]^2 dx. \qquad (2.17)$$

Это приводит к системе алгебраических уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial A_j} = 2\int_a^b \psi_j(x)\left[\psi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} A_i\psi_i(x)\right] dx = 0, \quad j = 1, \dots n. \tag{2.18}$$

Обозначим

$$c_{ij} = \int_a^b \psi_i(x)\psi_j(x)dx.$$

Тогда система (2.18) примет вид

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}A_j = b_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Отметим, что матрица системы $\mathbf{C} = \{c_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$ является симметричной.

Пример. Методом наименьших квадратов найти приближенное решение интегрального уравнения

$$y(x) - \int_{-1}^{1} \operatorname{sh}(x+t)\, y(t)dt = x^2, \quad -1 \le x \le 1.$$

Полагаем

$$y_2(x) = x^2 + A_1 + A_2 x.$$

Вычислим следующие интегралы:

$$\int_{-1}^{1} \operatorname{sh}(x+t)\, dt = a \operatorname{sh} x, \quad \int_{-1}^{1} t \operatorname{sh}(x+t)\, dt = b \operatorname{sh} x, \quad \int_{-1}^{1} t^2 \operatorname{sh}(x+t)\, dt = c \operatorname{sh} x,$$

где

$$a = 2\operatorname{sh} 1 = 2.3504, \quad b = 2e^{-1} = 0.7358, \quad c = 6\operatorname{sh} 1 - 4\operatorname{sh}1 = 0.8788.$$

$$\psi_1 = 1 - a\operatorname{sh} x, \quad \psi_2 = x - b\operatorname{sh} x, \quad \psi_0 = -c\operatorname{sh} x.$$

Далее найдем коэффициенты матрицы

$$c_{11} = 2 + a^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2 - 1\right) = 6.4935,$$

$$c_{12} = c_{21} = -4\left(ae^{-1} + b\operatorname{sh} 1\right) = -3.4586,$$

$$c_{22} = \frac{2}{3} + b^2\left(\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2 + 1\right) = 2.1896$$

и правой части

$$c_{10} = ac\left(\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2 - 1\right) = 1.68, c_{20} = -2ce^{-1} = -0.6466.$$

Таким образом, получим систему уравнений

$$\begin{array}{rcl} 6.4935A_1 - 3.4586A_2 & = & -1.68, \\ -3.4586A_1 + 2.1896A_2 & = & 0.6466. \end{array}$$

Решим ее и получим

$$y_2(x) = x^2 - 0.5423x - 0.5613.$$

Ядро исходного интегрального уравнения является вырожденным, действительно

$$K(x,t) = \mathrm{sh}(x+t) = \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,t + \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,t.$$

Тогда ИУ можно решить аналитически:

$$y(x) = x^2 + \alpha\,\mathrm{sh}\,x + \beta\,\mathrm{ch}\,x,$$

с параметрами

$$\alpha = \frac{6\,\mathrm{sh}\,1 - 4\,\mathrm{ch}\,1}{2 - \dfrac{1}{4}\mathrm{sh}^2 2} = 0.6821, \quad \beta = \alpha\left(\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2 - 1\right) = -0.5548.$$

Сравним приближенное решение $y_2(x)$ и явное решение $y(x)$. Можно заметить, что функции близки при малых $|x|$. Зато на концах интервала, при $x = \pm 1$ погрешность приближенного решения $y_2(x)$ существенно ухудшается.

2.6 Метод механических квадратур

В основе данного метода лежит некоторая квадратурная формула

$$\int_a^b g(x)dx = \sum_{j=1}^{n} C_j g(x_j) + \varepsilon_n[g],$$

где x_j – узлы квадратурной формулы, C_j – известные коэффициенты, независящие от функции $g(x)$, $\varepsilon_n[g]$ – погрешность аппроксимации интеграла суммой.

Положим в уравнении (2.1) $x = x_i$, получим

$$y(x_i) - \int_a^b K(x_i, t)y(t)dt = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

отсюда после замены интеграла конечной суммой вытекает

$$y(x_i) - \sum_{j=1}^{n} C_j K(x_i, x_j)y(x_j) = f(x_i) + \varepsilon_n[K \cdot y].$$

Отбросим малые величины $\varepsilon_n[y]$. Получим СЛАУ для отыскания значений y_i приближенного решения $y(x)$ в узлах x_i

$$y_i - \sum_{j=1}^{n} C_j K_{ij} y_j = f_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.19}$$

где $K_{ij} = K(x_i, x_j)$ и $f_i = f(x_i)$.

После решения СЛАУ (2.19) искомое решение $y(x)$ можно восстановить в любой точке $x \in (a, b)$ по узлам интерполяции y_i. Простейшим способом интерполяции является линейная интерполяция, когда функция $y(x)$ является линейной между узлами x_i. Также в качестве аналитического представления решения можно принять выражение вида

$$y(x) \approx \sum_{j=1}^{n} C_j K(x, x_j) y_j + f(x).$$

Пример. Методом механических квадратур найти приближенное решение интегрального уравнения

$$y(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 xt\, y(t)\, dt = \frac{5}{6}x, \quad 0 \le x \le 1.$$

Выберем узлы $x_1 = 0$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 1$ и вычислим в них значения правой части $f(x)$:

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{12}, \quad f(1) = \frac{5}{6}$$

и ядра $K(x,t) = xt$:

$$K(0,0) = 0, \quad K\left(0, \frac{1}{2}\right) = 0, \quad K(0,1) = 0,$$
$$K\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 0, \quad K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \quad K\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{2},$$
$$K(1,0) = 0, \quad K\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad K(1,1) = 1.$$

Для вычисления интеграла используем квадратурную формулу Симпсона

$$\int_0^1 g(x)\,dx \approx \frac{1}{6}\left[g(0) + 4g(\frac{1}{2}) + g(1)\right].$$

В итоге для определения приближенных значений y_i искомой функции в узлах x_i получим систему уравнений

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, \\ \frac{11}{12}y_2 - \frac{1}{24}y_3 &= \frac{5}{12}, \\ -\frac{2}{12}y_2 + \frac{11}{12}y_3 &= \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Решением системы будут значения $y_1 = 0$, $y_2 = 1/2$ и $y_3 = 1$. Таким образом, получим $\widetilde{y}(x) = x$.

2.7 Метод Галеркина

Опишем метод Галеркина, называемый в отечественной литературе также методом Бубнова-Галеркина. Выберем систему базисных функций $\{\varphi_j\}, \quad j = 0, 1, \ldots, n$. Представим искомую функцию в виде суммы по $n+1$ базисным функциям

$$y(x) \approx y_n(x) = \sum_{j=0}^{n} A_j \varphi_j(x).$$

Тогда уравнение (2.1) примет следующий вид:

$$\sum_{i=0}^{n} A_i \varphi_i(x) - \sum_{i=0}^{n} A_i \int_a^b K(x,t)\varphi_i(t)dt = f(x), \quad a \le x \le b.$$

Умножим на $\varphi_i(x)$ и проинтегрируем по интервалу $[a, b]$, получим

$$\sum_{j=0}^{n} A_j \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx - \sum_{j=0}^{n} A_j \int_a^b \int_a^b K(x,t)\varphi_j(t)\varphi_i(x)dtdx =$$

$$= \int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Таким образом, задача отыскания решения интегрального уравнения (2.1) сводится к решению системы уравнений

$$\sum_{j=0}^{n} c_{ij} A_j = b_i, \quad i = 0, \ldots, n,$$

где

$$c_{ij} = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx - \int_a^b \int_a^b K(x,t)\varphi_j(t)\varphi_i(x)dtdx,$$

$$b_i = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx.$$

Пример. Методом Галеркина найти приближенное решение интегрального уравнения

$$y(x) - \int_{-1}^{1} y(t)\, t\,(t - x)\, dt = \frac{25x}{3}, \quad -1 \le x \le 1.$$

В качестве базисных функций выберем полиномы Лежандра:

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{2}\left(-1 + 3x^2\right).$$

Полиномы Лежандра образуют ортогональную систему функций на интервале $[-1, 1]$.

Получим матрицу системы уравнений и правую часть

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{8}{15} \\ 0 & \frac{10}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение этой системы уравнений: $A_0 = 0$, $A_1 = 5$, $A_2 = 0$. Таким образом, $y(x) \approx 5x$, что, как нетрудно видеть, совпадает с точным решением.

Задания для самостоятельной работы

1. $y(x) - \int\limits_{-1}^{1} y(t)t(t-x)\,dt = \dfrac{2x}{5} + x^3.$

2. $y(x) - \int\limits_{-1}^{1} y(t)t^2(t-x)\,dt = \dfrac{2x}{5} + x^2.$

3. $y(x) - \int\limits_{-1}^{1} y(t)t(t-x)\,dt = -\dfrac{\pi}{8} + \sqrt{1-x^2}.$

В качестве системы базисных функций полиномы Чебышева второго рода.

4. $y(x) - \dfrac{3}{2}\sqrt{1-x^2}\int\limits_{-1}^{1} y(t)\sqrt{1-t^2}\,dt = -\sqrt{1-x^2}.$

В качестве системы базисных функций полиномы Чебышева второго рода.

5. $y(x) - \int\limits_{-1}^{1} y(t)t(t+x)^2\,dt = -\pi x + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

В качестве системы базисных функций полиномы Чебышева первого рода.

6. $y(x) - \int\limits_{-1}^{1} y(t)t(t-x)\,dt = \dfrac{\pi x}{2} + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

В качестве системы базисных функций полиномы Чебышева первого рода.

7. $y(x) - \int\limits_{0}^{\infty} y(t)(t-x)\,dt = -2 + x + e^{-x}x.$

В качестве системы базисных функций полиномы Лагерра.

8. $y(x) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} y(t)x(t-x)\,dt = e^{-x^2}x - \dfrac{\sqrt{\pi}x}{2}.$

В качестве системы базисных функций полиномы Эрмита.

9. $y(x) - \int\limits_0^{2\pi} y(t)x(t-x)\,dt = 2\pi x + \sin x.$

Учесть, что решение – нечетная функция. Использовать тригонометрические полиномы.

10. $y(x) - \int\limits_{-\pi}^{\pi} y(t)\sin(t+x)\,dt = \cos x - \pi\sin x.$

Учесть, что решение – четная функция. Использовать тригонометрические полиномы.

2.8 Уравнения Фредгольма первого рода. Методы регуляризации

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int\limits_a^b K(x,t)y(t)dt = f(x), \quad a \le x \le b, \tag{2.20}$$

где $f(x) \in L_2(a,b)$, $y(x) \in L_2(a,b)$, $K(x,t)$ – квадратично суммируемая, симметричная и положительно определенная функция.

В выбранных классах функций задача отыскания решения уравнения (2.20) является некорректно поставленной, т.е. неустойчивой по отношению к малым изменениям правой части интегрального уравнения.

Рассмотрим регуляризованное уравнение (согласно методу регуляризации Лаврентьева)

$$\alpha y_\alpha(x) + \int\limits_a^b K(x,t)y_\alpha(t)dt = f(x), \quad a \le x \le b, \tag{2.21}$$

где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации. Уравнение (2.21) является уравнением Фредгольма второго рода и может быть решено методами, рассмотренными в предыдущих пунктах.

После нахождения решения уравнения $y_\alpha(x)$, оно подставляется в (2.20) и вычисляется новая правая часть

$$\int\limits_a^b K(x,t)y_\alpha(t)dt = f_\alpha(x), \quad a \le x \le b.$$

Если построенная таким образом $f_\alpha(x)$ мало отличается от $f(x)$

$$\|f_\alpha(x) - f(x)\|_{L_2} < \varepsilon, \qquad (2.22)$$

где ε – некоторое малое число, то решение $y_\alpha(x)$ считается достаточно хорошим приближением решения уравнения (2.20).

Положим теперь, что

$$\int\limits_a^b K(x,t)y(t)dt = f(x), \quad c \le x \le d, \qquad (2.23)$$

с квадратично суммируемым в области определения ядром $K(x,t)$. Задача отыскания решения уравнения (2.23) также является некорректной.

Рассмотрим регуляризованное уравнение (согласно методу регуляризации Тихонова)

$$\alpha y_\alpha(x) + \int\limits_a^b \tilde{K}(x,t)y_\alpha(t)dt = \tilde{f}(x), \quad a \le x \le b, \qquad (2.24)$$

где

$$\tilde{K}(x,t) = \tilde{K}(t,x) = \int\limits_c^d K(s,x)K(s,t)ds, \quad \tilde{f}(x) = \int\limits_c^d K(s,x)f(s)ds,$$

а $\alpha > 0$ – параметр регуляризации. Решение регуляризированного уравнения (2.24) существует и единственно. Здесь также по формуле (2.22) определяется погрешность решения $y_\alpha(x)$ и делается вывод о точности приближенного решения.

Пример. Методом регуляризации Тихонова найти приближенное решение интегрального уравнения

$$\int_{-1}^{1} y(t)\, t\,(t-x)\,dt = 2\,x(\cos 1 - \sin 1), \quad -1 \le x \le 1.$$

Вычислим функции $\tilde{K}(x,t)$ и $\tilde{f}(x)$:

$$\tilde{K}(x,t) = x\,t \int\limits_{-1}^{1} (x-s)\,(t-s)\,ds = 2tx\left(\frac{1}{3} + tx\right),$$

$$\tilde{f}(x) = (\cos 1 - \sin 1)\, x \int\limits_{-1}^{1} (x - s)\, s\, ds = \frac{4}{3} x(-\cos 1 + \sin 1).$$

Уравнение (2.24) будем решать методом Галеркина с базисными функциями – полиномами Лежандра:

$$y_\alpha(x) \approx A_0 P_0(x) + A_1 P_1(x) + A_2 P_2(x).$$

В результате получим систему линейных алгебраических уравнений с матрицей и правой частью

$$\begin{pmatrix} \dfrac{8}{9} + 2\alpha & 0 & \dfrac{16}{45} \\ 0 & \dfrac{8}{27} + \dfrac{2\alpha}{3} & 0 \\ \dfrac{16}{45} & 0 & \dfrac{32}{225} + \dfrac{2\alpha}{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{8\cos 1}{9} + \dfrac{8\sin 1}{9} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Запишем решение системы

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \frac{3.61402}{4 + 9\alpha}, \quad A_2 = 0.$$

В данном случае можно перейти к пределу при $\alpha \to 0$, тогда получим, что $y(x) \approx 0.9035x$. Это является достаточно хорошим приближением к точному решению $y(x) = \sin x$.

Задания для самостоятельной работы

1. $\int\limits_0^1 y(t) t x (t - x)\, dt = \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^2}{3}.$
2. $\int\limits_{-1}^1 y(t) t \left(t^2 - x^2\right)\, dt = \dfrac{2}{5} - \dfrac{2x^2}{3}.$
3. $\int\limits_{-1}^1 y(t) t (t + x) dt = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{2x}{3}.$
4. $\int\limits_0^\pi y(t) t (t + x)\, dt = -4 + \pi^2 + \pi x.$

5. $\int\limits_0^{\pi} y(t)(t-x)\,dt = \pi - 2x.$

6. $\int\limits_0^{\pi} y(t)(t+x)\,dt = \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^2 x}{2}.$

7. $\int\limits_0^{\pi} y(t)(tx + \sin t)\,dt = -4x + \pi^2\left(\frac{1}{4} + x\right).$

8. $\int\limits_0^{\infty} y(t)t(t-x)\,dt = 2 - x.$

9. $\int\limits_0^{\infty} y(t)(t+x)\,dt = 3 + 2x.$

10. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} y(t)t(t-x)\,dt = -\frac{\sqrt{\pi}x}{2}.$

Литература

[1] **Бахвалов Н.С.** Численные методы. М.: Наука, 1973.

[2] **Верлань А.Ф., Сизиков В.С.** Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. Киев: Наукова Думка, 1986.

[3] **Манжиров А.В., Полянин А.Д.** Методы решения интегральных уравнений: Справочник. М.: Факториал, 1999.

[4] **Манжиров А.В., Полянин А.Д.** Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. М.: Факториал пресс, 2000.

[5] **Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л.** Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М.: Наука, 1965.

[6] **Мусхелишвили Н.И.** Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

[7] **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

Тумаков Дмитрий Николаевич
Стехина Кристина Николаевна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать ??.12.2014 г.
Форм. бум. 60 × 84 1/16. Гарнитура "Таймс". Печать ризографическая.
Печ. л. 8,25. Т.100. Заказ ?.

Лаборатория оперативной полиграфии Издательства КГУ
420045, Казань, ул. Кр. Позиция, 2а
231-52-12