М.Ф. Павлова, М.Р. Тимербаев

ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА

(теоремы вложения)

Учебное пособие

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

2010

УДК 517.5

М.Ф. Павлова, М.Р. Тимербаев. Пространства Соболева (теоремы вложения). 123 с.

В пособии излагаются основы теории пространств Соболева. Оно содержит теоремы вложения разных метрик и разных измерений для пространств Соболева целого порядка в случае ограниченных и неограниченных областей, элементы теории следов и теории пространств Соболева нецелого порядка. Пособие рассчитано на студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области уравнений математической физики и численных методов их решения. Оно может быть полезно также научным сотрудникам, чьи интересы лежат в указанных областях.

Научный редактор:
доктор физико-математических наук М.М. Карчевский
Рецензенты:
доктор физико-математических наук Ф.Г. Авхадиев
доктор физико-математических наук С.А. Григорян

Печатается по постановлению редакционно-издательского совета факультета ВМК Казанского университета

Оглавление

Предисловие

Настоящее пособие возникло в результате опыта чтения ряда специальных курсов по различным вопросам уравнений математической физики, математических моделей механики сплошной среды, численным методам решения уравнений с частными производными и вариационных неравенств для студентов старших курсов факультета вычислительной математики и кибернетики.

Цель его — дать систематическое и вместе с тем достаточно элементарное изложение основ теории пространств Соболева, использование которых в указанных выше разделах математики и ее приложений давно уже стало традиционным.

Пространства Соболева являются удобным и естественным математическим аппаратом теории уравнений с частными производными и численных методов их решения. Они широко используются, например, при исследовании точности метода конечных элементов и разностных методов. Весьма тонкие результаты теории соболевских пространств нецелого порядка, теории следов и, в особенности, их дискретные аналоги применяются и при конструировании численных алгоритмов, например, в современных итерационных методах типа декомпозиции области.

Структура пособия такова. В первой главе излагаются некоторые вопросы теории функций и функционального анализа, не включаемые, обычно, в общие университетские курсы, в частности, даются критерии компактности в лебеговых пространствах, основные понятия теории обобщенных функций. Остальные главы посвящены теории соболевских пространств. При этом мы, в основном, следуем схеме Адамса [6]. В пособии используется двойная нумерация для теорем и формул. При нумерации формул первое число совпадает с номером параграфа, в котором эта формула введена, а второе соответствует порядковому номеру формулы в параграфе. При нумерации теорем и других утверждений первое число — номер главы, а второе — порядковый номер в главе.

Предполагается, что читатель знаком с основами функционального анализа и теории функций. Все необходимые сведения из этих разделов математики можно найти, например, в книгах [1], [2].

Многие вопросы, затронутые в настоящем пособии, активно обсуждались с участниками семинара кафедры вычислительной математики, руководимого профессором А.Д. Ляшко. Авторы выражают им свою искреннюю благодарность.

Авторы признательны профессору М.М.Карчевскому за тяжелый труд по редактированию книги, полезные замечания и внимание к работе.

Глава 1

Вводная глава

§ 1. Основные обозначения

Всюду в дальнейшем Ω — область (то есть открытое множество) в n-мерном вещественном пространстве R^n, ее граница — $\partial\Omega$. Набор из n неотрицательных целых чисел $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ будем называть мультииндексом, $|\alpha| = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j$. Для мультииндексов α, β будем писать $\alpha \leqslant \beta$, если $\alpha_j \leqslant \beta_j$ для всех номеров j, и $\alpha < \beta$, если $\alpha \leqslant \beta$ и $\alpha_j < \beta_j$ хотя бы для одного номера j. Будем также использовать обозначения

$$D_i\, u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}, \qquad D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n}$$

для частных производных функции u. Полагаем $D^0 u = u$.

Носителем функции u (на множестве Ω) будем называть замыкание в Ω множества $\{x \in \Omega|\ u(x) \neq 0\}$ и обозначать $\operatorname{supp} u$. Будем использовать обозначение $A \subset\subset \Omega$, если замыкание множества A компактно и содержится в Ω. Таким образом, запись $\operatorname{supp} u \subset\subset \Omega$ означает, что носитель функции u компактен и содержится в Ω, в частности, $u(x) = 0$ в некоторой окрестности границы $\partial\Omega$ области Ω.

§ 2. Пространства непрерывных функций

Для целого неотрицательного m через $C^m(\Omega)$ обозначим множество всех функций, определенных на Ω, у которых существуют и непрерывны на Ω все производные до порядка m включительно.

Для $m = \infty$ полагаем $C^\infty(\Omega) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega)$. Обозначим через $C_0^m(\Omega)$ множество всех функций из $C^m(\Omega)$, носители которых компактны и содержатся в Ω.

Для целого неотрицательного m через $C^m(\overline{\Omega})$ обозначим множество всех функций $u \in C^m(\Omega)$, для которых все производные $D^\alpha u$, $|\alpha| \leqslant m$, ограничены и равномерно непрерывны на Ω. Пространство $C^m(\overline{\Omega})$ является банаховым,

$$\|u\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha|\leqslant m} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha u(x)|.$$

Для $m = \infty$ полагаем $C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C^k(\overline{\Omega})$.

Ясно, что $C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\overline{\Omega}) \subset C^\infty(\Omega)$, и все эти пространства функций различны. Например, если $n = 1, \Omega = (0,1)$, то функция $u(x) \equiv 1$ принадлежит $C^\infty(\overline{\Omega})$, но не принадлежит $C_0^\infty(\Omega)$, а функция $u(x) = \sin(1/x)$ принадлежит $C^\infty(\Omega)$, но не принадлежит $C^\infty(\overline{\Omega})$, так как у этой функции не существует предела в нуле.

Элементы множества $C_0^\infty(\Omega)$ называют пробными или основными функциями. Классическим примером пробной функции в R^n является функция $\varphi(x) = f(|x|^2 - 1)$, где $f(t) = e^{1/t}$, если $t < 0$, и $f(t) = 0$ при $t \geqslant 0$. Действительно, $f \in C^\infty(R^1)$, так как все ее производные существуют при $t \neq 0$ и стремятся к нулю при $t \to 0$. Функция $|x|^2 - 1 = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 - 1$ имеет все частные производные, так что $\varphi \in C^\infty(R^n)$. Кроме того, носителем функции φ является единичный шар с центром в нуле. Таким образом, $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$. Обозначим $\rho = \int\limits_{R^n} \varphi dx$ $(\rho > 0)$. Тогда функция $J(x) = \varphi(x)/\rho$ обладает следующими свойствами:

$$J \in C_0^\infty(R^n), \quad J \geqslant 0, \quad \operatorname{supp} J = \{x \in R^n |\ |x| \leqslant 1\}, \quad \int\limits_{R^n} J\, dx = 1. \quad (2.1)$$

Лемма 1.1. *Если K — компактное подмножество Ω, то существует такая функция $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, что $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ и $\psi = 1$ в окрестности K.*

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon + \varepsilon' < \delta$, где

$$\delta = \operatorname{dist}(K, \partial\Omega) \equiv \inf_{x\in K,\, y\in\partial\Omega} |x - y|$$

Обозначим через $\overline{O_\varepsilon}$ — замкнутый шар радиуса ε с центром в нуле. Положим $u = 1$ на компактном множестве $K_{\varepsilon'} = K + \overline{O_{\varepsilon'}}$ и $u = 0$ вне

$K_{\varepsilon'}$, и рассмотрим функцию

$$\psi_\varepsilon(x) = \int\limits_{R^n} u(x-\varepsilon y)J(y)\,dy\,.$$

Ясно, что носитель функции ψ_ε содержится в множестве $K_{\varepsilon+\varepsilon'}$, и $\psi_\varepsilon = 1$ в $K_{\varepsilon'-\varepsilon}$. Лемма доказана.

Установим более общее утверждение, называемое теоремой о разбиении единицы.

Теорема 1.1. *Пусть $A \subset R^n$ — произвольное подмножество, и пусть $\mathcal{O}$ — открытое покрытие множества A. Тогда существует семейство функций $\Psi \subset C_0^\infty(R^n)$, обладающее следующими свойствами.*[1]

(i) Для каждой функции $\psi \in \Psi$ и каждого $x \in R^n$ справедливы оценки $0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1$.

(ii) Если $K \subset\subset A$, то для всех $\psi \in \Psi$, за исключением может быть конечного числа, $\psi(x) = 0\ \forall x \in K$.

(iii) Для каждой функции $\psi \in \Psi$ существует $U \in \mathcal{O}$ такое, что $\operatorname{supp}\psi \subset U$.

(iv) $\sum\limits_{\psi\in\Psi} \psi(x) \equiv 1$ для всех $x \in A$.

Доказательство. Предположим сначала, что A компактно. Тогда существует конечное подпокрытие $\{U_j\}_{j=1}^N \subset \mathcal{O}$ такое, что $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^N U_j$. В силу компактности A, для каждого U_j можно выбрать компактное множество $K_j \subset U_j$ так, чтобы $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^N K_j$. По лемме 1.1 найдется функция $\varphi_j \in C_0^\infty(U_j)$, равная единице в окрестности множества K_j. Положим $\psi_1 = \varphi_1$, $\psi_j = \varphi_j(1-\varphi_1)\ldots(1-\varphi_{j-1})$, $j = \overline{2,N}$. Тогда $\sum\limits_{j=1}^N \psi_j = 1-(1-\varphi_1)\ldots(1-\varphi_N)$, и семейство функций $\Psi = \{\psi_j|\ \ j=\overline{1,N}\}$ удовлетворяет требуемым свойствам.

Предположим теперь, что A открыто. Пусть

$$A_j = \left\{x \in A \,\middle|\, \ |x| \leqslant j,\ \operatorname{dist}(x,\partial A) \geqslant 1/j\right\},$$

[1] Такое семейство Ψ называется C^∞-разбиением единицы для A, подчиненное покрытию $\mathcal{O}$.

$$\mathcal{O}_j = \left\{ U \cap (\operatorname{int} A_{j+1} \cap A_{j-2}^c) \;\middle|\; U \in \mathcal{O} \right\},$$

где $\operatorname{int} A$ — внутренность множества A, $A^c = R^n \backslash A$ — дополнение множества A. Тогда $A = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$, каждое A_j компактно, и семейство $\mathcal{O}_j$ покрывает замыкание множества $A_j \backslash A_{j-1}$. Следовательно, по доказанному выше существует конечное C^∞-разбиение единицы Ψ_j для A_j, подчиненное семейству $\mathcal{O}_j$. Пусть $\sigma(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \sum\limits_{\varphi \in \Psi_j} \varphi(x)$. Ясно, что $\sigma(x) > 0$ для всех $x \in A$ и при каждом x является суммой лишь конечного числа ненулевых слагаемых.

Определим семейство Ψ как объединение всех функций вида

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x)/\sigma(x), & x \in A, \\ \quad 0 & x \notin A, \end{cases}$$

где φ — функция, принадлежащая одному из Ψ_j. Нетрудно убедиться в том, что Ψ является разбиением единицы для открытого множества A.

Наконец, если A произвольно, то A является подмножеством открытого множества $B = \bigcup\limits_{U \in \mathcal{O}} U$. Осталось заметить, что любое разбиение единицы множества B будет таковым и для A. Теорема доказана.

Далее будем обозначать через $C^{m,\lambda}(\Omega)$, $0 < \lambda \leqslant 1$, подпространство $C^m(\Omega)$, состоящее из функций φ, удовлетворяющих вместе со своими производными до порядка m включительно условию Гельдера с показателем λ:

$$|D^\alpha \varphi(x) - D^\alpha \varphi(y)| \leqslant K\, |x - y|^\lambda \qquad \forall\, x, y \in \Omega, \quad \forall \alpha : |\alpha| \leqslant m.$$

Аналогично определяется пространство $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$. $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ — банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^m(\overline{\Omega})} + \max_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^\lambda}.$$

Теорема 1.2. *Пусть m — неотрицательное целое число, а параметры λ и ν удовлетворяют неравенствам $0 < \nu < \lambda \leqslant 1$. Тогда имеют место следующие вложения*

$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \to C^m(\overline{\Omega}), \tag{2.2}$$

$$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \to C^m(\overline{\Omega}), \tag{2.3}$$

$$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \to C^{m,\nu}(\overline{\Omega}). \tag{2.4}$$

Причем для ограниченных областей вложения (2.2)–(2.4) являются компактными.

Доказательство. Вложения (2.2), (2.3) следуют из определений этих пространств. Докажем (2.4). Для этого заметим, что при $|\alpha| \leqslant m$ справедливы неравенства

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ 0<|x-y|<1}} \frac{|D^\alpha \varphi(x) - D^\alpha \varphi(y)|}{|x-y|^\nu} \leqslant \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|D^\alpha \varphi(x) - D^\alpha \varphi(y)|}{|x-y|^\lambda},$$

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ |x-y|\geqslant 1}} \frac{|D^\alpha \varphi(x) - D^\alpha \varphi(y)|}{|x-y|^\nu} \leqslant 2 \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Таким образом,

$$\|\varphi\|_{C^{m,\nu}(\overline{\Omega})} \leqslant 3\, \|\varphi\|_{C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})}$$

и вложение (2.4) имеет место.

Теперь предполагаем, что Ω — ограниченное множество. Сначала установим компактность (2.3). Для этого необходимо показать, что любое ограниченное в $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ множество содержит сходящуюся в $C^m(\overline{\Omega})$ последовательность. Пусть A — ограниченное в $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ множество, следовательно, существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$\|\varphi\|_{C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})} \leqslant M \qquad \forall\, \varphi \in A,$$

в частности,

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant M\, |x-y|^\lambda \qquad \forall\, x, y \in \Omega, \quad \forall\, \varphi \in A.$$

Поэтому по теореме Арцела множество A предкомпактно в $C(\overline{\Omega})$. Если $m = 0$, то компактность (2.3) доказана. При $m \geqslant 1$ из предкомпактности A в $C(\overline{\Omega})$ следует существование фундаментальной в $C(\overline{\Omega})$ последовательности $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty \subset A$. Пусть $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ — предел этой последовательности. Множество $\{D_1\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ также ограничено в $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$, поэтому будет существовать подпоследовательность $\{D_1\varphi_{j_k}\}_{k=1}^\infty$ фундаментальная в $C(\overline{\Omega})$. Пусть ψ — предел этой последовательности в $C(\overline{\Omega})$.

Сходимость в $C(\overline{\Omega})$ означает равномерную сходимость в Ω, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n(\varepsilon)$ такой, что

$$|\varphi_j(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon \qquad \forall\, x \in \Omega, \quad \forall\, j \geqslant n(\varepsilon)\,.$$

Поэтому разность

$$\left|\frac{\varphi_{j_k}(x+he_1) - \varphi_{j_k}(x)}{h} - \frac{\varphi(x+he_1) - \varphi(x)}{h}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{\varphi_{j_k}(x+he_1) - \varphi(x+he_1)}{h}\right| + \left|\frac{\varphi_{j_k}(x) - \varphi(x)}{h}\right| \tag{2.5}$$

будет сколь угодно мала, если $j_k \geqslant n(h^2)$ (здесь e_1 — орт x_1). Из (2.5), очевидно, следует, что $\psi = D_1\varphi$. Повторяя эту процедуру, можно выделить подпоследовательность $\{\varphi_{j'}\}_{j'=1}^{\infty} \subset \{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ такую, что $D^\alpha\varphi_{j'} \to D^\alpha\varphi$ в $C(\overline{\Omega})$ для всех α : $|\alpha| \leqslant m$. Таким образом, компактность (2.3) имеет место.

Компактность вложения (2.2) следует из компактности (2.3), поскольку $C^{m+1}(\overline{\Omega}) \to C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$, $0 \le \lambda \le 1$.

Для доказательства компактности вложения (2.4) заметим, что

$$\frac{|D^\alpha\varphi(x) - D^\alpha\varphi(y)|}{|x-y|^\nu} =$$
$$= \left(\frac{|D^\alpha\varphi(x) - D^\alpha\varphi(y)|}{|x-y|^\lambda}\right)^{\nu/\lambda} |D^\alpha\varphi(x) - D^\alpha\varphi(y)|^{1-\nu/\lambda} \leqslant$$
$$\leqslant 2\,\|\varphi\|_{C^m(\overline{\Omega})}^{1-\nu/\lambda}\,\|\varphi\|_{C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})}^{\nu/\lambda}\,.$$

Таким образом,

$$\|\varphi\|_{C^{m,\nu}(\overline{\Omega})} \leqslant \|\varphi\|_{C^m(\overline{\Omega})} + 2\,\|\varphi\|_{C^m(\overline{\Omega})}^{1-\nu/\lambda}\,\|\varphi\|_{C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})}^{\nu/\lambda}\,. \tag{2.6}$$

Из (2.6) и компактности (2.3) следует компактность вложения (2.4). Теорема доказана.

§ 3. Пространства Лебега

Для $1 \leqslant p < \infty$ будем обозначать через $L_p(\Omega)$ множество всех измеримых функций, определенных на Ω, для которых

$$\int\limits_\Omega |u(x)|^p\,dx < \infty.$$

$L_p(\Omega)$ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Измеримая на Ω функция u называется существенно ограниченной, если существует постоянная K, для которой $|u(x)| \leqslant K$ для почти всех $x \in \Omega$. Нижнюю грань всех допустимых постоянных K называют существенной верхней границей функции u и обозначают через $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega}|u(x)|$. Множество всех измеримых существенно ограниченных на Ω функций обозначается через $L_\infty(\Omega)$. Оно является банаховым пространством относительно нормы

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|u(x)|\,.$$

Для нормы в $L_p(\Omega)$, когда это не вызывает недоразумений, будем использовать также обозначение $\|\cdot\|_p$.

Функция u, определенная почти всюду на Ω, называется локально интегрируемой на Ω, если для любого компакта $K \subset \Omega$ функция u принадлежит $L_1(K)$. Множество всех таких функций обозначают через $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

В дальнейшем полезными будут следующие результаты.

Лемма 1.2. *Если $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ и $\int\limits_{\Omega} u(x)\,\varphi(x)\,dx = 0$ для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, то $u(x) = 0$ почти всюду в Ω.*

Доказательство. Фиксируем произвольный компакт K из Ω. Очевидно, найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $K + \overline{O}_{\varepsilon_0} \subset \Omega$. По лемме 1.1 для любого $\varepsilon > 0 :\ \varepsilon \leq \varepsilon_0$ существует функция $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(K + O_\varepsilon)$ такая, что $0 \leqslant \varphi_\varepsilon \leqslant 1$ и $\varphi_\varepsilon(x) = 1\ \forall x \in K$. Тогда

$$\left|\int\limits_K u(x)dx\right| = \left|\int\limits_\Omega u(x)\chi_K(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_\Omega u(x)\left(\varphi_\varepsilon(x) - \chi_K(x)\right)dx\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{(K+O_\varepsilon)\setminus K} |u(x)|dx \to 0 \qquad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{3.1}$$

поскольку мера множества $(K+O_\varepsilon)\setminus K$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Из (3.1) в силу произвольности K следует утверждение леммы.

Теорема 1.3. *При* $1 \le p < \infty$ *пространство* $C_0^\infty(\Omega)$ *плотно в* $L_p(\Omega)$.

Доказательство. Сначала докажем, что множество всех линейных комбинаций характеристических функций χ_K компактных подмножеств $K \subset \Omega$ (обозначим его L) плотно в $L_p(\Omega)$. Предположим, что это утверждение не верно, то есть существует функция $\overline{u} \in L_p(\Omega)$, не принадлежащая $\overline{L}$. Тогда по следствию из теоремы Хана-Банаха найдется ненулевая функция $w \in L_{p'}(\Omega)$ [2] такая, что

$$\int\limits_\Omega w(x)\, v(x)\, dx \,=\, 0 \qquad \forall v \in L.$$

В частности

$$\int\limits_\Omega w(x)\, \chi_K(x)\, dx \,=\, \int\limits_K w(x)\, dx \,=\, 0 \qquad \forall K \subset \Omega.$$

Полученное противоречие доказывает, что $\overline{L} = L_p(\Omega)$. Осталось показать, что характеристическую функцию любого компакта $K \subset \Omega$ можно представить пределом последовательности функций из $C_0^\infty(\Omega)$. Действительно, поскольку компакт $K \subset \Omega$, то найдется такое $\delta > 0$, что $K + O_\delta \subset \Omega$. По лемме 1.1 для любого $\varepsilon > 0 :\ \varepsilon \le \delta$ существует функция $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(K + O_\varepsilon) \subset C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $0 \leqslant \varphi_\varepsilon \leqslant 1$ и $\varphi_\varepsilon(x) = 1\ \forall x \in K$. Следовательно,

$$\|\chi_K - \varphi_\varepsilon\|_p \,\le \operatorname{mes}\left((K + O_\varepsilon)\backslash K\right) \,\to 0 \quad \text{при} \ \ \varepsilon \to 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 1.4. *Пусть* Ω *— произвольная область пространства* R^n, *а* $\{\Omega_j\}_{j=1}^\infty$ *— система измеримых подмножеств* Ω, *обладающая следующим свойством: существует число* N *такое, что для любой системы* $\{\Omega_{j_k}\}_{k=1}^{N+1} \subset \{\Omega_j\}_{j=1}^\infty$ *мера множества* $\bigcap\limits_{k=1}^{N+1} \Omega_{j_k}$ *равна нулю. Тогда для любой функции* $f \in L_p(\Omega)$ *справедливо равенство*

$$\sum_{j=1}^\infty \int\limits_{\Omega_j} |f(x)|^p\, dx \,\leqslant\, N \int\limits_\Omega |f(x)|^p\, dx\,. \tag{3.2}$$

[2]Здесь и всюду далее $p' = p/(p-1)$. Числа p и p' будем называть сопряженными.

Доказательство. Пусть $\chi_j(x)$ — характеристическая функция множества Ω_j. Ясно, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_j} |f(x)|^p \, dx \, = \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \chi_j(x) \, |f(x)|^p \, dx \, ,$$

и для любого сколь угодно большого числа M имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^{M} \int\limits_{\Omega_j} |f(x)|^p \, dx \, = \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^{M} \chi_j(x) \right) |f(x)|^p \, dx. \tag{3.3}$$

Докажем, что мера множества $\{x \in \Omega \,|\, \sum\limits_{j=1}^{\infty} \chi_j(x) > N\}$ равна нулю. Предположим обратное, тогда найдутся множество $E \subset \Omega$ ненулевой меры и набор χ_{j_k}, $1 \leqslant k \leqslant N+1$ такие, что $\chi_{j_k}(x) = 1$ для всех $1 \leqslant k \leqslant N+1$ и всех $x \in E$. Но это противоречит условию теоремы. Таким образом функция $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \chi_j(x) \leqslant N$ почти всюду на Ω. Используя это, из равенства (3.3) легко получить утверждение теоремы.

В теории пространств Лебега, а также при построении и исследовании соболевских пространств широко используются усредненные по Соболеву функции, которые определяются следующим образом. Для измеримых на R^n функций u, v таких, что при каждом $x \in R^n$ функция $u(x-y)v(y)$ интегрируема на R^n по переменной y, определим свертку равенством

$$u * v(x) \, = \int\limits_{R^n} u(x-y) \, v(y) \, dy \, = \int\limits_{R^n} u(y) \, v(x-y) \, dy \, = \, v * u(x).$$

Пусть теперь J — любая функция, удовлетворяющая условиям (2.1). Если $\varepsilon > 0$, то функция $J_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} J(x/\varepsilon)$ обладает теми же свойствами, что и $J(x)$, с одним лишь отличием: $\operatorname{supp} J_\varepsilon = \{x \,|\, \ |x| \leqslant \varepsilon\}$. Составим свертку

$$J_\varepsilon * u(x) = \int\limits_{R^n} J_\varepsilon(x-y) u(y) dy = \int\limits_{R^n} u(x-\varepsilon y) J(y) dy \tag{3.4}$$

для тех функций, для которых интегралы имеют смысл (последнее равенство получается заменой переменных $y = x - \varepsilon z$ в первом интеграле). Свертку (3.4) называют усреднением по Соболеву или регуляризацией u. Нетрудно видеть, что $\operatorname{supp} J_\varepsilon * u \subset \operatorname{supp} u + \overline{O_\varepsilon}$. Действительно, если $x \notin \operatorname{supp} u + \overline{O_\varepsilon}$, то $|x - y| > \varepsilon \ \forall y \in \operatorname{supp} u$, а потому $J_\varepsilon(x - y) = 0 \ \forall y \in \operatorname{supp} u$, и $J_\varepsilon * u(x) = 0$.

Следующую теорему мы будем неоднократно использовать в дальнейшем.

Теорема 1.5. *Пусть u — функция, определенная на R^n, равная нулю вне Ω.*

(a) Если $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, то $J_\varepsilon * u$ принадлежит $C^\infty(R^n)$.

(b) Если, кроме того, $\operatorname{supp} u \subset\subset \Omega$, *то $J_\varepsilon * u \in C_0^\infty(\Omega)$ при $\varepsilon < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} u, \partial\Omega)$.*

(c) Если $u \in L_p(\Omega)$ и $p \in [1, \infty)$, то

$$\|J_\varepsilon * u\|_p \leqslant \|u\|_p \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon \to 0+} \|J_\varepsilon * u - u\|_p = 0.$$

(d) Если $u \in C^m(\Omega)$ и $G \subset\subset \Omega$, то $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} D^\alpha J_\varepsilon * u(x) = D^\alpha u(x)$ равномерно на G для всех $|\alpha| \leqslant m$.

(e) Если $u \in C^m(\overline{\Omega})$, то $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} J_\varepsilon * u = u$ в пространстве $C^m(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Функция $J_\varepsilon(x - y)$ — бесконечно дифференцируемая функция x, равная нулю при $|y - x| \geqslant \varepsilon$. Поэтому для любого мультииндекса α и функции $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ будем иметь

$$D^\alpha (J_\varepsilon * u)(x) \; = \; \int\limits_\Omega D_x^\alpha J_\varepsilon(x - y)\, u(y)\, dy,$$

откуда следуют утверждения (a) и (b).

Пусть $u \in L_p(\Omega)$. Для $p \in (1, \infty)$ оценим $J_\varepsilon * u$ с помощью неравенства Гельдера, в результате получим

$$|J_\varepsilon * u(x)| \; = \; \left| \int\limits_{R^n} J_\varepsilon(x - y)\, u(y)\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_{R^n} J_\varepsilon(x - y)\, dy \right|^{1/p'} \left(\int\limits_{R^n} J_\varepsilon(x - y) |u(y)|^p\, dy \right)^{1/p} \; =$$

$$= \left(\int_{R^n} J_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p \, dy \right)^{1/p}.$$

По теореме Фубини имеем

$$\int_\Omega |J_\varepsilon * u(x)|^p \, dx \leqslant \int_{R^n} \int_{R^n} J_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p \, dy \, dx =$$

$$= \int_{R^n} |u(y)|^p \, dy \int_{R^n} J_\varepsilon(x-y) \, dx = \|u\|_p^p .$$

Если $p = 1$, то последнее неравенство получается непосредственно, без применения неравенства Гельдера. Итак, доказано, что $\|J_\varepsilon * u\|_p \leqslant \|u\|_p$. По теореме 1.3 множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $L_p(\Omega)$, следовательно, для любого $\delta > 0$ найдется функция $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $\|u - \varphi\|_p < \delta$. Поэтому $\|J_\varepsilon * u - J_\varepsilon * \varphi\|_p \leqslant \|u - \varphi\|_p < \delta$. Далее,

$$|J_\varepsilon * \varphi(x) - \varphi(x)| = \left| \int_{R^n} J_\varepsilon(x-y)(\varphi(y) - \varphi(x)) dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|y-x|<\varepsilon} |\varphi(y) - \varphi(x)| . \tag{3.5}$$

Откуда в силу равномерной непрерывности функции φ на Ω и компактности ее носителя при достаточно малых значениях ε будем иметь $\|J_\varepsilon * \varphi - \varphi\|_p < \delta$. Следовательно,

$$\|J_\varepsilon * u - u\|_p \leqslant \|J_\varepsilon * (u - \varphi)\|_p + \|J_\varepsilon * \varphi - \varphi\|_p + \|u - \varphi\|_p < 3\delta,$$

что завершает доказательство утверждения (c). Доказательство утверждений (d) и (e) может быть получено заменой φ на $D^\alpha u$ в неравенстве (3.5) с учетом того, что $D^\alpha J_\varepsilon * u(x) = J_\varepsilon * D^\alpha u(x)$. Теорема доказана.

Определение 1.1. Функция $u \in L_p(\Omega)$ называется непрерывной в целом в $L_p(\Omega)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $h \in R^n : \ |h| < \delta(\varepsilon)$ справедлива оценка

$$\int_\Omega |\widetilde{u}(x+h) - \widetilde{u}(x)|^p \, dx \leqslant \varepsilon^p , \tag{3.6}$$

здесь

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x)\,, & x \in \Omega\,; \\ 0\,, & x \in R^n \setminus \Omega\,. \end{cases}$$

Теорема 1.6. *Всякая функция из* $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, *непрерывна в целом в* $L_p(\Omega)$.

Доказательство. Заметим, что из непрерывности в целом функции $\widetilde{u}$ в пространстве $L_p(R^n)$ следует непрерывность в целом функции u в пространстве $L_p(\Omega)$. Поэтому теорему достаточно доказать для $\Omega = R^n$. Для этого при произвольном $h \in R^n$ определим линейный оператор T_h, действующий из $L_p(R^n)$ в $L_p(R^n)$, с помощью формулы:

$$(T_h\, u)(x) = u(x+h) \qquad \forall x \in R^n.$$

Ясно, что $\|T_h u\|_p = \|u\|_p$, так что нормы операторов T_h равны единице. Далее пусть u — произвольная функция из $L_p(R^n)$. По теореме 1.3 найдется последовательность $\{u_n\}_{i=1}^{\infty} \subset C_0^\infty(R^n)$, сходящаяся в $L_p(R^n)$ к функции u. Имеем

$$\|T_h u - u\|_p \leqslant \|T_h u - T_h u_n\|_p + \|T_h u_n - u_n\|_p + \|u - u_n\|_p \leqslant$$

$$\leqslant 2\,\|u - u_n\|_p + \|T_h u_n - u_n\|_p. \tag{3.7}$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ найдется $n(\varepsilon)$ такой, что

$$\|u - u_{n(\varepsilon)}\|_p \leqslant \varepsilon/3\,. \tag{3.8}$$

По определению пространства $C_0^\infty(R^n)$ носитель функции $u_{n(\varepsilon)}$ — компактное множество. Поэтому найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ со свойством

$$\|T_h u_{n(\varepsilon)} - u_{n(\varepsilon)}\|_p \leqslant \varepsilon/3 \qquad \forall h:\ |h| \leqslant \delta(\varepsilon). \tag{3.9}$$

Из оценок (3.7)–(3.9) вытекает, что

$$\|T_h u - u\|_p \leqslant \varepsilon \qquad \forall h:\ |h| \leqslant \delta(\varepsilon).$$

Теорема доказана.

Теорема 1.7. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$. *Ограниченное множество* K *из* $L_p(\Omega)$ *предкомпактно в* $L_p(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют* $\delta > 0$ *и* $G \subset\subset \Omega$ *такие, что для всех* $u \in K$ *и всех* $h \in R^n$, $|h| < \delta$, *имеют место оценки*

$$\int\limits_{\Omega} |\widetilde{u}(x+h) - \widetilde{u}(x)|^p \, dx \leqslant \varepsilon^p \,, \tag{3.10}$$

$$\int\limits_{\Omega \setminus \overline{G}} |u(x)|^p \, dx \leqslant \varepsilon^p \,. \tag{3.11}$$

Доказательство. Справедливость теоремы достаточно установить при $\Omega = R^n$, поскольку в случае произвольной области Ω, очевидно, множество K предкомпактно в $L_p(\Omega)$ тогда и только тогда, когда множество $\widetilde{K} = \{\widetilde{u} \mid u \in K\}$ предкомпактно в $L_p(R^n)$.

Сначала докажем, что предкомпактность K в $L_p(R^n)$ обеспечивает выполнение условий (3.10), (3.11). По теореме Хаусдорфа при любом $\varepsilon > 0$ для множества K существует конечная $(\varepsilon/6)$-сеть из $L_p(R^n)$. Поскольку по теореме 1.3 $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $L_p(\Omega)$, то существует множество $S \subset C_0^\infty(\Omega)$, содержащее конечное число элементов и являющееся для K $(\varepsilon/3)$-сетью. Так как число функций в S конечно, то найдется число $r > 0$ такое, что

$$\operatorname{supp} \varphi \subset \overline{B}_r \equiv \{x \in R^n \mid |x| \leqslant r\} \qquad \forall \varphi \in S \,.$$

Для $u \in K$ и соответствующего ему элемента $\varphi \in S$ имеем

$$\int\limits_{\Omega \setminus \overline{B}_r} |u(x)|^p \, dx = \int\limits_{\Omega \setminus \overline{B}_r} |u(x) - \varphi(x)|^p \, dx \leqslant (\varepsilon/3)^p \,.$$

Из этого неравенства при $G = B_r$ следует (3.11).

Докажем (3.10). Поскольку $\operatorname{supp} \varphi \subset \overline{B}_r$ для $\varphi \in S$, то по теореме 1.6 функции $\varphi \in S$ непрерывны в целом в $L_p(B_r)$. Следовательно,

$$\lim_{|h| \to 0} \int\limits_{R^n} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p \, dx = \lim_{|h| \to 0} \int\limits_{B_r} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p \, dx \to 0 \,.$$

Так как S — конечное множество, то найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|h| < \delta$

$$\int\limits_{R^n} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p\,dx \leqslant (\varepsilon/3)^p \qquad \forall\,\varphi \in S\,. \tag{3.12}$$

Пусть u — произвольная функция из K, выберем $\varphi \in S$ так, чтобы $\|u - \varphi\|_p < \delta/3$. Используя (3.12), нетрудно получить, что

$$\Bigl(\int\limits_{R^n} |u(x+h) - u(x)|^p\,dx\Bigr)^{1/p} \leqslant \Bigl(\int\limits_{R^n} |u(x+h) - \varphi(x+h)|^p\,dx\Bigr)^{1/p} +$$

$$+\Bigl(\int\limits_{R^n} |\varphi(x) - u(x)|^p\,dx\Bigr)^{1/p} + \Bigl(\int\limits_{R^n} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p\,dx\Bigr)^{1/p} \leqslant \varepsilon^p\,. \tag{3.13}$$

Таким образом, оценка (3.10) также имеет место.

Докажем далее, что выполнения условий (3.10), (3.11) достаточно для предкомпактности ограниченного в $L_p(R^n)$ множества K. По теореме Хаусдорфа для этого достаточно установить, что при произвольном $\varepsilon > 0$ существует для K конечная ε-сеть.

Выберем $\delta(\varepsilon) > 0$ и $G \subset\subset \Omega$ так, чтобы для всех $u \in K$ и всех $h \in R^n$, $|h| < \delta(\varepsilon)$, имели место оценки

$$\int\limits_{\Omega} |\widetilde{u}(x+h) - \widetilde{u}(x)|^p\,dx \leqslant \frac{1}{2^p}\,\frac{\varepsilon^p}{3} \equiv \varepsilon_1, \tag{3.14}$$

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{G}} |u(x)|^p\,dx \leqslant \varepsilon^p/3 \quad \forall\,u \in K\,. \tag{3.15}$$

Используя (3.14), (3.15), построим для K конечную ε-сеть.

Рассмотрим множество

$$K_\nu = \{J_\nu * u \mid u \in K\}\,,$$

где $J_\nu * u$ — свертка, определенная равенством (3.4). Докажем, что

$$\|J_\nu * u - u\|_p \leqslant \varepsilon_1 \qquad \forall\,\nu \leqslant \nu(\varepsilon), \quad \forall\,u \in K\,. \tag{3.16}$$

Воспользовавшись неравенством Гельдера и свойствами функции $J_\nu * u$, будем иметь

$$\int\limits_{R^n} |J_\nu * u(x) - u(x)|^p \, dx = \int\limits_{R^n} \left| \int\limits_{R^n} J_\nu(x-y)(u(y) - u(x)) \, dy \right|^p dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{R^n} \int\limits_{R^n} J_\nu(x-y)|u(y) - u(x)|^p \, dy \, dx =$$

$$= \int\limits_{R^n} \int\limits_{B_\nu} J_\nu(h)|u(x+h) - u(x)|^p \, dh \, dx \,. \tag{3.17}$$

Из (3.17), (3.14) следует, что при $\nu \leqslant \nu(\varepsilon)$

$$\int\limits_{R^n} |J_\nu * u(x) - u(x)|^p \, dx \leqslant \varepsilon_1, \tag{3.18}$$

то есть множество K_ν при $\nu \leqslant \nu(\varepsilon)$ является ε_1-сетью для K.

Докажем, что K_ν предкомпактно в $C(\overline{G})$. По аналогии с (3.17) нетрудно показать, что

$$|J_\nu * u(x)| \leqslant \left(\sup_{x \in R^n} J_\nu(x) \right)^{1/p} \|u\|_p \,,$$

$$|J_\nu * u(x+h) - J_\nu * u(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sup_{x \in R^n} J_\nu(x) \right)^{1/p} \left(\int\limits_{R^n} |u(x+h) - u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} .$$

Из этих оценок, ограниченности множества K в $L_p(R^n)$ и неравенства (3.14) следуют при фиксированном $\nu \leqslant \nu(\varepsilon)$ равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность множества K_ν в $C(\overline{G})$. Тогда по теореме Арцела K_ν предкомпактно в $C(\overline{G})$. Поэтому существует для K_ν конечная ε_2-сеть, $\varepsilon_2 = \varepsilon_1/(\operatorname{mes}\Omega)$. Пусть это множество $\{\psi_j\}_{j=1}^m \subset C(\overline{G})$. Обозначим через $\widetilde{\psi}_j$ продолжение функции ψ_j нулем вне $\overline{G}$. Для любого $u \in K$ найдется номер j^* такой, что

$$\int\limits_{\overline{G}} |u(x) - \widetilde{\psi}_{j^*}(x)|^p \, dx \leqslant \varepsilon_2 \,. \tag{3.19}$$

Имеем

$$\int\limits_{R^n} |u(x) - \widetilde{\psi}_{j^*}(x)|^p\,dx = \int\limits_{R^n\setminus\overline{G}} |u(x)|^p\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\overline{G}} |u(x) - \widetilde{\psi}_{j^*}(x)|^p\,dx \leqslant \int\limits_{R^n\setminus\overline{G}} |u(x)|^p\,dx +$$

$$+ 2^p \int\limits_{\overline{G}} \Big(|u(x) - J_\nu * u(x)|^p + |J_\nu * u(x) - \widetilde{\psi}_{j^*}(x)|^p\Big)\,dx\,.$$

Из оценок (3.15), (3.18), (3.19) следует, что правая часть последнего неравенства не превосходит ε. Это означает, что конечное множество $\{\widetilde{\psi}_j\}_{j=1}^m$ является ε-сетью для K. Теорема доказана.

Глава 2

ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА ЦЕЛОГО ПОРЯДКА

В этой главе для произвольной области $\Omega \subset R^n$ определяются пространства Соболева целого порядка и устанавливаются их основные свойства.

§ 1. Распределения

В этом параграфе вводятся основные понятия, связанные с распространением операции дифференцирования с гладких функций на более широкий класс обобщенных функций или распределений.

Говорят, что последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ из $C_0^\infty(\Omega)$ сходится к функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, если

(i) существует $K \subset\subset \Omega$ такое, что $\operatorname{supp} \varphi_k \subset K$ для всех k;

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty} D^\alpha \varphi_k(x) = D^\alpha \varphi(x)$ равномерно на K для каждого мультииндекса α.

Множество $C_0^\infty(\Omega)$, наделенное данной сходимостью, называют пространством пробных функций и обозначают $D(\Omega)$. Соответственно и введенная выше сходимость называется сходимостью в $D(\Omega)$.

Заметим, что если $\varphi_k \to \varphi$ в $D(\Omega)$, то для любого мультииндекса α последовательность $D^\alpha \varphi_k$ сходится к $D^\alpha \varphi$ в $D(\Omega)$. То есть оператор дифференцирования $D^\alpha : D(\Omega) \to D(\Omega)$ непрерывен (в смысле сходимости в $D(\Omega)$). Кроме того, отметим также, что из утверждений (b) и (d) теоремы 1.5 с учетом включения $\operatorname{supp} J_\varepsilon * \varphi \subset \operatorname{supp} \varphi + \overline{O_\varepsilon}$ следует сходимость $J_\varepsilon * \varphi \to \varphi$ в $D(\Omega)$ для любой пробной функции φ.

Определение 2.1. Линейный функционал T на пространстве $D(\Omega)$ называется распределением или обобщенной функцией на Ω, если он непрерывен на $D(\Omega)$, то есть $T(\varphi_k) \to 0$ для всякой последовательности $\varphi_k \to 0$ в $D(\Omega)$. Множество всех распределений на Ω обозначается через $D'(\Omega)$.

Множество $D'(\Omega)$ является линейным пространством.

Определение 2.2. Последовательность распределений $T_k \in D'(\Omega)$ сходится к распределению $T \in D'(\Omega)$ или, короче, $T_k \to T$ в $D'(\Omega)$, если $T_k(\varphi) \to T(\varphi)$ для всех $\varphi \in D(\Omega)$. Множество $D'(\Omega)$, наделенное такой сходимостью, называется пространством распределений.

Пример 2.1. Пусть $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Формулой

$$T_u(\varphi) = \int\limits_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx \quad \forall\varphi \in D(\Omega) \tag{1.1}$$

определим линейный функционал на пространстве пробных функций $D(\Omega)$. Пусть $\{\varphi_k\}$ любая последовательность такая, что $\varphi_k \to 0$ в $D(\Omega)$. Тогда найдется компактное множество K такое, что $\operatorname{supp}\varphi_k \subset K$ для любого $k \geqslant 1$, и $\varphi_k(x) \to 0$ равномерно на K. Поэтому

$$|T_u(\varphi_k)| \leqslant \max_{x\in K} |\varphi_k(x)| \int\limits_K |u(x)|dx \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Это означает, что $T_u \in D'(\Omega)$. Таким образом, всякая локально интегрируемая функция u по формуле (1.1) определяет обобщенную функцию на Ω. Такие обобщенные функции называют регулярными. Часто в таких случаях отождествляют функцию u и распределение T_u.

Как показывает следующая теорема, соответствие между регулярными и локально интегрируемыми функциями, задаваемое формулой (1.1), взаимнооднозначно на классах эквивалентных функций.

Теорема 2.1. *Если $u, v \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ и $T_u = T_v$, то $u(x) = v(x)$ почти всюду в Ω.*

Утвеждение этой теоремы очевидным образом следует из леммы 1.2, поскольку

$$\int\limits_{\Omega} (u(x) - v(x))\,\varphi(x)\,dx \;=\; T_u(\varphi) \;-\; T_v(\varphi) \;=\; 0 \qquad \forall\varphi \in D(\Omega).$$

Пример 2.2. Пусть $a \in \Omega$. Определим на $D(\Omega)$ линейный функционал δ_a, положив $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$ для каждой пробной функции $\varphi \in D(\Omega)$. Если $\varphi_n \to 0$ в $D(\Omega)$, то $\varphi_n(x) \to 0$ во всех точках $x \in \Omega$. Следовательно, $\delta_a(\varphi_n) = \varphi_n(a) \to 0$. Таким образом, δ_a является распределением на Ω, которое называют дельта-функцией или функцией Дирака, сосредоточенной в точке a. Можно показать, что дельта-функцию нельзя представить в интегральном виде (1.1), то есть она не порождается никакой локально интегрируемой функцией. Однако легко построить последовательность $u_k \in L_\infty(\Omega)$ такую, что $T_{u_k} \to \delta_a$ в $D'(\Omega)$. Например, выбрав последовательность положительных чисел $\rho_k \to 0$, определим $u_k(x) = 0$ при $x \notin O_{\rho_k}(a)$ и $u_k(x) = 1/v_k$ при $x \in O_{\rho_k}(a)$, где $O_{\rho_k}(a)$ обозначает шар радиуса ρ_k в R^n с центром в точке a, v_k — объем этого шара. Для произвольной функции $\varphi \in D(\Omega)$ по теореме о среднем найдется точка $x_k \in \overline{O_{\rho_k}(a)}$ такая, что

$$T_{u_k}(\varphi) = \frac{1}{v_k} \int\limits_{O_{\rho_k}(a)} \varphi dx = \varphi(x_k) \to \varphi(a) = \delta_a(\varphi) \quad (k \to \infty).$$

В действительности, имеет место следующий общий результат: для произвольного распределения $T \in D'(\Omega)$ существует последовательность функций $u_k \in C^\infty(\Omega)$ такая, что $T_{u_k} \to T$ в $D'(\Omega)$; другими словами, отождествляя регулярные распределения с порождающими их локально интегрируемыми функциями, можно сказать, что пространство $C^\infty(\Omega)$ (секвенциально) плотно в пространстве распределений $D'(\Omega)$.

Если $u \in C^m(\Omega)$ и $\varphi \in D(\Omega)$, то по формуле интегрирования по частям

$$\int\limits_\Omega D^\alpha u(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x)dx \tag{1.2}$$

для $|\alpha| \leqslant m$. Таким образом, если распределение T_u порождается функцией точки $u(x)$ по формуле (1.1), а T_v — функцией $v(x) = D^\alpha u(x)$, то тождество (1.2) можно переписать в виде $T_v(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T_u(D^\alpha \varphi)$, или, если обозначить распределение T_v через $D^\alpha T_u$, в следующем виде

$$D^\alpha T_u(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T_u(D^\alpha \varphi) \qquad \forall \varphi \in D(\Omega). \tag{1.3}$$

Тождество (1.3) можно положить в основу определения производной $D^\alpha T$ для произвольного распределения $T \in D'(\Omega)$, а не только для порождаемого дифференцируемой функцией. Действительно, если $T \in D'(\Omega)$ и $\varphi_n \to 0$ в $D(\Omega)$, то для фиксированного мультииндекса α по определению $D^\alpha\varphi_n \to 0$, а потому $(-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha\varphi_n) \to 0$ в силу непрерывности функционала T на $D(\Omega)$. Таким образом, линейный функционал $\varphi \to (-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha\varphi)$ непрерывен на $D(\Omega)$, то есть является распределением, которое естественно обозначить через $D^\alpha T$. Следовательно, формула (1.3) определяет производную распределения $T \in D'(\Omega)$.

Пример 2.3. Рассмотрим на R функцию Хевисайда:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда для любой $\varphi \in D(R)$

$$DT_H(\varphi) = -T_H(\varphi') = -\int\limits_R H(x)\varphi'(x)dx =$$

$$= -\int\limits_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \delta_0(\varphi).$$

То есть производная распределения T_H равна дельта-функции, сосредоточенной в нуле.

Пример 2.4. Производная дельта-функции определяется следующим образом:

$$D^\alpha\delta_a(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\delta_a(D^\alpha\varphi) = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha\varphi(a) \quad \forall\varphi \in D(\Omega).$$

Определение 2.3. Пусть $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Если для мультииндекса α существует функция $v \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ такая, что $D^\alpha T_u = T_v$, то функция v называется слабой или обобщенной производной функции u и обозначается через $D^\alpha u$.

Таким образом, функция u и ее слабая производная $D^\alpha u = v$ связаны между собой интегральным тождеством

$$\int\limits_\Omega v\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_\Omega u(x)D^\alpha\varphi(x)dx \qquad \forall\varphi \in D(\Omega).$$

Если у локально интегрируемой функции существует слабая производная, то, как следует из теоремы 2.1, она определяется единственным образом, с точностью до класса эквивалентных функций, то есть отличающихся друг от друга лишь на множестве меры нуль в Ω.

Пример 2.5. Рассмотрим на R функцию $|x|$, у которой не существует классической производной в точке 0, и покажем, что у этой функции слабая производная существует и равна $\operatorname{sign}(x)$. Действительно, для любой функции $\varphi \in D(R)$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)dx + \int_{0}^{\infty} x\varphi'(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx - \int_{0}^{\infty} \varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(x)\varphi(x)dx,$$

откуда по определению получаем $\frac{d}{dx}|x| = \operatorname{sign}(x)$ в слабом смысле.

Пример 2.6. Пусть $u(x) = \operatorname{sign}(x)$. Нетрудно проверить, что имеет место равенство $\frac{d}{dx}T_u = 2\delta_0$ в смысле распределений $D'(R)$. В то же время в $\Omega = R \setminus \{0\}$ функция u слабо дифференцируема (более того, $u \in C^\infty(\Omega)$) и ее производная равна нулю. Таким образом, данный пример показывает, что производная зависит не только от функции, но и от области, на которой она рассматривается как распределение. В этом примере пространство пробных функций $D(R)$ шире пространства $D(R \setminus \{0\})$, что приводит к разным результатам при вычислении производных.

В силу формулы интегрирования по частям, для функций из $C^m(\Omega)$ все производные до порядка m включительно совпадают с обобщенными производными. В следующей теореме даются условия, когда из существования обобщенной производной следует существование классической.

Теорема 2.2. *Если $u, f \in C(\Omega)$ и $D_j u = f$ в слабом смысле, то $D_j u = f$ в обычном смысле.*

Доказательство. Пусть $G \subset\subset \Omega$ — произвольная область. По теореме 1.5 функция $u_\varepsilon = J_\varepsilon * u \in C^\infty(\Omega)$, и при достаточно малых ε для каждого $x \in G$ функция $\varphi_x(y) = J\left((x-y)/\varepsilon\right)$ принадлежит пространству $D(\Omega)$ как функция переменной y. Поэтому, так как $D_j u = f$ в слабом смысле, мы можем записать

$$D_j u_\varepsilon = \varepsilon^{-n} \int\limits_{R^n} u(y) D_{x_j} J(\frac{x-y}{\varepsilon}) dy = -\varepsilon^{-n} \int\limits_{R^n} u(y) D_{y_j} \varphi_x(y) dy =$$

$$= \varepsilon^{-n} \int\limits_{R^n} f(y) \varphi_x(y) dy = J_\varepsilon * f(x).$$

По утверждению (d) теоремы 1.5 при $m = 0$ на области G имеет место равномерная сходимость $u_\varepsilon \to u$ и $D_j u_\varepsilon = J_\varepsilon * f \to f$ при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, $D_j u = f$ всюду в области G. В силу произвольности области $G \subset\subset \Omega$ это означает, что $D_j u = f$ всюду в области Ω.

Теорема 2.3. *Для любого мультииндекса α оператор обобщенного дифференцирования D^α является замкнутым оператором в $L_p(\Omega)$, то есть $v = D^\alpha u$, если $u_n \to u$ и $D^\alpha u_n \to v$ в $L_p(\Omega)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что если $u_n \to 0$ и $D^\alpha u_n \to v$ в $L_p(\Omega)$, то $v = 0$. Для произвольной функции $\varphi \in D(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega v(x)\varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega D^\alpha u_n \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega u_n D^\alpha \varphi dx = 0.$$

По теореме 2.1 $v = 0$. Теорема доказана.

§ 2. Определение пространства Соболева, основные свойства

Для целого неотрицательного m и $p \in [1, \infty]$ положим

$$\|u\|_{m,p} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{0 \leqslant \alpha \leqslant m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}, & p \in [1,\infty), \\ \max\limits_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha u\|_\infty, & p = \infty, \end{cases}$$

(производные здесь и всюду далее понимаются в обобщенном смысле). На любом векторном пространстве, состоящим из функций, для которых правая часть конечна, этот функционал будет нормой. Определим следующие пространства:

1) $H_p^m(\Omega)$ — пространство, образованное пополнением линейного пространства $\Big\{u \in C^m(\Omega) \mid \quad \|u\|_{m,p} < \infty\Big\}$ по норме $\|\cdot\|_{m,p}$;

2) пространство

$$W_p^m(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) \mid \quad D^\alpha u \in L_p(\Omega)\ \forall \alpha, |\alpha| \leqslant m\}\,;$$

3) $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$ — пространство, являющееся замыканием $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$\|\cdot\|_{m,p}$.

Очевидно, что имеют место теоретико-множественные и топологические включения $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega) \subset W_p^m(\Omega) \subset L_p(\Omega)$. Ниже будет показано, что $H_p^m(\Omega) = W_p^m(\Omega)$ для любой области Ω. Введенные пространства называют пространствами Соболева.

Теорема 2.4. *Пространство $W_p^m(\Omega)$ полно при $1 \leqslant p \leqslant \infty$, рефлексивно при $1 < p < \infty$, сепарабельно при $1 \leqslant p < \infty$ и гильбертово при $p = 2$ относительно скалярного произведения*

$$(u, v) = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

Доказательство. Если последовательность (u_n) является последовательностью Коши в $W_p^m(\Omega)$, то существуют функции $u \in L_p(\Omega)$ и v_α, такие, что $u_n \to u$ и $D^\alpha u_n \to v_\alpha$ в $L_p(\Omega)$ для каждого мультииндекса α, $|\alpha| \leqslant m$. По теореме 2.3 оператор D^α замкнут в $L_p(\Omega)$, а потому $v_\alpha = D^\alpha u$. Это означает, что $u \in W_p^m(\Omega)$ и $u_n \to u$ в $W_p^m(\Omega)$. Итак, у любой последовательности Коши в $W_p^m(\Omega)$ в этом пространстве существует предел, то есть пространство Соболева $W_p^m(\Omega)$ полно. Пусть N обозначает количество мультииндексов α, таких, что $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$. Тогда оператор $Pu = (D^\alpha u)_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m}$ осуществляет изоморфизм пространства $W_p^m(\Omega)$ на замкнутое подпространство декартова произведения $(L_p(\Omega))^N$. Пространство $L_p(\Omega)$ сепарабельно при $p \in [1, \infty)$, рефлексивно при $p \in (1, \infty)$ и гильбертово при $p = 2$. Очевидно, таковым же будет $(L_p(\Omega))^N$. Эти свойства, как известно, наследуются любым замкнутым подпространством, в частности, и подпространством $P(W_p^m(\Omega))$, что завершает доказательство, в силу изоморфизма P.

Из полноты пространства $W_p^m(\Omega)$ немедленно вытекает

Следствие 2.1. $H_p^m(\Omega) \subset W_p^m(\Omega)$.

Лемма 2.1. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $u \in W_p^m(\Omega)$. *Если подобласть* $\Omega' \subset\subset \Omega$, *то* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon * u = u$ *в* $W_p^m(\Omega')$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Для произвольной функции $\varphi \in D(\Omega')$ имеем

$$\int\limits_{\Omega'} J_\varepsilon * u(x)\, D^\alpha\varphi(x)\, dx = \int\limits_{R^n} J_\varepsilon(y)\left(\int\limits_{\Omega'} \widetilde{u}(x-y) D^\alpha\varphi(x)\, dx\right) dy =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\int\limits_{R^n} J_\varepsilon(y)\left(\int\limits_{\Omega'} D_x^\alpha\widetilde{u}(x-y)\,\varphi(x)\, dx\right) dy =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\int\limits_{\Omega'} (J_\varepsilon * D^\alpha u(x))\,\varphi(x)\, dx\,,$$

где $\widetilde{u}$ обозначает продолжение функции u нулем вне Ω'. Таким образом, $D^\alpha J_\varepsilon * u = J_\varepsilon * D^\alpha u$ в слабом смысле в Ω'. Так как $D^\alpha u \in L_p(\Omega)$ при $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$, то по теореме 1.5 (c)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|D^\alpha J_\varepsilon * u - D^\alpha u\|_{p,\Omega'} = \lim_{\varepsilon\to 0} \|J_\varepsilon * D^\alpha u - D^\alpha u\|_{p,\Omega'} = 0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|J_\varepsilon * u - u\|_{m,p,\Omega'} = 0$. Лемма доказана.

Теорема 2.5. *Если* $1 \leqslant p < \infty$, *то* $H_p^m(\Omega) = W_p^m(\Omega)$.

Доказательство. По следствию 2.1 достаточно доказать, что $W_p^m(\Omega)$ вкладывается в $H_p^m(\Omega)$. Для этого установим, что для любого $\varepsilon > 0$ и всякого $u \in W_p^m(\Omega)$ найдется функция $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ со свойством

$$\|u - \varphi\|_{m,p} < \varepsilon\,.$$

Пусть $\Omega_0 = \Omega_{-1} = \emptyset$ и для натурального k положим

$$\Omega_k = \{x \in \Omega \mid\ |x| < k,\ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > 1/k\}\,.$$

Тогда семейство открытых множеств $\mathcal{O} = \{U_k\}_{k=1}^{\infty}$, $U_k = \Omega_{k+1} \cap \left(\overline{\Omega_{k-1}}\right)^c$, является покрытием области Ω. По теореме 1.1 существует C^{∞}-разбиение единицы Ψ для Ω, подчиненное $\mathcal{O}$. Определим следующие множества функций:

$$\Phi_k = \{\psi \in \Psi \mid \ \operatorname{supp} \psi \subset U_k\}, \quad k = \overline{1, \infty},$$

$$\Psi_1 = \Phi_1, \quad \Psi_{k+1} = \Phi_{k+1} \setminus \left(\bigcup_{j \leqslant k} \Psi_j\right).$$

Ясно, что $\Psi = \bigcup\limits_k \Psi_k$ и $\Psi_k \bigcap \Psi_j = \emptyset$ при $k \neq j$. Пусть $\psi_k(x) = \sum\limits_{\psi \in \Psi_k} \psi(x)$. Тогда $\psi_k \in C_0^{\infty}(U_k)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) = 1$ на Ω.

Для $\delta > 0$ носитель функции $J_\delta * (\psi_k u)$ содержится в $U_k + \overline{O}_\delta$. Поэтому при $\delta < 1/(k+1)(k+2)$ для любых $x \in U_k,\ y \in \overline{O}_\delta$ будем иметь

$$|x+y| \ \geqslant\ |x| - |y| \ >\ 1/(k+1)\ -\ \delta > 1/(k+2)\,.$$

Это означает, что $U_k + \overline{O}_\delta \ \subset\ V_k \ =\ \Omega_{k+2} \bigcap \left(\overline{\Omega_{k-2}}\right)^c$. Следовательно, $\operatorname{supp} J_\delta * (\psi_k u) \ \subset\ V_k \ \subset\subset\ \Omega$. Поскольку $\psi_k u \in W_p^m(\Omega)$, по лемме 2.1 мы можем выбрать $\delta_k < 1/(k+1)(k+2)$ так, что

$$\|J_{\delta_k} * (\psi_k u) - \psi_k u\|_{m,p,\Omega} = \|J_{\delta_k} * (\psi_k u) - \psi_k u\|_{m,p,V_k} < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Пусть $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} J_{\delta_k} * (\psi_k u)$. Заметим, что, если $G \subset\subset \Omega$, то лишь конечное число слагаемых в этой сумме отлично от нуля на G. Следовательно, φ принадлежит $C^{\infty}(\Omega)$. Для $x \in \Omega$ мы можем записать $u(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \psi_j(x) u(x)$. Поэтому

$$\|u - \varphi\|_{m,p,\Omega} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \left\|J_{\delta_j} * (\psi_j u) - \psi_j u\right\|_{m,p,\Omega} < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

Итак, для произвольной $u \in W_p^m(\Omega)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует функция $\varphi \in C^{\infty}(\Omega)$ такая, что $\|u - \varphi\|_{m,p,\Omega} < \varepsilon$. Теорема доказана.

В заключение этого раздела покажем, что теорема 2.5 неверна при $p = \infty$. Например, функция $u(x) = |x|$ на интервале $\Omega = (-1, 1)$ принадлежит пространству $W_{\infty}^1(\Omega)$, но не принадлежит $H_{\infty}^1(\Omega)$, так как для произвольной функции $\varphi \in C^1(\Omega) \supset C^\infty(\Omega)$ имеем оценку для разности производных $\|u' - \varphi'\|_\infty \geqslant 1$. Действительно, в нуле производные $u'(x)$ и $\varphi'(x)$ имеют односторонние пределы. Поэтому, если $\varphi'(0) \geqslant 0$, то $|u'(x) - \varphi'(x)| \geqslant 1$ в левой полуокрестности нуля, а, если $\varphi'(0) \leqslant 0$, то $|u'(x) - \varphi'(x)| \geqslant 1$ в правой полуокрестности нуля.

§ 3. Аппроксимация гладкими функциями

В теореме 2.5 фактически утверждается, что множество функций $C^\infty(\Omega) \cap W_p^m(\Omega)$ плотно в $W_p^m(\Omega)$ при $p < \infty$. Можно ли в этом утверждении заменить $C^\infty(\Omega)$ на более узкий класс $C^\infty(\overline{\Omega})$? Ответ на этот вопрос существенно зависит от свойств области Ω, и в общем случае отрицателен, как показывает следующий простой пример.

Пусть $\Omega = (-1, 1) \setminus \{0\}$. Покажем, что $C^1(\overline{\Omega}) = C^1[-1, 1]$ не плотно в $W_p^1(\Omega)$. Если это не так, то для функции $u(x) = \operatorname{sign}(x)$ найдется последовательность $u_k \in C^1[-1, 1]$, сходящаяся к u в $W_p^1(\Omega)$. Из непрерывности функций u_k и их производных в нуле вытекает, что эта последовательность является фундаментальной в пространстве $W_p^1(-1, 1)$. Пусть функция $\widetilde{u} \in W_p^1(-1, 1)$ — предел последовательности $\{u_k\}$ в пространстве $W_p^1(-1, 1)$. Очевидно, что $\|u_k - \widetilde{u}\|^p_{W_p^1(\Omega)} = \|u_k - \widetilde{u}\|^p_{W_p^1(-1,1)}$, поэтому $\widetilde{u}(x) = \operatorname{sign}(x)$ почти всюду на Ω, и, следовательно, функция $\operatorname{sign}(x)$ имеет слабую производную из $L_p(-1, 1)$. С другой стороны, в примере 2.6 показано, что слабая производная функции $\operatorname{sign}(x)$ равна $2\,\delta(x)$. Полученное противоречие доказывает неверность нашего предположения. Аналогичные контрпримеры можно построить и в многомерном случае. Например, для прямоугольника с разрезом:

$$\Omega = \{x \in R^2 \mid \quad 0 < |x_1| < 1, 0 < x_2 < 1\}$$

функцию $u(x) = \operatorname{sign}(x_1)$, принадлежащую любому классу $W_p^m(\Omega)$, нельзя приблизить гладкими функциями в $\overline{\Omega} = [-1, 1] \times [0, 1]$ в метрике пространства $W_p^1(\Omega)$. Существенным моментом является то, что в этих примерах область лежит "по обе стороны" от некоторой части своей границы. Достаточно широкий класс областей, определяемый ниже, исключает подобную ситуацию, и для таких областей будет доказана плотность $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W_p^m(\Omega)$ в $W_p^m(\Omega)$.

Будем говорить, что область Ω обладает свойством сегмента, если для каждой точки $x \in \partial\Omega$ существуют ее окрестность U_x и ненулевой вектор y_x такие, что, если $z \in \overline{\Omega} \cap U_x$, то $z + ty_x \in \Omega$ при $0 < t < 1$. Свойство сегмента предполагает некоторую гладкость границы. Так, например, если в каждой точке $\partial\Omega$ существует вектор внутренней нормали $\nu(x)$, то область Ω будет удовлетворять свойству сегмента, поскольку в качестве y_x можно выбрать вектор $\varepsilon\,\nu(x)$ с малым значением параметра ε.

Теорема 2.6. *Если Ω удовлетворяет свойству сегмента, то множество сужений на Ω функций из $C_0^\infty(R^n)$ плотно в $W_p^m(\Omega)$ для $1 \leqslant p < \infty$.*

Доказательство. Пусть f — функция из $C_0^\infty(R^n)$ такая, что $f(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1$, и $f(x) = 0$ при $|x| \geqslant 2$. Положим $f_\varepsilon(x) = f(\varepsilon x)$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Тогда $f_\varepsilon(x) = 1$, если $|x| \leqslant 1/\varepsilon$, и $|D^\alpha f_\varepsilon(x)| \leqslant c\varepsilon^{|\alpha|} \leqslant c$ для всех $|\alpha| \leqslant m$ и $x \in R^n$, где c — некоторая константа. Если $u \in W_p^m(\Omega)$, то, очевидно, функция $u_\varepsilon = f_\varepsilon u \in W_p^m(\Omega)$ имеет компактный носитель, и

$$|D^\alpha u_\varepsilon| \leqslant c_1 \sum_{\beta \leqslant \alpha} |D^\beta u(x)|.$$

Полагая $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : |x| > 1/\varepsilon\}$, будем иметь при $\varepsilon \to 0$

$$\|u - u_\varepsilon\|_{m,p,\Omega} = \|u - u_\varepsilon\|_{m,p,\Omega_\varepsilon} \leqslant \|u\|_{m,p,\Omega_\varepsilon} + \|u_\varepsilon\|_{m,p,\Omega_\varepsilon} \leqslant c_2 \|u\|_{m,p,\Omega_\varepsilon} \to 0.$$

Таким образом, любая функция класса $W_p^m(\Omega)$ может быть аппроксимирована в норме этого пространства функциями с компактными в R^n носителями.

Итак, пусть $u \in W_p^m(\Omega)$ и $K = \operatorname{supp} u$ — компакт. Тогда множество $F = K \setminus (\bigcup\limits_{x \in \partial\Omega} U_x)$ также компактно и содержится в Ω, где U_x — окрестности, фигурирующие в определении области со свойством сегмента. Поэтому существует открытое множество U_0 такое, что $F \subset\subset U_0 \subset\subset \Omega$. Из семейства $\{U_x\}$ можно выбрать конечное подсемейство $U_1, U_2, \ldots, U_k$ такое, что $K \subset U_0 \bigcup U_1 \bigcup \ldots \bigcup U_k$. Более того, существуют открытые множества $\widetilde{U}_j \subset\subset U_j$ такие, что $K \subset \bigcup\limits_{0 \leqslant j \leqslant k} \widetilde{U}_j$. Пусть множество Ψ является C^∞-разбиением единицы для K, подчиненным покрытию $\{\widetilde{U}_j\}$, и пусть ψ_j обозначает сумму конечного множества функций $\psi \in \Psi$, носители которых лежат в $\widetilde{U}_j$. Предположим, что для каждого j существует функция $\varphi_j \in C_0^\infty(R^n)$ такая, что

$$\|\psi_j u - \varphi_j\|_{m,p,\Omega} < \frac{\varepsilon}{k+1}. \tag{3.1}$$

Тогда для $\varphi = \sum \varphi_j$

$$\|u - \varphi\|_{m,p,\Omega} \leqslant \sum_{0 \leqslant j \leqslant k} \|\psi_j u - \varphi_j\|_{m,p,\Omega} < \varepsilon.$$

Функцию $\varphi_0 \in C_0^\infty(R^n)$, удовлетворяющую (3.1), можно найти в силу леммы 2.1. Осталось, таким образом, построить функции $\varphi_j \in C_0^\infty(R^n)$ для $1 \leqslant j \leqslant k$ со свойством (3.1).

Для фиксированного j продолжим функцию $u_j = \psi_j u$ нулем вне Ω. Тогда $u_j \in W_p^m(R^n \setminus \Gamma)$, где $\Gamma = \overline{\widetilde{U}_j} \bigcap \partial\Omega$. Пусть y — ненулевой вектор, соответствующий множеству U_j в определении свойства сегмента, а

$$\Gamma_t \;=\; \Gamma \;-\; ty, \qquad 0 < t < \min\left(1,\; \frac{\operatorname{dist}(\widetilde{U}_j,\; R^n \setminus U_j)}{|y|}\right).$$

Тогда $\Gamma_t \subset U_j$ и $\Gamma_t \bigcap \overline{\Omega} = \emptyset$ по свойству сегмента. Рассмотрим функции $u_{j,t}(x) = u_j(x+ty)$. Ясно, что $u_{j,t} \in W_p^m(R^n \setminus \Gamma_t)$ и $D^\alpha u_{j,t} \to D^\alpha u_j$ в $L_p(\Omega)$, если $t \to 0+$, $|\alpha| \leqslant m$. Таким образом, $u_{j,t} \to u_j$ при $t \to 0+$ в $W_p^m(\Omega)$, и потому достаточно найти $\varphi_j \in C_0^\infty(R^n)$ такую, что $\|\varphi_j - u_{j,t}\|_{m,p}$ мало. Поскольку $\Omega \cap U_j \subset\subset R^n \setminus \Gamma_t$, то по лемме 2.1 этим свойством обладает функция $\varphi_j = J_\delta * u_{j,t}$ при малом $\delta > 0$. Теорема доказана.

Следствие 2.2. $\overset{\circ}{W}{}_p^m(R^n) = W_p^m(R^n)$, $1 \leqslant p < \infty$.

§ 4. Преобразование координат

Определение 2.4. Пусть Φ является взаимнооднозначным преобразованием области $\Omega \subset R^n$ на область $G \subset R^n$ с обратным $\Psi = \Phi^{-1}$, пусть φ_j, ψ_j — компоненты отображений Φ и Ψ, то есть равенства $y = \Phi(x)$ и $x = \Psi(y)$ в покоординатной записи имеют вид

$$y_j = \varphi_j(x), \quad x_k = \psi_k(y), \qquad j, k = 1, \ldots, n.$$

Отображение Φ будем называть m-гладким, если все компоненты φ_j принадлежат $C^m(\overline{\Omega})$ и все компоненты $\psi_j \in C^m(\overline{G})$.

Если u измеримая функция на Ω, то определим измеримую функцию на G равенством

$$Au(y) = u(\Psi(y)). \tag{4.1}$$

Для 1-гладкого отображения Φ, как известно, существуют константы $c_1, c_2 > 0$ такие, что

$$c_1 \leqslant |\det \Phi'(x)| \leqslant c_2 \quad \forall x \in \Omega,$$

где $\Phi'(x) = \partial(y_1, \ldots, y_n)/\partial(x_1, \ldots, x_n)$ — матрица Якоби отображения Φ. Тогда линейный оператор A определяемый формулой (4.1) непрерывен из $L_p(\Omega)$ в $L_p(G)$ и

$$c_1^{1/p} \|u\|_{p,\Omega} \leqslant \|Au\|_{p,G} \leqslant c_2^{1/p} \|u\|_{p,\Omega}.$$

Теорема 2.7. *Если Φ — m-гладкое отображение, $m \geqslant 1$, то оператор A является непрерывным оператором из $W_p^m(\Omega)$ на $W_p^m(G)$, и существует непрерывный обратный оператор A^{-1}.*

Доказательство. Убедимся сначала в справедливости неравенства

$$\|Au\|_{m,p,G} \leqslant c\,\|u\|_{m,p,\Omega} \qquad \forall u \in W_p^m(\Omega). \tag{4.2}$$

По теореме 2.5 для произвольной функции $u \in W_p^m(\Omega)$ существует последовательность $\{u_k\}$ функций из $C^\infty(\Omega)$, сходящаяся в $W_p^m(\Omega)$ к u. Для функций u_k по правилу дифференцирования сложной функции можно записать для производных порядка $|\alpha| \leqslant m$

$$D^\alpha(Au_k)(y) = \sum_{1 \leqslant |\beta| \leqslant |\alpha|} M_{\alpha\beta}(y)(AD^\beta u_k)(y), \tag{4.3}$$

где $M_{\alpha\beta}$ есть полином степени не выше $|\beta|$ от производных порядка не выше $|\alpha|$ различных компонент Ψ. Для $\varphi \in D(G)$ из (4.3) получим

$$(-1)^{|\alpha|} \int\limits_G Au_k(y) D^\alpha \varphi(y)dy = \sum_{1\leqslant|\beta|\leqslant|\alpha|} \int\limits_G M_{\alpha\beta}(y)(AD^\beta u_k)(y)dy, \qquad (4.4)$$

или, после замены переменных $y = \Phi(x)$,

$$(-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u_k(x)(D^\alpha\varphi)(\Phi(x))|\det \Phi'(x)|dx =$$
$$= \sum_{1\leqslant|\beta|\leqslant|\alpha|} \int\limits_\Omega M_{\alpha\beta}(\Phi(x)) D^\beta u_k(x)|\det \Phi'(x)|dx.$$

Так как $D^\beta u_k \to u$ в $L_p(\Omega)$ для $|\beta| \leqslant m$, то мы можем перейти в последнем интегральном тождестве к пределу по $k \to \infty$ и обратным преобразованием $x = \Psi(y)$ получить (4.4) с заменой u_k на u. Это означает справедливость (4.3) в слабом смысле для любой $u \in W_p^m(\Omega)$. Теперь из (4.3) непосредственно следует, что

$$\int\limits_G |D^\alpha(Au)(y)|^p\, dy \leqslant$$
$$\leqslant \Big(\sum_{1\leqslant|\beta|\leqslant|\alpha|} 1\Big)^p \max_{1\leqslant|\beta|\leqslant|\alpha|} \sup_{y\in G} |M_{\alpha\beta}(y)|^p \int\limits_G \left|(D^\beta u)(\Psi(y))\right|^p dy \leqslant$$
$$\leqslant c \max_{1\leqslant|\beta|\leqslant|\alpha|} \int\limits_\Omega \left|D^\beta u(x)\right|^p dx,$$

откуда вытекает оценка (4.2). Обратное неравенство:

$$\|u\|_{m,p,\Omega} \leqslant c'\|Au\|_{m,p,G}\,,$$

из которого следует существование и ограниченность оператора A^{-1}, доказывается аналогично. Теорема доказана.

Глава 3

Теоремы вложения

§ 1. Геометрические свойства областей

Многие свойства соболевских пространств зависят от области Ω. Так, при доказательстве теорем вложения существенно используются регулярность Ω, которая обычно формулируется в терминах геометрических условий. В этом параграфе мы определим пять таких свойств и укажем взаимосвязь между ними.

Сначала введем используемые в дальнейшем обозначения. Пусть $x \in R^n$, B_1 — открытый шар с центром в x, B_2 — открытый шар, не содержащий x. Будем называть множество

$$C_x = B_1 \cap \big\{x + \lambda(y - x) \,\big|\, y \in B_2,\, \lambda > 0\big\}$$

конечным конусом в R^n с вершиной в точке x. Конечный конус с вершиной в x, полученный параллельным переносом конечного конуса C_0 с вершиной в нуле, будем обозначать через $x + C_0 = \{x + y|\, y \in C_0\}$.

Далее, пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n \in R_n$ — линейно независимые векторы. Будем обозначать символом P параллелепипед, построенный по векторам $y_1, y_2, \ldots, y_n$, с вершиной в начале координат:

$$P = \left\{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \,\middle|\, 0 < \lambda_j < 1,\ 1 \leqslant j \leqslant n\right\}.$$

Соответственно, $x + P$ — параллелепипед с вершиной в точке x, полученный параллельным переносом параллелепипеда P. Будем называть точку $c(x + P) = x + (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)/2$ центром параллелепипеда $x + P$. Ясно, что каждый параллелепипед с вершиной в точке x содержит некоторый конечный конус с вершиной в точке x, и наоборот, найдется конечный конус с вершиной в точке x, содержащий параллелепипед $x + P$.

Открытое покрытие множества $S \subset R^n$ называют локально конечным, если любое компактное множество из R^n имеет непустое пересечение лишь с конечным числом элементов этого покрытия. Очевидно, что локально конечное покрытие не более, чем счетно. Если S замкнуто, то любое открытое покрытие S обладает локально конечным подпокрытием.

Определение 3.1. Будем говорить, что область Ω обладает свойством сегмента,[3] если существуют локально конечное покрытие $\{U_j\}$ множества $\partial\Omega$ и ненулевые векторы $\{y_j\}$ такие, что для всех $x \in \overline{\Omega} \cap U_j$ сегмент $x + ty_j$, $0 < t < 1$, принадлежит Ω.

Определение 3.2. Будем говорить, что область Ω обладает свойством конуса, если существует конечный конус C такой, что каждая точка $x \in \Omega$ является вершиной конечного конуса C_x, содержащегося в Ω и конгруэнтного C.

Определение 3.3. Будем говорить, что область Ω обладает равномерным свойством конуса, если существуют локально конечное покрытие $\{U_j\}$ множества $\partial\Omega$ и конечные конусы $\{C_j\}$, каждый из которых конгруэнтен некоторому фиксированному конусу C, такие, что

1) диаметры всех U_j ограничены некоторым числом M;

2) существует $\delta > 0$ такое, что

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \supset \Omega_\delta \equiv \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\};$$

3) для каждого j

$$\bigcup_{x \in \Omega \cap U_j} (x + C_j) \;\equiv\; Q_j \;\subset \Omega;$$

4) найдется конечное R такое, что любой набор множеств Q_j, число которых больше R, имеет пустое пересечение.

Определение 3.4. Будем говорить, что область Ω обладает сильным локальным свойством Липшица, если существуют положительные

[3]Это свойство уже встречалось в предыдущей главе. Здесь оно приведено для наглядности при сравнении с другими свойствами.

числа δ и M, а также локально конечное открытое покрытие $\{U_j\}$ множества $\partial\Omega$, для которых выполнены следующие условия:

1) найдется конечное R такое, что любой набор множеств U_j, число которых больше R, имеет пустое пересечение;

2) для каждой пары точек $x, y \in \Omega_\delta$ таких, что $|x-y| < \delta$, существует j со свойством

$$x, y \in V_j = \{x' \in U_j \mid \ \mathrm{dist}(x', \partial U_j) > \delta\};$$

3) для каждого U_j существуют функция $(n-1)$-ого вещественного аргумента f_j и декартова система координат $(\xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_n})$ такие, что множество $\Omega \cap Uj$ представляется неравенством

$$\xi_{j_n} < f_j(\xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_{n-1}}),$$

и при любых ξ и η из $\Omega \cap U_j$ для функции f_j имеет место следующая оценка

$$|f_j(\xi') - f_j(\eta')| \leqslant M\,|\xi' - \eta'|,$$

где $\xi' = (\xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_{n-1}})$, $\eta' = (\eta_{j_1}, \ldots, \eta_{j_{n-1}})$.

Заметим, что в случае ограниченных областей для выполнения сильного локального свойства Липшица достаточно существования в каждой точке $x \in \partial\Omega$ окрестности U_x такой, что $\partial\Omega \cap U_x$ есть график липшиц-непрерывной функции.

Определение 3.5. Будем говорить, что область Ω обладает свойством равномерной C^m-регулярности, если существуют локально конечное открытое покрытие $\{U_j\}$ множества $\partial\Omega$ и для каждого U_j взаимно однозначная m-гладкая функция Φ_j, отображающая U_j на множество

$$B = \{y \in R^n \mid \ |y| < 1\},$$

для которых выполнены следующие условия:

1) найдется $\delta > 0$, при котором $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Psi_j(\,\{y \in R^n \mid |y| < 1/2\}\,) \supset \Omega_\delta$, здесь $\Psi_j = \Phi_j^{-1}$;

2) найдется конечное R такое, что любой набор множеств U_j, число которых больше R, имеет пустое пересечение;

3) $\Phi_j(U_j \cap \Omega) = \{y \in B \,|\, y_n > 0\}$ для каждого j;

4) существует число М такое, что для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$, для всех α, $|\alpha| \leqslant m$, и для каждого j справедливы оценки

$$|\,D^\alpha \Phi_{j_i}(x)\,| \leqslant M, \quad x \in U_j, \qquad |\,D^\alpha \Psi_{j_i}(y)\,| \leqslant M, \quad y \in B,$$

здесь $\Phi_{j_i}(x)$ и $\Psi_{j_i}(x)$ обозначают i-тые компоненты $\Phi_j(x)$ и $\Psi_j(x)$ соответственно.

Заметим, что все перечисленные выше свойства, за исключением свойства конуса, предполагают, что область Ω располагается только с одной стороны границы. Так, например, двумерная область

$$\Omega = \{\,(x, y) \in R^2 \,|\, 0 < |x| < 1,\ 0 < y < 1\,\}$$

обладает из выше перечисленных только свойством конуса.

Нетрудно убедиться в том, что имеет место следующая цепочка импликаций: равномерная C^m-регулярность $(m \geqslant 1) \Rightarrow$ сильное локальное свойство Липшица $\Rightarrow$ равномерное свойство конуса $\Rightarrow$ свойство сегмента.

В большинстве доказанных в этой главе теорем вложения предполагается, что область Ω обладает лишь свойством конуса, лишь иногда требуется большая гладкость. Это достигается за счет следующего весьма тонкого результата геометрического характера.

Теорема 3.1. *(Гальярдо [7]). Область Ω, обладающая свойством конуса, может быть представлена в виде объединения конечного числа своих подмножеств:*

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{\aleph} \Omega_j, \qquad \Omega_j \subset \Omega, \tag{1.1}$$

каждое из которых имеет вид

$$\Omega_j = \bigcup_{x \in A_j} (x + P_j), \tag{1.2}$$

где A_j — некоторое подмножество из $\overline{\Omega}$, P_j — открытый параллелепипед с вершиной в нуле. В случае ограниченной области Ω для любого $\rho > 0$ можно построить разбиение области Ω вида (1.1)–(1.2) такое, *что diam(A_j) $\leqslant \rho$. При этом, если ρ достаточно мало, то каждое Ω_j будет обладать сильным локальным свойством Липшица.*

Доказательство. Так как область Ω обладает свойством конуса, то найдется конечный конус C_0 с вершиной в нуле такой, что в любой точке $x \in \Omega$ будет существовать конус C_x, конгруэнтный C_0, с вершиной в x и принадлежащий Ω.

Докажем сначала существование конечных конусов $C_1, \dots, C_k$ с вершинами в нуле таких, что для каждой точки $x \in \Omega$ найдется номер $j^* \in \{1, \dots, k\}$, при котором $(x + C_{j^*}) \subset \Omega$, то есть в любой точке $x \in \Omega$ может быть построен конечный конус, принадлежащий Ω и полученный только параллельным переносом одного из конусов конечного набора $C_1, \dots, C_k$. Для этого, очевидно, достаточно установить существование конечных конусов $C_1, \dots, C_k$ с вершинами в нуле таких, что любой конус, с вершиной в нуле и конгруэнтный C_0, будет содержать один из конусов $C_j,\ 1 \leqslant j \leqslant k$. Доказательство этого факта для простоты и наглядности изложения приведем при $n = 2$. Пусть α — угол при вершине конуса C_0, выберем угол $\alpha_1 < \alpha/2$, обозначим через k целое число, строго большее $2\pi/\alpha_1$. Пусть $S(0, \varepsilon)$ — круг радиуса ε с центром в нуле. Разобьем его на k конечных конусов $C_1, \dots, C_k$ с вершиной в нуле и углом при вершине равным α_1 так, чтобы $\overline{S}(0, \varepsilon) = \bigcup\limits_{j=1}^{k} \overline{C}_j$. Параметр ε выберем меньше высоты конуса C_0. Ясно, что набор конусов $C_1, \dots, C_k$ решает нашу задачу при $n = 2$. В общем случае рассуждения аналогичны.

Далее для каждого C_j построим открытый параллелепипед P_j с вершиной в нуле так, чтобы $P_j \subset C_j$ и $\overline{P}_j \cap \partial C_j = \{0\}$. Очевидно, для любого $x \in \Omega$ найдется номер $j,\ \ 1 \leqslant j \leqslant k$, такой, что

$$x + P_j \ \subset\ x + C_j \ \subset\ C_x \ \subset\ \Omega.$$

Так как $x \in \Omega$, а $\overline{x + P_j}$ — компакт, содержащийся в $(x + C_j) \bigcup \{x\},$ и, следовательно, в Ω, то $y + P_j \subset \Omega$ для всех y, достаточно близких к x. Поэтому для каждого $x \in \Omega$ найдется $y \in \Omega$ и соответствующий номер j такие, что $x \in y + P_j$. Пусть

$$A_j = \{x \in \overline{\Omega} \mid\ x + P_j \subset \Omega\},$$

область Ω_j определим с помощью равенства (1.2). Из вышесказанного следует, что $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{k} \Omega_j$, $\aleph = k$. Утверждения (1.1), (1.2) доказаны.

Пусть далее Ω — ограниченная область, $\rho > 0$ — заданное число. Докажем, что в этом случае возможно разбиение указанного вида такое, что $\operatorname{diam}(A_j) \leqslant \rho$ для всех j. Предположим, что в построенном при доказательстве первой части теоремы разбиении для некоторого j^* оказалось, что $\operatorname{diam}(A_{j^*}) > \rho$. Так как $A_{j^*} \subset \overline{\Omega}$, то $\operatorname{diam}(A_{j^*})$ конечен. Поэтому A_{j^*} можно представить в виде объединения конечного числа подмножеств $A_{j_i^*}$, диаметр которых меньше ρ. Полагаем $P_{j_i^*} = P_{j^*}$ для всех i. После соответствующей перенумерации получим разбиение требуемого типа.

Осталось показать, что при достаточно малом ρ каждая область Ω_j обладает сильным локальным свойством Липшица. Для простоты обозначений в дальнейшем будем опускать индекс j, то есть будем доказывать это утверждение для области $\Omega = \bigcup\limits_{x\in A} (x + P)$, где P — фиксированный параллелепипед, а $\operatorname{diam}(A) \leqslant \rho$.

Обозначим через v_l, $1 \leqslant l \leqslant 2^n$, вершины параллелепипеда P, через Q_l бесконечную пирамиду с вершиной в точке v_l :

$$Q_l \;=\; \{\, y = v_l + \lambda(x - v_l) \mid \; x \in P,\; \lambda > 0\}.$$

Ясно, что $P = \bigcap\limits_{l=1}^{2^n} Q_l$.

Пусть $\Omega^{(l)} = \bigcup\limits_{x\in A} (x + Q_l)$, $\delta = \operatorname{dist}(c(P), \partial P)$, где $c(P)$ — центр P.

Докажем, что для любого шара B радиуса $\sigma = \delta/2$, пересечение которого с Ω не пусто, найдется номер l^* такой, что

$$B \cap \Omega \;=\; B \cap \Omega^{(l^*)}. \tag{1.3}$$

Рассмотрим параллелепипед $x + P$, пересечение которого с B не пусто. Нетрудно видеть, что из-за малости радиуса шар B не может пересекать противоположные грани $x + P$ одновременно. Поэтому B может принадлежать не больше одной вершины параллелепипеда $x + P$. Кроме того, поскольку, $B \cap \Omega$ — непустое подмножество Ω, а $\Omega = \bigcup\limits_{x\in A} (x + P)$, то найдется параллелепипед $x^* + P$, у которого одна из вершин принадлежит шару B. Назовем ее v_{l^*}.Тогда, очевидно,

$$B \cap (x^* + P) = B \cap (x^* + Q_{l^*}). \tag{1.4}$$

Докажем далее, что при малом ρ равенство (1.4) будет справедливым для любого параллелепипеда $x + P$, пересечение которого с B не пусто. Пусть $y \in A$ — еще одна точка, для которой пересечение $y + P$ с B не пусто. Если среди вершин $y + P$, принадлежащих всем граням $y + P$, пересечение которых с B не пусто, встречается v_{l^*}, то равенство (1.4), очевидно, будет справедливым и при $x^* = y$. В противном случае обозначим $v_{l'}$ одну из вершин $y + P$, принадлежащую всем граням $y + P$, которые пересекает B. Поскольку $l' \neq l^*$, то найдутся точки a и b, принадлежащие противоположным граням P, такие, что $x^* + a \in B \cap (x^* + P)$, а $y + b \in B \cap (y + P)$. Учитывая, что $\operatorname{dist}(x^*, y) \leqslant \operatorname{diam} A \leqslant \rho$, можно записать следующую цепочку неравенств

$$\rho \geqslant \operatorname{dist}(x^*, y) = \operatorname{dist}(x^* + b, y + b) \geqslant$$

$$\geqslant \operatorname{dist}(x^* + b, x^* + a) - \operatorname{dist}(x^* + a, y + b) \geqslant 2\delta - 2\sigma = \delta.$$

Если $\rho < \delta$, то эта цепочка неравенств содержит противоречие, следовательно, множество вершин $y + P$, принадлежащих всем граням $y + P$, пересечение которых с B не пусто, обязательно содержит v_{l^*}. Равенство (1.3) доказано.

Построим в R^n декартову систему координат $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ с началом в $c(P)$ так, чтобы ось η_n была направлена от $c(P)$ к точке v_{l^*}. Будем обозначать через $\eta_i(x)$ — i-тую компоненту вектора x в новой системе координат, $e(\eta_i)$ — орт оси η_i.

Пусть $B \cap \Omega \neq B$. Положим $\Gamma_B = \partial(B \cap \Omega) \backslash \partial B$. Ясно, что $\Gamma_B \subset \partial\Omega$ и $\Gamma_B \subset B$. Поэтому для любой точки $x \in \Gamma_B$ найдется положительное число ε такое, что $S(x, \varepsilon) \cap \Omega \subset B \cap \Omega$. По построению координатной системы η точка $x - \varepsilon_1 e(\eta_n) \in B \cap \Omega$ для положительных $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon$. Это означает, что

$$x = \lim_{\varepsilon \to 0+} (x - \varepsilon\, e(\eta_n)) \qquad \forall x \in \Gamma_B. \tag{1.5}$$

Определим функцию

$$F(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \;=\; \sup_{x \in L(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})} \eta_n(x), \tag{1.6}$$

где

$$L(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \;=\; \{x \in B \cap \Omega \,|\;\; \eta_i(x) = \xi_i, \;\; i = 1, \ldots, n-1\}\,.$$

Нетрудно видеть, что неравенство $\xi_n < F(\xi')$, где $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, описывает в B множество $B \cap \Omega^{(l^*)}$, и для $x \in \Gamma_B$ справедливо равенство

$$\eta_n(x) \;=\; F(\eta'(x)), \qquad \eta'(x) \;=\; (\eta_1(x), \ldots, \eta_{n-1}(x)). \tag{1.7}$$

Докажем, что функция F непрерывна по Липшицу. Пусть $x, \bar{x} \in \Gamma_B$. Не ограничивая общности, можно полагать, что $F(\eta'(x)) \geqslant F(\eta'(\bar{x}))$. Имеем

$$\begin{aligned} 0 \;\leqslant\; F(\eta'(x)) \,-\, F(\eta'(\bar{x})) \;=\; \eta_n(x) \,-\, \eta_n(\bar{x}) \;=& \\ =\; \lim_{\varepsilon \to 0} \eta_n\big(x \,-\, \varepsilon\, e(\eta_n)\big) \,-\, \eta_n(\bar{x})\,.& \end{aligned} \tag{1.8}$$

Ясно, что $(x - \varepsilon\, e(\eta_n)) \in B \cap \Omega$, поэтому найдется точка $y_\varepsilon \in A$ такая, что вершиной v_{l^*} параллелепипеда $y_\varepsilon + P$ будет $(x - \varepsilon e(\eta_n))$. Обозначим через z_ε точку пересечения прямой $L(\eta'(\bar{x}))$ с гранью параллелепипеда $y_\varepsilon + P$, примыкающей к $(x - \varepsilon e(\eta_n))$. По построению

$$\eta_n(z_\varepsilon) \;\leqslant\; \eta_n(\bar{x}).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0} \eta_n\big(x \,-\, \varepsilon\, e(\eta_n)\big) \,-\, \eta_n(\bar{x}) \;=\; \lim_{\varepsilon \to 0} \Big\{\eta_n\big(x \,-\, \varepsilon\, e(\eta_n)\big) \,-\, \eta_n(z_\varepsilon)\Big\} \,+& \\ +\, \lim_{\varepsilon \to 0} \{\eta_n(z_\varepsilon) \,-\, \eta_n(\bar{x})\} \;\leqslant\; \lim_{\varepsilon \to 0} \Big\{\eta_n\big(x \,-\, \varepsilon\, e(\eta_n)\big) \,-\, \eta_n(z_\varepsilon)\Big\}\,.& \end{aligned} \tag{1.9}$$

Так как точки $(x - \varepsilon e(\eta_n))$ и z_ε принадлежат одной грани конечного параллелепипеда $y_\varepsilon + P$, то найдется константа M_{l^*} такая, что

$$\begin{aligned} \eta_n\big(x \,-\, \varepsilon\, e(\eta_n)\big) \,-\, \eta_n(z_\varepsilon) \;\leqslant& \\ \leqslant\; M_{l^*}\, |\eta'\big(x \,-\, \varepsilon\, e(\eta_n)\big) \,-\, \eta'(z_\varepsilon)| \;\equiv\; M_{l^*}\, |\eta'(x) \,-\, \eta'(\bar{x})|.& \end{aligned} \tag{1.10}$$

Положим

$$M \;=\; \max_l M_l.$$

Из (1.8)–(1.10) следует, что функция F непрерывна по Липшицу с константой M.

Далее, поскольку область Ω ограничена, то можно построить конечное открытое покрытие $\partial\Omega$, элементами которого являются открытые шары, радиуса σ. Из вышесказанного следует, что для каждого такого шара существует ортогональная система координат, в которой граница области Ω описывается липшиц-непрерывной функцией, определенной в (1.6). Условию 2) в определении сильного локального свойства Липшица легко удовлетворить, если присутствующий в определении параметр δ выбрать, например, равным $\sigma/3$ и потребовать, чтобы расстояние между центрами соседних шаров в покрытии $\partial\Omega$ было меньше $\sigma/3$. Таким образом, область Ω обладает сильным локальным свойством Липшица. Теорема доказана.

§ 2. Теоремы о непрерывном вложении $W_p^m(\Omega)$

В этой главе излагаются результаты о непрерывном вложении пространства $W_p^m(\Omega)$ в пространства следующих типов: в $W_q^j(\Omega)$, $j \leqslant m$, в частности, в $L_q(\Omega)$, в пространства

$$C_B^j(\Omega) = \left\{ u \in C^j(\Omega) \;\middle|\; \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha u| < \infty, \ \ |\alpha| \leqslant j \right\},$$

$$\|u\| = \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant j} \ \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha u|;$$

в пространства $C^{j,\lambda}(\overline{\Omega})$ и в $W_q^j(\Omega^k)$, где через Ω^k обозначено пересечение Ω с k-мерной плоскостью в R^n, рассматриваемое как область в R^k. Заметим, что пространство $C_B(\Omega) \subset C(\Omega)$, но оно шире $C(\overline{\Omega})$. Так, например, функция $\sin(1/x)$ принадлежит $C_B(0,1)$, но не принадлежит $C([0,1])$.

Следует отметить, что используемое в теории пространств Соболева понятие вложения множества X в множество Y шире понятия поэлементного вложения. В частности, область определения функций из X может не совпадать с областью определения элементов Y, как, например, при вложении $W_p^m(\Omega)$ в $W_q^j(\Omega^k)$. В связи с этим необходимо пояснить, что понимается в дальнейшем под непрерывным вложением пространства X в Y.

Пусть X и Y — банаховы пространства вещественнозначных функций, областями определения которых являются Ω_X и $\Omega_Y \subset \Omega_X$ соответственно. Будем говорить, что X непрерывно вложено в Y и обозначать $X \to Y$, если существует линейный ограниченный оператор A, действующий из X в Y, значение которого на элементе z из всюду плотного в X множества $Z \subset C^\infty(\Omega_X)$ совпадает с сужением функции z на Ω_Y. При этом оператор A называют оператором вложения пространства X в Y.

В дальнейшем будет полезным следующее

Замечание 3.1. Для непрерывного вложения X в Y достаточно, чтобы для любого $z \in Z$ имела место оценка

$$\|z\|_Y \leqslant K\,\|z\|_X \tag{2.1}$$

с постоянной K, независящей от z. (Здесь и всюду ниже функция и ее сужение обозначаются одинаково). Действительно, оценка (2.1) означает, что оператор сужения на Z является ограниченным оператором и, следовательно, может быть продолжен с сохранением нормы на все X. Полученный в результате оператор и есть оператор непрерывного вложения X в Y. При этом элемент Au для любого $u \in X$ однозначно определяется равенством

$$A\,u = \lim_{n\to\infty} A\,z_n, \tag{2.2}$$

где $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ — произвольная последовательность из Z, сходящаяся к u.

Отметим, что при вложении $W_p^m(\Omega) \to W_q^j(\Omega)$ элементы Au и u являются пределами одной и той же последовательности $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ из Z в пространствах $W_q^j(\Omega)$ и $W_p^m(\Omega)$ соответственно, поэтому Au можно отождествить с u. Если рассматривать вложение $W_p^m(\Omega)$ в $C_B^j(\Omega)$ или $C^{j,\alpha}(\overline{\Omega})$, то Au — непрерывная функция, в то время как u — класс эквивалентных функции. Поэтому под вложением $W_p^m(\Omega)$ в пространства $C_B^j(\Omega)$ или $C^{j,\alpha}(\overline{\Omega})$ понимается существование в каждом классе эквивалентности из $W_p^m(\Omega)$ функции, принадлежащей $C_B^j(\Omega)$ или $C^{j,\alpha}(\overline{\Omega})$, и Au совпадает с непрерывным представителем этого класса. При вложении $W_p^m(\Omega) \to W_q^j(\Omega^k)$ элемент Au, определенный равенством (2.2), называется следом функции $u \in W_p^m(\Omega)$. Часто вместо Au пишут просто u, различая образ и прообраз по принадлежности к пространству X или Y. Мы тоже будем следовать этой традиции.

Большинство из содержащихся в этом параграфе теорем вложения доказано для областей, обладающих свойством конуса, и лишь некоторые предполагают выполнения более жестких условий. Ниже будет установлено, что постоянная в теоремах вложения для областей, обладающих свойством конуса, зависит от размеров конечного конуса C, участвующего в описании этого свойства. Определим необходимые при этом характеристики конуса C: его высоту и раствор. Пусть $\bar{x}$ — вершина конуса C, а $C^* = \{x \in R^n \,|\, x = \bar{x} + \alpha y,\ \alpha > 0,\ y \in C\}$. Обозначим через C_R пересечение C^* с шаром радиуса R с центром в точке $\bar{x}$. Высотой конуса C будем называть максимальное R среди тех, для которых $C_R \subset C$. Раствором конуса C будем называть площадь $(n-1)$-мерной поверхности, полученной в результате пересечения конуса C^* со сферой единичного радиуса с центром в начале координат.

При доказательстве теорем вложения нам понадобятся следующие вспомогательные результаты.

Лемма 3.1. *Пусть R и R' — ограниченные открытые прямоугольные параллелепипеды в R^n и R^{n-1} соответственно:*

$$R \;=\; \{x \in R^n \mid a_i < x_i < b_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

$$R' \;=\; \{x \in R^{n-1} \mid a_i < x_i < b_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n-1\}.$$

Если $p \geqslant 1$, то для любого $u \in C^\infty(R) \cap W_p^m(R)$ имеет место неравенство

$$\|u(\cdot,\zeta)\|_{0,p,R'} \;\leqslant\; K\,\|u\|_{1,p,R} \quad \forall \zeta \in (a_n, b_n). \tag{2.3}$$

Здесь $K = K(p, b_n - a_n)$.

Доказательство. Согласно теореме 2.6 пространство $C^\infty(\overline{R})$ плотно в $W_p^m(R)$. Поэтому достаточно убедиться в справедливости (2.3) для $u \in C^\infty(\overline{R})$. Если $u \in C^\infty(\overline{R})$, то

$$\int\limits_{R'} |u(x',\cdot)|^p\,dx' \;\in\; C^\infty([a_n,b_n])\,,$$

и по теореме о среднем найдется $\sigma \in [a_n, b_n]$ такое, что

$$\|u\|^p_{0,p,R} \;=\; \int\limits_{a_n}^{b_n}\biggl(\int\limits_{R'} |u(x',x_n)|^p\,dx'\biggr)\,dx_n \;=\; (b_n - a_n)\int\limits_{R'} |u(x',\sigma)|^p\,dx'\,.$$

Для произвольной точки $\zeta \in [a_n, b_n]$ имеем

$$|u(x',\zeta)|^p = \left|u(x',\sigma) + \int\limits_{\sigma}^{\zeta} D_n u(x',t)\,dt\right|^p \leqslant$$

$$\leqslant 2^{p-1}\left[|u(x',\sigma)|^p + |\zeta-\sigma|^{p-1}\int\limits_{\sigma}^{\zeta} |D_n u(x',t)|^p\,dt\right].$$

Интегрируя последнее неравенство по x', нетрудно получить оценку:

$$\|u(\cdot,\zeta)\|^p_{0,p,R'} \leqslant 2^{p-1}\left[\|u(\cdot,\sigma)\|^p_{0,p,R'} + (b_n-a_n)^{p-1}\|D_n\,u\|^p_{0,p,R}\right] \leqslant$$

$$\leqslant 2^{p-1}\left[(b_n-a_n)^{-1}\|u\|^p_{0,p,R} + (b_n-a_n)^{p-1}\|D_n\,u\|^p_{0,p,R}\right],$$

откуда, очевидно, следует (2.3) с константой

$$K = \left[2^{p-1}\max\left\{(b_n-a_n)^{-1},\,(b_n-a_n)^{p-1}\right\}\right]^{1/p}.$$

Лемма доказана.

Отметим, что постоянная K в (2.3) непрерывно зависит от (b_n-a_n) и стремится к бесконечности, если (b_n-a_n) стремится к нулю или к бесконечности.

Лемма 3.2. *Пусть R — прямоугольный параллелепипед, определенный в лемме 3.1. Тогда*

$$W_1^n(R) \to C(\overline{R}),$$

при этом постоянная вложения зависит от n и размеров R.

Доказательство. Пусть x — произвольная точка R. Если $u \in C^\infty(\overline{R})$ и $|\alpha| \leqslant n-1$, то по лемме 3.1 имеем

$$\|D_\alpha\,u(\cdot,x_n)\|_{0,1,R'} \leqslant K_1\,\|D_\alpha\,u\|_{1,1,R}\,.$$

Таким образом,

$$\|u(\cdot,x_n)\|_{n-1,1,R'} \leqslant K_2\,\|u\|_{n,1,R}$$

с постоянной K_2, зависящей от $b_n - a_n$. Повторяя эту процедуру последовательно по всем координатам, нетрудно получить следующее неравенство

$$\|u(\cdot, x_2, x_3, \ldots, x_n)\|_{1,1,(a_1,b_1)} \leqslant K_3 \|u\|_{n,1,R},$$

с постоянной K_3, зависящей от $b_j - a_j$, $2 \leqslant j \leqslant n$. По теореме о среднем найдется $\sigma \in [a_1, b_1]$ такое, что

$$\|u(\cdot, x_2, \ldots, x_n)\|_{1,1,(a_1,b_1)} = (b_1 - a_1)\,|u(\sigma, x_2, \ldots, x_n)|,$$

следовательно,

$$|u(x)| = |u(\sigma, x_2, \ldots, x_n)| + \int\limits_{\sigma}^{x_1} |D_1 u(t, x_2, \ldots, x_n)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant (b_1 - a_1)^{-1} \|u(\cdot, x_2, \ldots, x_n)\|_{0,1,(a_1,b_1)} +$$
$$+ \|D_1 u(\cdot, x_2, \ldots, x_n)\|_{0,1,(a_1,b_1)} \leqslant K \|u\|_{n,1,R}. \qquad (2.4)$$

Теперь предположим, что $u \in W_1^n(R)$. Согласно теореме 2.6 найдется последовательность $u_m \subset C^\infty(\overline{R})$, сходящаяся к u в $W_1^n(R)$. Воспользовавшись (2.4), нетрудно показать, что последовательность u_m фундаментальна в $C(\overline{R})$. В силу полноты этого пространства предел последовательности u_m, назовем его $\tilde{u}$, принадлежит $C(\overline{R})$. Поскольку, очевидно, $W_1^n(R) \to L_1(R)$ и $C(\overline{R}) \to L_1(R)$, то u и $\tilde{u}$ как элементы пространства $L_1(R)$ должны совпадать, то есть $u = \tilde{u}$ почти всюду в R. Лемма доказана.

Следствие 3.1. *Пусть P — n-мерный параллелепипед, тогда*

$$W_1^n(P) \to C(\overline{P}),$$

постоянная вложения зависит от n и P.

Для доказательства этого утверждения, очевидно, достаточно показать, что

$$|u(x)| \leqslant K \|u\|_{n,1,P} \qquad \forall\, u \in C^\infty(\overline{P}), \quad \forall\, x \in \overline{P}. \qquad (2.5)$$

Пусть R — n-мерный куб со стороной равной единице, χ — полилинейное отображение R в P, а $\tilde{u}(y) = u(\chi(y))$ $\forall y \in \overline{R}$. Тогда по теореме 2.7

$$\|\tilde{u}\|_{n,1,R} \leqslant K_P \|u\|_{n,1,P},$$

постоянная K_P определяется функцией χ, то есть параллелепипедом P, и числом n. По лемме 3.2

$$|\tilde{u}(y)| \leqslant \|\tilde{u}\|_{n,1,R} \quad \forall y \subseteq \overline{R}\,.$$

Из последних двух неравенств и определения функции $\tilde{u}$ следует (2.5).

Следующая лемма, доказанная Гальярдо (см. [6]), по сути является комбинаторной. На использовании этой леммы и теоремы 3.1 строится доказательство основных теорем вложения.

Лемма 3.3. *Пусть* Ω *— область в* R^n, $n \geqslant 2$, k *— целое число, принадлежащее* $[1, n]$. *Обозначим через* $J(k) = (j_1, j_2, \ldots, j_k)$ *набор целых чисел, удовлетворяющих неравенствам*

$$1 \leqslant j_1 < j_2 < j_3 < \ldots < j_k \leqslant n.$$

Пусть $\mathrm{Im}(k)$ *— множество всех таких наборов. Обозначим через* $E_{J(k)}$ *подпространство* R^n *размерности* k, *натянутое на орты всех координатных осей, чьи номера присутствуют в* $J(k)$. *Каждой точке* $x \in R^n$ *поставим в соответствие точку* $x_{J(k)} = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_k})$ *из пространства* $E_{J(k)}$. *Обозначим через* $G_{J(k)}$ *проекцию множества* $G \subset R^n$ *на* $E_{J(k)}$:

$$G_{J(k)} = \left\{\, x \in E_{J(k)} \;\middle|\; \exists y \in G : \, y_{J(k)} = x \right\},$$

Далее пусть $F_{J(k)}$ *— функция, определенная на* $\Omega_{J(k)}$. *Если*

$$F_{J(k)} \in L_\lambda(\Omega_{J(k)}), \quad \lambda = C_{n-1}^{k-1}, \qquad \forall J(k) \in \mathrm{Im}(k)\,,$$

то функция

$$F(x) = \prod_{J(k) \in \mathrm{Im}(k)} F_{J(k)}(x_{J(k)}) \in L_1(\Omega),$$

причем

$$\left[\int\limits_\Omega |F(x)|\, dx\right]^\lambda \leqslant \prod_{J(k) \in \mathrm{Im}(k)} \int\limits_{\Omega_{J(k)}} |F_{J(k)}|^\lambda \, dx_{J(k)}, \tag{2.6}$$

здесь $dx_{J(k)} = dx_{j_1} \ldots dx_{j_k}$.

Доказательство леммы будем проводить с помощью метода индукции. Сначала установим справедливость (2.6) для $n = 2$. В этом случае параметр k может принимать два значения: $k = 1$ или $k = 2$. Заметим, что вариант $k = 2$ (при произвольном n — вариант $k = n$) тривиален, поскольку левая и правая части неравенства (2.6) при $k = n$ совпадают. Докажем (2.6) при $n = 2,\ k = 1$. При этом параметр $\lambda = 1$, а множество $\mathrm{Im}(k)$ состоит из двух наборов $\mathrm{Im}(k) = \{(1), (2)\}$, обозначим эти наборы J_1 и J_2 соответственно. Поскольку $x_{J_1} \equiv x_1$, а $x_{J_2} \equiv x_2$, то на этом этапе доказательства упростим обозначения, полагая $F_{J_i} \equiv F_i$, $G_{J_i} \equiv G_i$, $i = 1, 2$. Имеем

$$I \equiv \int\limits_{\Omega} |F(x)|\, dx = \int\limits_{\Omega} |F_1(x_1)F_2(x_2)|\, dx_1 dx_2 =$$

$$= \int\limits_{\Omega_1} dx_1 \int\limits_{\Omega(x_1)} |F_1(x_1)|\, |F_2(x_2)|\, dx_2\,,$$

здесь

$$\Omega(x_1) = \{\, \xi \in R^1 \mid\ (x_1, \xi) \in \Omega\}.$$

Учитывая, что $\Omega(x_1) \subset \Omega_2$, оценим I следующим образом:

$$I \leqslant \int\limits_{\Omega_1} |F_1(x_1)|\, dx_1 \int\limits_{\Omega_2} |F_2(x_2)|\, dx_2 = \Bigg(\int\limits_{\Omega_1} |F_1(x_1)|\, dx_1\Bigg)\Bigg(\int\limits_{\Omega_2} |F_2(x_2)|\, dx_2\Bigg).$$

Итак, неравенство (2.6) при $n = 2,\ k = 1$ доказано. Аналогично устанавливается справедливость (2.6) для $k = 1$ при любом n.

Далее предположим, что (2.6) выполнено, если $2 \leqslant n \leqslant N - 1$ и $1 \leqslant k \leqslant N - 1$. Докажем справедливость (2.6) при $n = N$ для всех $1 \leqslant k \leqslant N$. Как уже упоминалось выше, для $k = 1$ и $k = N$ неравенство (2.6) выполнено, поэтому в дальнейшем полагаем, что $2 \leqslant k \leqslant N - 1$. Обозначим через $\mathrm{Im}'(k) \subset \mathrm{Im}(k)$ — множество наборов $J(k)$, не содержащих номер N. Пусть $\mathrm{Im}''(k) = \mathrm{Im}(k) \setminus \mathrm{Im}'(k)$,

$$\Omega_N = \{\, \xi \in R^1 \mid\ \exists y \in \Omega :\ y_N = \xi\},$$

$$\Omega_{x_N} = \{\, \xi \in R^{N-1} \mid\ \exists y \in \Omega :\ y = (\xi, x_N)\},$$

а $\mu = C^{k-1}_{N-2},\ \nu = C^{k-2}_{N-2}$. Нетрудно проверить, что $\mu/\lambda + \nu/\lambda = 1$. Имеем

$$I \equiv \int\limits_{\Omega} |F(x)|\, dx = \int\limits_{\Omega} \prod_{J(k) \in \mathrm{Im}(k)} |F_{J(k)}(x_{J(k)})|\, dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_N} dx_N \int\limits_{\Omega(x_N)} \prod_{J(k)\in \mathrm{Im}(k)} |F_{J(k)}(x_{J(k)})|\, dx_1 \ldots dx_{N-1} =$$

$$= \int\limits_{\Omega_N} dx_N \int\limits_{\Omega(x_N)} \prod_{J(k)\in \mathrm{Im}'(k)} |F_{J(k)}(x_{J(k)})| \prod_{J(k)\in \mathrm{Im}''(k)} |F_{J(k)}(x_{J(k)})|\, dx_1 \ldots dx_{N-1}\,.$$

Внутренний интеграл в правой части последнего соотношения оценим с помощью неравенства Гельдера с показателями $p = \lambda/\mu$, $p' = \lambda/\nu$. В результате получим

$$I \leqslant \int\limits_{\Omega_N} (I_1)^{\mu/\lambda}(I_2)^{\nu/\lambda} dx_N, \tag{2.7}$$

где

$$I_1 = \int\limits_{\Omega(x_N)} \prod_{J(k)\in \mathrm{Im}'(k)} |F_{J(k)}(x_{J(k)})|^{\lambda/\mu}\, dx_1 \ldots dx_{N-1}\,,$$

$$I_2 = \int\limits_{\Omega(x_N)} \prod_{J(k)\in \mathrm{Im}''(k)} |F_{J(k)}(x_{J(k)})|^{\lambda/\nu}\, dx_1 \ldots dx_{N-1}\,.$$

Оценим I_1. Подынтегральная функция в этом выражении не зависит от x_N, то есть является функцией $N-1$ аргумента. Следовательно, для оценки I_1 можно воспользоваться неравенством (2.6), если положить $\tilde{F}_{J(k)}(x_{J(k)}) = |F_{J(k)}(x_{J(k)})|^{\lambda/\mu}$, а $\tilde{F} = \prod\limits_{J(k)\in \mathrm{Im}'(k)} \tilde{F}_{J(k)}(x_{J(k)})$. По условию леммы для почти всех $x_N \in \Omega_N$ функция $\tilde{F}_{J(k)}(x_{J(k)})$ принадлежит пространству $L_\mu(\Omega(x_N))$. Поскольку $\mathrm{Im}'(k)$ содержит все наборы из множества $\{1, \ldots, N-1\}$ по k, а $\mu = C_{N-2}^{k-1}$, то по предположению индукции имеем

$$I_1 \leqslant \prod_{J(k)\in \mathrm{Im}'(k)} \Bigg[\int\limits_{(\Omega(x_N))_{J(k)}} |F_{J(k)}(x_{J(k)})|^{\lambda}\, dx_{J(k)} \Bigg]^{1/\mu} \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{J(k)\in \mathrm{Im}'(k)} \Bigg[\int\limits_{(\Omega)_{J(k)}} |F_{J(k)}(x_{J(k)})|^{\lambda}\, dx_{J(k)} \Bigg]^{1/\mu}. \tag{2.8}$$

Последнее неравенство справедливо, поскольку $(\Omega(x_N))_{J(k)} \subset (\Omega)_{J(k)}$.

Оценим теперь I_2. При фиксированном x_N подынтегральная функция в I_2 также является функцией $N-1$ аргумента. В каждом наборе $J(k) = (j_1, \dots, j_k) \subset \mathrm{Im}''(k)$ последняя компонента $j_k = N$. Пусть $\bar{J}(k-1) = (j_1, \dots, j_{k-1})$, $\overline{\mathrm{Im}}(k-1)$ — все множество таких наборов. Нетрудно убедиться в том, что количество элементов в $\overline{\mathrm{Im}}(k-1)$ (как и в $\mathrm{Im}''(k)$) равно $C_N^k - C_{N-1}^k$ и совпадает с $C_{N-1}^{k-1} = \lambda$. Как и в предыдущем случае, введем вспомогательные функции

$$\bar{F}_{\bar{J}(k-1)}(x_{\bar{J}(k-1)}) = |F_{J(k)}(x_{J(k)})|^{\lambda/\nu},$$

$$\bar{F}(x_1, \dots, x_{N-1}) = \prod_{\bar{J}(k-1)\in\overline{\mathrm{Im}}(k-1)} \bar{F}_{\bar{J}(k-1)}(x_{\bar{J}(k-1)}),$$

полагая при этом, что функции $F_{J(k)}(x_{J(k)})$ зависят от x_N как от параметра. Ясно, что

$$I_2 = \int\limits_{\Omega(x_N)} \bar{F}(x_1, \dots, x_{N-1})\, dx_1 \dots dx_{N-1}\,.$$

Из условий леммы следует, что при почти всех $x_N \in \Omega_N$

$$\bar{F}_{\bar{J}(k-1)} \in L_\nu\Big((\Omega(x_N))_{\bar{J}(k-1)}\Big). \tag{2.9}$$

Функция $\bar{F}$ по конструкции совпадает с функцией F в формулировке леммы, если заменить n на $N-1$, а k — на $(k-1)$. Поэтому из предположения индукции и из включения (2.9) следует, что для оценки I_2 можно использовать неравенство (2.6). В результате будем иметь

$$I_2 \leqslant \prod_{\bar{J}(k-1)\in\overline{\mathrm{Im}}(k-1)} \Bigg[\int\limits_{(\Omega(x_N))_{\bar{J}(k-1)}} \big|\bar{F}_{\bar{J}(k-1)}(x_{\bar{J}(k-1)})\big|^\lambda \, dx_{\bar{J}(k-1)} \Bigg]^{1/\nu} \equiv$$

$$\equiv \prod_{J(k)\in\mathrm{Im}''(k)} \Bigg[\int\limits_{(\Omega(x_N))_{J(k)}} \big|F_{J(k)}(x_{J(k)})\big|^\lambda \, dx_{\bar{J}(k-1)} \Bigg]^{1/\nu}. \tag{2.10}$$

Воспользовавшись (2.7), (2.8), (2.10) для оценки I, получим

$$I \leqslant \prod_{J(k)\in\mathrm{Im}'(k)} \Bigg[\int\limits_{(\Omega)_{J(k)}} \big|F_{J(k)}(x_{J(k)})\big|^\lambda \, dx_{J(k)} \Bigg]^{1/\lambda} \times$$

$$\times \int\limits_{\Omega_N} \Bigg\{ \prod_{J(k)\in \mathrm{Im}''(k)} \Bigg[\int\limits_{(\Omega(x_N))_{J(k)}} \big|F_{J(k)}(x_{J(k)})\big|^\lambda \, dx_{\bar J(k-1)} \Bigg]^{1/\lambda} \Bigg\} dx_N. \tag{2.11}$$

Поскольку множество $\mathrm{Im}''(k)$ состоит, как уже отмечалось ранее, из λ элементов, последний сомножитель правой части неравенства (2.11) можем оценить с помощью обобщенного неравенства Гельдера:

$$\int\limits_G \prod_{i=1}^{\lambda} |f_i(x)|^{p_i}\, dx \leqslant \prod_{i=1}^{\lambda} \Big\{ \int\limits_G |f_i(x)|^{p_i}\, dx \Big\}, \tag{2.12}$$

справедливого при произвольных целых $\lambda \geqslant 1$ и любых $p_i \geqslant 1$ таких, что $\sum\limits_{i=1}^{\lambda} 1/p_i = 1$. В результате будем иметь

$$\int\limits_{\Omega_N} \Bigg\{ \prod_{J(k)\in \mathrm{Im}''(k)} \Bigg[\int\limits_{(\Omega(x_N))_{J(k)}} \big|F_{J(k)}(x_{J(k)})\big|^\lambda \, dx_{\bar J(k-1)} \Bigg]^{1/\lambda} \Bigg\} dx_N \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{J(k)\in \mathrm{Im}''(k)} \Bigg\{ \int\limits_{\Omega_N} \int\limits_{(\Omega(x_N))_{J(k)}} \big|F_{J(k)}(x_{J(k)})\big|^\lambda \, dx_{\bar J(k-1)}\, dx_N \Bigg\}^{1/\lambda} \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{J(k)\in \mathrm{Im}''(k)} \Bigg\{ \int\limits_{\Omega_{J(k)}} \big|F_{J(k)}(x_{J(k)})\big|^\lambda \, dx_{J(k)} \Bigg\}^{1/\lambda}.$$

Из последнего неравенства и (2.11) следует справедливость неравенства (2.6) при $n = N$. Лемма доказана.

Теорема 3.2. *Пусть Ω — область пространства R^n, обладающая свойством конуса, $p \geqslant 1$, $m \geqslant 1$. Тогда при любом целом $j \geqslant 0$*

$$W_p^{m+j}(\Omega) \to W_q^j(\Omega) \tag{2.13}$$

для всех

$$p \leqslant q \leqslant \frac{np}{n-mp}, \qquad \text{\textit{если}} \quad mp < n;$$

$$p \leqslant q < \infty, \qquad \text{\textit{если}} \quad mp = n.$$

При $mp > n$, а также $p = 1$, $m = n$

$$W_p^{m+j}(\Omega) \to C_B^j(\Omega). \tag{2.14}$$

Постоянные вложений (2.13), (2.14) зависят только от m, n, p и конуса C, определяющего свойство конуса для Ω.

Замечание 3.2. Для ограниченных областей вложение (2.13) будет иметь место и при $1 \leqslant q \leqslant p$, однако, постоянная вложения в этом случае будет зависеть и от меры области Ω.

Доказательство. Заметим, что непрерывное вложение $W_p^{m+j}(\Omega)$ в $W_q^j(\Omega)$ или в $C_B^j(\Omega)$, очевидно, будет иметь место тогда и только тогда, когда $W_p^m(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_q(\Omega)$ или в $C_B(\Omega)$ соответственно. Поэтому в дальнейшем можно ограничиться случаем $j = 0$. Доказательство теоремы 3.2 при $j = 0$ разобьем на этапы, каждый из которых оформим в виде леммы.

Лемма 3.4. *Пусть Ω — ограниченная область пространства R^n, обладающая свойством конуса, $p \geqslant 1$, $m \geqslant 1$, $mp < n$. Тогда*

$$W_p^m(\Omega) \to L_q(\Omega) \tag{2.15}$$

для всех $p \leqslant q \leqslant \dfrac{np}{n-mp}$. Постоянная вложения зависит только от m, n, p и конуса C, определяющего свойство конуса для Ω.

Доказательство. По теореме 2.5 множество $C^\infty(\Omega) \cap W_p^m(\Omega)$ плотно в $W_p^m(\Omega)$. Поэтому для доказательства леммы 3.4 достаточно показать (см. замечание 3.1), что для любой функции $u \in C^\infty(\Omega) \cap W_p^m(\Omega)$ имеет место оценка

$$\|u\|_{0,q,\Omega} \leqslant K \|u\|_{m,p,\Omega}, \quad K = K(m,n,p,C). \tag{2.16}$$

Сначала убедимся в справедливости неравенства (2.16) при $m = 1$, $q = np/(n-p)$. По теореме 3.1 область Ω может быть представлена в виде (1.1), где Ω_j — подобласть Ω, обладающая сильным локальным свойством Липшица (а потому и сегмента), для которой имеет место представление (1.2).

Очевидно, оценка (2.16) будет справедлива, если для каждой из областей Ω_j выполнена оценка

$$\|u\|_{0,q,\Omega_j} \leqslant K_j \|u\|_{m,p,\Omega_j}, \quad K_j = K_j(m,n,p,C). \tag{2.17}$$

Докажем (2.17). Поскольку область Ω_j обладает сильным локальным свойством Липшица, то по теореме 2.6 оценку (2.17) достаточно получить для $u \in C^\infty(\overline{\Omega_j})$. Для краткости записей на данном этапе доказательства индекс j будем опускать, полагая

$$\Omega = \bigcup_{x \in A} (x + Q). \tag{2.18}$$

Кроме того, опираясь на теорему 2.7, можем считать, что параллелограмм Q в представлении (2.18) является кубом, ребра которого параллельны осям координат, а длина ребра равна двум.

Обозначим через $w_i(x)$ пересечение Ω с прямой линией, проходящей через точку x параллельно координатной оси с номером i. Очевидно, что $w_i(x)$ содержит либо множество $\{x + te_i,\ 0 \leqslant t < 1\}$, либо множество $\{x - te_i,\ 0 \leqslant t < 1\}$, здесь e_i — орт i-той координатной оси. Пусть, например, $w_i(x)$ содержит $\{x + te_i,\ 0 \leqslant t < 1\}$.

Положим $\gamma = (np-p)/(n-p)$. Очевидно, $\gamma \geqslant 1$. Используя формулу интегрирования по частям, нетрудно получить, что

$$\int\limits_0^1 |u(x + (1-t)e_i)|^\gamma \, dt = |u(x)|^\gamma -$$

$$- \gamma \int\limits_0^1 t \, |u(x + (1-t)e_i)|^{\gamma - 1} \frac{d}{dt} \Big| u(x + (1-t)e_i) \Big| \, dt.$$

Или

$$|u(x)|^\gamma = \int\limits_0^1 |u(x + (1-t)e_i)|^\gamma \, dt +$$

$$+ \gamma \int\limits_0^1 t \, |u(x + (1-t)e_i)|^{\gamma - 1} \frac{d}{dt} \Big| u(x + (1-t)e_i) \Big| \, dt.$$

Отсюда и из равенства $|D_i u(x + (1-t)e_i)| = |t \ \dfrac{d}{dt}(u(x + (1-t)e_i))|$ нетрудно получить, что для любого $y \in w_i(x)$

$$|u(y)|^\gamma \leqslant \int\limits_{w_i(x)} |u(x)|^\gamma \, dx_i + \gamma \int\limits_{w_i(x)} |u(x)|^{\gamma-1} \, |D_i u(x)| dx_i. \tag{2.19}$$

Положим $\widehat{x}_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$,

$$F_i(\widehat{x}_i) \;=\; \sup_{y \in w_i(x)} |u(y)|^{p/(n-p)}.$$

Из (2.19) вытекает, что

$$|F_i(\widehat{x}_i)|^{n-1} \leqslant \int\limits_{w_i(x)} |u(x)|^{\gamma}\, dx_i \,+\, \gamma \int\limits_{w_i(x)} |u(x)|^{\gamma-1}\, |D_i u(x)| dx_i. \qquad (2.20)$$

Пусть Ω_i — проекция области Ω на плоскость $x_i = 0$. Неравенство (2.20) проинтегрируем по Ω_i, в результате получим

$$\int\limits_{\Omega_i} |F_i(\widehat{x}_i)|^{n-1}\, d\widehat{x}_i \leqslant \int\limits_{\Omega} |u(x)|^{\gamma}\, dx \,+\, \gamma \int\limits_{\Omega} |u(x)|^{\gamma-1}\, |D_i u(x)| dx \,\equiv$$

$$\equiv \int\limits_{\Omega} |u(x)|^{\gamma-1} \Big\{ |u(x)| \,+\, \gamma\, |D_i u(x)| \Big\} dx. \qquad (2.21)$$

Если $p > 1$, то правую часть в (2.21) оценим с помощью неравенства Гельдера с показателем p. Учитывая, что $(\gamma - 1)p' = np/(n-p) = q$, будем иметь

$$\|F_i\|^{n-1}_{0,n-1,\Omega_i} \leqslant$$

$$\leqslant \gamma \left[\int\limits_{\Omega} \Big\{ |u(x)| \,+\, |D_i u(x)| \Big\}^{p} dx \right]^{1/p} \left[\int\limits_{\Omega} |u(x)|^{(\gamma-1)p'}\, dx \right]^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{(p-1)/p}\, \gamma\, \|u\|_{1,p,\Omega}\, \|u\|^{q/p'}_{0,q,\Omega}\,. \qquad (2.22)$$

Очевидно, что

$$\|u\|^{q}_{0,q,\Omega} = \int\limits_{\Omega} |u(x)|^{np/(n-p)}\, dx \,\leqslant \int\limits_{\Omega} \prod_{i=1}^{n} F_i(\widehat{x}_i)\, dx.$$

Правую часть последнего неравенства оценим с помощью леммы 3.3 при $k = n-1$, $\{F_{J(k)}\} = \{F_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$. В этом случае $\lambda = n - 1$. В результате получим

$$\|u\|^{q}_{0,q,\Omega} \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|F_i\|^{n-1}_{0,n-1,\Omega_i}. \qquad (2.23)$$

Из неравенств (2.23) и (2.22) следует, что

$$\|u\|_{0,q,\Omega}^q \leqslant \left[2^{(p-1)/p}\,\gamma\,\|u\|_{1,p,\Omega}\,\|u\|_{0,q,\Omega}^{q/p'} \right]^{n/(n-1)}.$$

Заметив, что

$$q - \frac{q}{p'}\,\frac{n}{n-1} = \frac{n}{n-1}\,,$$

обе части последнего неравенства разделим на $\|u\|_{0,q,\Omega}^{qn/((n-1)p')}$ и возведем в степень $(n-1)/n$. В результате получим оценку (2.17).

При $p = 1$ (в этом случае и $\gamma = 1$) неравенство (2.17) следует непосредственно из (2.21) и (2.23). Итак, оценка (2.16) при $q = np/(n-p)$, $m = 1$ доказана.

Установим далее справедливость (2.16) при $q = q_m \equiv np/(n-mp)$ для любого $m \geqslant 1$. Доказательство проведем с помощью индукции. Как показано выше, при $m = 1$ и $q = np/(n-p)$ неравенство (2.16) выполнено. Предположим, что оценка (2.16) имеет место для $m = s-1$, $q = q_{s-1} \equiv np/(n-(s-1)p)$. Докажем справедливость этой оценки при $m = s$, $q = q_s \equiv np/(n-sp)$. Если $u \in W_p^s(\Omega)$, то, очевидно, u и $D_j u$, $1 \leqslant j \leqslant n$, принадлежат $W_p^{s-1}(\Omega)$, которое по предположению индукции непрерывно вложено в $L_{q_{s-1}}(\Omega)$. Из этого следует, что $u \in W^1_{q_{s-1}}(\Omega)$ и

$$\|u\|_{1,q_{s-1},\Omega} \leqslant K_1 \|u\|_{m,p,\Omega}\,.$$

Поскольку рассматривается случай $mp < n$, то и $sp < n$, следовательно, $q_{s-1} < n$. Воспользовавшись неравенством (2.16) при $p = q_{s-1}$, нетрудно показать, что $W^1_{q_{s-1}}(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_{q_s}(\Omega)$, и потому имеем:

$$\|u\|_{0,q_s,\Omega} \leqslant K\,\|u\|_{1,q_{s-1},\Omega} \leqslant K_2 \|u\|_{m,p,\Omega}\,.$$

Таким образом, по индукции неравенство (2.16) справедливо для любых m при $q = q_m \equiv np/(n-mp)$.

Теперь докажем, что (2.16) имеет место для $q \in [p, q_m]$ с постоянной вложения, не зависящей от меры области Ω. Пусть s некоторое число из интервала $(0, q)$. Воспользовавшись неравенством Гельдера с показателем $t > 1$, получим

$$\|u\|_{0,q,\Omega}^q = \int\limits_\Omega |u(x)|^s\,|u(x)|^{q-s}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int\limits_{\Omega} |u(x)|^{st}\,dx\right]^{1/t} \left[\int\limits_{\Omega} |u(x)|^{(q-s)t'}\,dx\right]^{1/t'}. \qquad (2.24)$$

Выберем s и t так, чтобы $st = p$, а $(q-s)t' = q_m$. Нетрудно проверить, что решением этой системы будут числа

$$s = \frac{(q_m - q)p}{q_m - p}, \qquad t = \frac{p}{s} = \frac{q_m - p}{q_m - q}.$$

При этих значениях s и t из (2.16), (2.24) будем иметь

$$\|u\|^q_{0,q,\Omega} \leqslant \|u\|^{p/t}_{0,p,\Omega}\,\|u\|^{q_m/t'}_{0,q_m,\Omega} \leqslant K_3 \|u\|^q_{m,p,\Omega}.$$

Лемма доказана.

Следствие 3.2. *Если Ω — ограниченная область, обладающая свойством конуса, $mp = n$, то $W^m_p(\Omega) \to L_q(\Omega)$ для всех $p \leqslant q \leqslant \infty$, при этом постоянная вложения может зависеть также от меры Ω.*

Доказательство. Пусть $q \geqslant p'$. Положим $r = pq/(p+q)$. Нетрудно видеть, что $r \in [1, p)$, $q = nr/(n - mr)$. По лемме 3.4 имеем: $W^m_r(\Omega) \to L_q(\Omega)$. Вложение $W^m_p(\Omega) \to W^m_r(\Omega)$ при $r < p$ следует из свойств пространств Лебега, константа этого вложения зависит от меры области Ω и возрастает с увеличением меры. Поэтому для $q \geqslant p'$ вложение (2.15) выполнено.

Для $p \leqslant q \leqslant p'$ вложение (2.15) можно получить с константой, не зависящей от меры области, если воспользоваться неравенством (2.24) при

$$s = \frac{(p' - q)p}{p' - p}, \qquad t = \frac{p}{s} = \frac{p' - p}{p' - q}.$$

Лемма 3.5. *Пусть Ω — произвольная область пространства R^n, обладающая свойством конуса, $p \geqslant 1$, $m \geqslant 1$. Тогда вложение (2.15) имеет место для всех*

$$p \leqslant q \leqslant \frac{np}{n - mp}, \qquad \text{если} \quad mp < n;$$

$$p \leqslant q < \infty, \qquad \text{если} \quad mp = n.$$

При $p = 1,\ m = n$

$$W_p^m(\Omega) \to C_B(\Omega). \tag{2.25}$$

Постоянные вложений (2.15), (2.25) зависят только от m, n, p *и конуса* C, *определяющего свойство конуса для* Ω.

Доказательство. Пространство R^n разобьем плоскостями параллельными координатным плоскостям на ячейки, каждая из которых является n-мерным гиперкубом с ребром, равным 1. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — мультииндекс,

$$H_\lambda = \left\{ x \in R^n \;\middle|\; \lambda_i \leqslant x_i \leqslant \lambda_i + 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant n \right\}.$$

Ясно, что $R^n = \bigcup\limits_\lambda H_\lambda$.

По теореме 3.1 каждая область Ω, обладающая свойством конуса, может быть представлена в виде: $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{\aleph} \Omega_j$, где

$$\Omega_j = \bigcup_{x \in A_j} (x + Q_j),$$

A_j — некоторое подмножество из $\overline{\Omega}$, Q_j — открытый параллелепипед с вершиной в нуле. Число $\aleph$ и размеры параллелепипедов Q_j зависят от n и конуса C, определяющего свойство конуса для Ω. Для каждого λ и $1 \leqslant j \leqslant \aleph$ положим

$$\Omega_{\lambda,j} = \bigcup_{x \in A_j \cap H_\lambda} (x + Q_j).$$

Докажем, что области $\Omega_{\lambda,j}$ обладают следующими свойствами:

1) $\Omega = \bigcup\limits_\lambda \bigcup\limits_{j=1}^{\aleph} \Omega_{\lambda,j}$,

2) $\Omega_{\lambda,j}$ ограничена,

3) существует конечный конус C', зависящий только от $Q_1, \ldots, Q_\aleph$ (и, следовательно, от n и C) такой, что каждая $\Omega_{\lambda,j}$ обладает свойством конуса, определенного по C',

4) существует положительное целое число R, зависящее от n и C такое, что любые $R + 1$ области $\Omega_{\lambda,j}$ имеют пустое пересечение,

5) существуют постоянные K' и K'', зависящее от n и C, такие, что для каждой $\Omega_{\lambda,j}$

$$K' \leqslant \operatorname{mes}\Omega_{\lambda,j} \leqslant K''.$$

Действительно, свойства 1) и 2) очевидны. Для обоснования 3) заметим, что область $\Omega_{\lambda,j}$ есть объединение параллелепипедов, каждый из которых конгруэнтен Q_j. Очевидно, что Q_j обладает свойством конуса, пусть C'_j — конечный конус определяющий это свойство. Выбирая среди C'_j конус с наименьшей высотой и наименьшим раствором, получим C'. Докажем 4). Нетрудно видеть, что

$$\Omega_{\lambda,j} \subset \widetilde{H}_{\lambda,j} \equiv \bigcup_{x\in H_\lambda} (x+Q_j).$$

Обозначим через $D_{\lambda,j}$ наименьший гиперкуб, содержащий те ячейки $H_{\lambda'}$, пересечение которых с $\widetilde{H}_{\lambda,j}$ не пусто. Конус C конечен, $Q_j \subset C$, следовательно, при каждом j ребра $D_{\lambda,j}$ равномерно ограничены по λ. Поэтому найдется число R_j такое, что $\bigcap_{i=1}^s D_{\lambda^i,j}$ пусто при любом наборе $\{\lambda^i\}_{i=1}^s$, если $s \geqslant R_j+1$ и все λ^i различны. Максимальное число среди R_j выберем в качестве R из свойства 4). Наконец, в 5) постоянные K' и K'' определим следующим образом

$$K' = \max_{1\leqslant j\leqslant \aleph} (\operatorname{mes} Q_j), \qquad K'' = \max_{1\leqslant j\leqslant \aleph} (\operatorname{mes} D_{\lambda,j}).$$

Таким образом, свойства 1)–5) имеют место.

Предположим, что $mp < n$. Если $p \leqslant q \leqslant np/(n=mp)$, то согласно свойствам 2), 3) и по лемме 3.4 для любой функции $u \in W_p^m(\Omega)$ имеем

$$\|u\|_{0,q,\Omega_{\lambda,j}} \leqslant K\,\|u\|_{m,p,\Omega_{\lambda,j}}, \tag{2.26}$$

где $K = K(m,p,n,q,C)$ и не зависит от λ и j. Используя свойства 1), 4), условие $q \geqslant p$ и теорему 1.4, нетрудно получить следующую цепочку неравенств

$$\|u\|_{0,q,\Omega}^q \leqslant \sum_{\lambda,j} \|u\|_{0,q,\Omega_{\lambda,j}}^q \leqslant K^q \sum_{\lambda,j}\left[\|u\|_{m,p,\Omega_{\lambda,j}}^p\right]^{q/p} \leqslant$$

$$\leqslant K^q\left[\sum_{\lambda,j}\|u\|_{m,p,\Omega_{\lambda,j}}^p\right]^{q/p} \leqslant K^q R^{q/p}\,\|u\|_{m,p,\Omega}^q.$$

Таким образом, $W_p^m(\Omega) \to L_q(\Omega)$ с постоянной вложения $KR^{1/p}$.

Если $mp = n$, то согласно следствию 3.2 неравенство (2.26) справедливо для любого $p \leqslant q < \infty$, причем по свойству 5) постоянная в этом неравенстве может быть выбрана не зависящей от λ и j. Повторяя предыдущие рассуждения, нетрудно убедиться в справедливости леммы и в этом случае.

Наконец, рассмотрим случай $p = 1$, $m = n$. Пусть $x^* \in \Omega$ произвольная точка. Тогда найдутся P_j и $\Omega_{\lambda,j}$ такие, что параллелепипед $P_j'(x^*) = (x^* + P_j) \in \Omega_{\lambda,j}$. По следствию 3.1

$$|u(x^*)| \leqslant K \|u\|_{n,1,P_j'(x^*)} \leqslant K \|u\|_{n,1,\Omega},$$

постоянная K определяется параллелепипедом P_j и числом n, то есть зависит от n и конуса C. Лемма доказана.

Лемма 3.6. *Пусть Ω — произвольная область пространства R^n, обладающая свойством конуса. Если $mp > n$, то имеет место вложение (2.25), постоянная K в (2.25) зависит только от m, n, p и конуса C, определяющего свойство конуса для Ω.*

Доказательство. Следуя рассуждениям леммы 3.4, нетрудно прийти к выводу, что для доказательства леммы 3.6 достаточно установить справедливость неравенства

$$\sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)| \leqslant K \|\varphi\|_{m,p,\Omega}, \qquad K = K(m,p,n,C), \tag{2.27}$$

для любой функции $\varphi \in C^\infty(\Omega) \cap W_p^m(\Omega)$.

Сначала докажем (2.27) при $m = 1$. В этом случае по условию леммы $p > n$. Пусть x^* произвольная точка из Ω, $C_{x^*} \subset \Omega$ — конечный конус, конгруэнтный C, с вершиной в x^*, h — высота C. Введем в R^n сферическую систему координат (r, θ) с центром в x^*. Пусть в этой системе координат конус C_{x^*} описывается соотношениями $0 < r < h$, $\theta \in A$. Элемент объема в сферической системе координат есть $r^{n-1}\omega(\theta)\, dr\, d\theta$. Имеем

$$\varphi(x^*) = \varphi(0,\theta) = \varphi(r,\theta) + \int_0^r \frac{d}{dt}\varphi(t,\theta)\, dt,$$

откуда при $0 < r < h$ следует

$$|\varphi(x^*)| \leqslant |\varphi(r,\theta)| + \int_0^h \left|\frac{d}{dt}\varphi(t,\theta)\right| dt.$$

Последнее неравенство умножим на $r^{n-1}\omega(\theta)$ и проинтегрируем по $\theta \in A$ и по $0 < r < h$. В результате получим

$$\int_0^h \int_A r^{n-1}\omega(\theta)\,|\varphi(x^*)|\,dr\,d\theta \leqslant \int_0^h \int_A r^{n-1}\omega(\theta)\ |\varphi(r,\theta)|\,dr\,d\theta +$$

$$+\left\{\int_0^h r^{n-1}\,dr\right\}\left\{\int_A \int_0^h \omega(\theta)\,|\frac{d}{dt}\varphi(t,\theta)|\,dt\,d\theta\right\}. \tag{2.28}$$

Заметим, что

$$\left|\frac{d}{dt}\varphi(t,\theta)\right| = \left|\sum_{i=1}^n \frac{\partial\,\varphi(x(t,\theta))}{\partial\,x_i}\ \frac{\partial\,x_i}{\partial\,t}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial\,\varphi(x)}{\partial\,x_i}\right)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial\,x_i}{\partial\,t}\right)^2\right)^{1/2} = |\mathrm{grad}\,\varphi(x)|,$$

поскольку, как нетрудно проверить,

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial\,x_i}{\partial\,r}\right)^2 = 1\,.$$

Поэтому последний интеграл в неравенстве (2.28) можно оценить следующим образом

$$\int_A \int_0^h \omega(\theta)\left|\frac{d}{dt}\varphi(t,\theta)\right| dt\,d\theta = \int_A \int_0^h t^{n-1}\omega(\theta)\left|\frac{d}{dt}\varphi(t,\theta)\right| t^{1-n}\,dt\,d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \int_{C_{x^*}} |\mathrm{grad}\,\varphi(x)|\,|x - x_*|^{1-n}\,dx.$$

Используя эту оценку, неравенство (2.28), а также следующие легко проверяемые соотношения

$$\int_0^h \int_A r^{n-1}\omega(\theta)\,|\varphi(x^*)|\,dr\,d\theta = (\mathrm{mes}\,C_{x^*})\,|\varphi(x^*)|\,,$$

$$\int\limits_0^h \int\limits_A r^{n-1}\omega(\theta)\ |\varphi(r,\theta)|\,dr\,d\theta \;=\; \int\limits_{C_{x^*}} |\varphi(x)|\,dx\,,$$

нетрудно показать, что

$$(\operatorname{mes} C_{x^*})\,|\varphi(x^*)| \;\leqslant\; \int\limits_{C_{x^*}} |\varphi(x)|\,dx \;+\; \frac{h^n}{n} \int\limits_{C_{x^*}} |\operatorname{grad}\varphi(x)|\,|x-x_*|^{1-n}\,dx \;\leqslant$$

$$\leqslant\; (\operatorname{mes} C_{x^*})^{1/p'}\,\|\varphi\|_{0,p,C_{x^*}} \;+\; \frac{h^n}{n}\,\|\operatorname{grad}\varphi\|_{0,p,C_{x^*}} \Bigg(\int\limits_{C_{x^*}} |x-x^*|^{-(n-1)p'}\,dx\Bigg).$$

(При получении последней оценки использовалось неравенство Гельдера с показателем p.) Поскольку $p>n$, то

$$(n-1)(1-p') \;=\; -(n-1)/(p-1) \;>\; -1\,,$$

следовательно,

$$\int\limits_{C_{x^*}} |x-x^*|^{-(n-1)p'}\,dx \;=\; \int\limits_A \omega(\theta)\,d\theta \int\limits_0^h r^{(n-1)(1-p')}\,dr \;<\infty\,.$$

Таким образом,

$$|\varphi(x^*)| \;\leqslant\; K\,\|\varphi\|_{1,p,C_{x^*}} \;\leqslant\; K\,\|\varphi\|_{1,p,\Omega}\,,$$

где $K=K(m,p,n,C)$, и оценка (2.27) при $m=1$ доказана.

Если $m>1$, но $p>n$, то из предыдущих рассуждений имеем

$$|\varphi(x^*)| \;\leqslant\; K\,\|\varphi\|_{1,p,C_{x^*}} \;\leqslant\; K\,\|\varphi\|_{m,p,C_{x^*}} \;\leqslant\; K\,\|\varphi\|_{m,p,\Omega}\,.$$

Пусть теперь $p\leqslant n<mp$. Выберем j из условия $jp\leqslant n<(j+1)p$. Если $jp<n$, то положим $r=np/(n-jp)$. Заметим, во-первых, что по лемме 3.5

$$W_p^j(\Omega) \;\to\; L_r(\Omega)\,, \tag{2.29}$$

и, во-вторых, j выбран таким образом, что $(n-jp)<1$, следовательно, $r>n$. Если $jp=n$, то по лемме 3.5 вложение (2.29) справедливо при любых $p\leqslant r<\infty$, поэтому выберем любое $r>n$. Используя предыдущие рассуждения и (2.29), запишем следующую цепочку неравенств

$$|\varphi(x^*)| \;\leqslant\; K_1\,\|\varphi\|_{1,r,C_{x^*}} \;\leqslant\; K_1\,\|\varphi\|_{m-j,r,C_{x^*}} \;\leqslant$$

$$\leqslant K \|\varphi\|_{m,p,C_{x^*}} \leqslant K \|\varphi\|_{m,p,\Omega} .$$

Лемма доказана.

Следствие 3.3. *Если $mp > n$, то вложение $W_p^m(\Omega) \to L_q(\Omega)$ имеет место для $p \leqslant q \leqslant \infty$, при этом постоянная вложения зависит только от m, n, p, q и конуса C.*

Доказательство. В лемме 3.6 установлено, что

$$\|u\|_{0,\infty,\Omega} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)| \leqslant K \|u\|_{m,p,\Omega} \qquad \forall u \in W_p^m(\Omega) .$$

Если $p \leqslant q < \infty$, то имеем

$$\|u\|_{0,q,\Omega}^q = \int\limits_\Omega |u(x)|^p \, |u(x)|^{q-p} \, dx \leqslant$$

$$\leqslant K^{q-p} \|u\|_{m,p,\Omega}^{q-p} \|u\|_{0,p,\Omega}^p \leqslant K^{q-p} \|u\|_{m,p,\Omega}^q .$$

Что и требовалось доказать.

Заметим, что из лемм 3.5, 3.6 следует утверждение теоремы 3.2.

Теорема 3.3. *Пусть Ω — произвольная область R^n, обладающая сильным локальным свойством Липшица, $mp > n \geqslant (m-1)p$. Тогда имеет место вложение*

$$W_p^{m+j}(\Omega) \to C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}) \qquad \forall j \geqslant 0, \tag{2.30}$$

здесь

$$\begin{array}{lll} 0 < \lambda \leqslant m - n/p, & \text{если} & n > (m-1)p; \\ 0 < \lambda < 1, & \text{если} & n = (m-1)p; \\ 0 < \lambda \leqslant 1, & \text{если} & p = 1,\, n = m-1. \end{array}$$

В частности, $W_p^{m+j}(\Omega) \to C^j(\overline{\Omega})$.

Постоянные вложений зависят от m, n, p и параметров δ и M, возникающих при описании сильного локального свойства Липшица для области Ω.

Доказательство. Ясно, что утверждение теоремы достаточно проверить при $j = 0$. Пусть $u \in W_p^m(\Omega)$. Так как из сильного локального свойства Липшица следует свойство конуса, то по лемме 3.6 функция u непрерывна на Ω и

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \leqslant K_1 \|u\|_{m,p,\Omega} .$$

По теореме 2.5 множество $C^\infty(\overline{\Omega}) \bigcap W_p^m(\Omega)$ плотно $W_p^m(\Omega)$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить при соответствующих значениях λ справедливость неравенства

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\lambda} \leqslant K_2 \|u\|_{m,p,\Omega} \qquad \forall\, u \in C^\infty(\overline{\Omega}). \tag{2.31}$$

Из условия $mp > n \geqslant (m-1)p$ и леммы 3.5 следует, что

$$W_p^m(\Omega) \to W_r^1(\Omega),$$

где

$$\begin{array}{lcl} r = np/(n-mp+p), & \text{если} & n > (m-1)p\,, \\ p < r < \infty, & \text{если} & n = (m-1)p\,, \\ r = \infty, & \text{если} & p = 1,\, n = m-1. \end{array}$$

Заметим, что

$$\begin{array}{lcl} 1 - n/r = m - n/p, & \text{если} & n > (m-1)p\,, \\ 0 < 1 - n/r < 1, & \text{если} & n = (m-1)p\,, \\ 1 - n/r = m - n/p = 1, & \text{если} & p = 1,\, n = m-1. \end{array}$$

Сравнивая эти соотношения с условиями теоремы, нетрудно видеть, что для доказательства (2.31) достаточно показать справедливость при всех $p < r \leqslant \infty$ и $0 < \lambda \leqslant 1 - n/r$ следующего неравенства

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\lambda} \leqslant K_3 \|u\|_{1,r,\Omega} \qquad \forall\, u \in C^\infty(\overline{\Omega}). \tag{2.32}$$

Сначала установим (2.32) для случая, когда Ω — n-мерный куб. Без ограничения общности можем предположить, что длина ребра куба равна 1. Для $0 < t < 1$ будем обозначать Ω_t куб с ребром t, грани которого параллельны граням Ω и $\overline{\Omega}_t \subset \Omega$.

Пусть $0 < \sigma < 1$ и x, y — произвольные точки из Ω такие, что $|x-y| = \sigma$. Тогда существует куб Ω_σ такой, что $x, y \in \overline{\Omega}_\sigma \subset \Omega$. Если $z \in \Omega_\sigma$, то

$$u(x) \,=\, u(z) \,-\, \int\limits_0^1 \frac{d}{dt} u(x + t(z-x))\, dt,$$

поэтому

$$|u(x) - u(z)| \,\leqslant\, \sqrt{n}\,\sigma \int\limits_0^1 |\operatorname{grad} u(x + t(z-x))|\, dt.$$

Воспользовавшись этой оценкой, запишем следующую цепочку очевидных неравенств

$$\left| u(x) \,-\, \frac{1}{\sigma^n} \int\limits_{\Omega_\sigma} u(z)\, dz \right| \,=\, \left| \frac{1}{\sigma^n} \int\limits_{\Omega_\sigma} (u(x) \,-\, u(z))\, dz \right| \,\leqslant$$

$$\leqslant\, \frac{\sqrt{n}}{\sigma^{n-1}} \int\limits_{\Omega_\sigma} \int\limits_0^1 |\operatorname{grad} u(x + (z-x))|\, dt\, dz.$$

В последнем интеграле поменяем порядок интегрирования и воспользуемся неравенством Гельдера. В результате получим

$$\left| u(x) \,-\, \frac{1}{\sigma^n} \int\limits_{\Omega_\sigma} u(z)\, dz \right| \,\leqslant\, \frac{\sqrt{n}}{\sigma^{n-1}} \int\limits_0^1 t^{-n} \int\limits_{\Omega_{t\sigma}} |\operatorname{grad} u(z)|\, dz\, dt \,\leqslant$$

$$\leqslant\, \frac{\sqrt{n}}{\sigma^{n-1}} \, \|\operatorname{grad} u\|_{0,p,\Omega} \int\limits_0^1 t^{-n}\, (mes\, \Omega_{t\sigma})^{1/p'}\, dt \,\leqslant$$

$$\leqslant\, K_4\, \sigma^{1-n/p}\, \|\operatorname{grad} u\|_{0,p,\Omega}\,,$$

здесь $K_4 \,=\, K_4(n,p) \,=\, \sqrt{n} \int\limits_0^1 t^{-n/p}\, dt \,<\, \infty$. Аналогичное неравенство будет справедливо и для y, поэтому

$$|u(x) - u(y)| \,\leqslant\, |u(x) - u(z)| \,+\, |u(y) - u(z)| \,\leqslant$$

$$\leqslant\; 2\,K_4\,|x-y|^{1-n/p}\,\|\mathrm{grad}\,u\|_{0,p,\Omega}\,.$$

Таким образом, при $0<\lambda\leqslant(1-n/p)$ неравенство (2.32) имеет место, если Ω — n-мерный куб. С помощью невырожденного преобразования (см. следствие 3.1) этот результат можно обобщить и на область в виде параллелепипеда.

Теперь докажем (2.32) в случае, когда Ω — область, обладающая сильным локальным свойством Липшица. Пусть δ, M, Ω_δ, U_j, V_j те же, что и в определении 3.4. Как уже отмечалось ранее, Ω будет обладать и свойством конуса, поэтому найдется параллелепипед P диаметра δ с вершиной в начале координат и конгруэнтные ему параллелепипеды P_j (также с вершиной в начале координат) такие, что для каждого x из $V_j\,\cap\,\Omega$ имеет место включение $x+P_j\subset\Omega$. (Заметим, что параллелепипеды P и P_j будут зависеть только от δ и M). По определению сильного локального свойства Липшица найдутся постоянные $\delta_0\in(0,\delta]$ и $\delta_1>0$ такие, что для любых точек $x,y\in V_j\cap\Omega$, удовлетворяющих неравенству $|x-y|<\delta_0$, существует $z\in(x+P_j)\cap(y+P_j)$ со свойством

$$|x-z|\,+\,|y-z|\;\leqslant\;\delta_1\,|x-y|.$$

Константы δ_0 и $\delta_1>0$, очевидно, зависят от δ и P. Воспользуемся (2.32) для параллелепипедов $(x+P_j)$ и $(y+P_j)$, в результате получим

$$\begin{aligned}|u(x)\,-u(y)|\;&\leqslant\;|u(x)\,-u(z)|\,+|u(z)\,-u(y)|\;\leqslant\\ &\leqslant\;K_5\,|x-z|^\lambda\,\|u\|_{1,p,\Omega}\,+\,K_5\,|y-z|^\lambda\,\|u\|_{1,p,\Omega}\;\leqslant\\ &\leqslant\;2^{1-\lambda}\,K_5\,\delta_1^\lambda\,|x-y|^\lambda\,\|u\|_{1,p,\Omega}\,.\end{aligned}\tag{2.33}$$

Теперь пусть $x,y\in\Omega$ — произвольные точки. Если $|x-y|<\delta_0$ и $x,y\in\Omega_\delta$, то найдется V_j такой, что $x,y\in V_j$, поэтому оценка (2.33) имеет место. Если $|x-y|<\delta_0$, $x\in\Omega_\delta$, $y\in\Omega\setminus\Omega_\delta$, то найдется V_j такой, что $x\in V_j$, и (2.33) можно получить, если воспользоваться (2.32) для параллелепипедов $(x+P_j)$ и $(y+P_j)$. Если $|x-y|<\delta_0$, $x,y\in\Omega\setminus\Omega_\delta$, то (2.33) получаем в результате применения (2.32) для параллелепипедов $(x+P')$ и $(y+P')$, где P' — параллелепипед, конгруэнтный P, с вершиной в начале координат. И, наконец, если $|x-y|\geqslant\delta_0$, то

$$|u(x)\;-\;u(y)|\;\leqslant\;|u(x)|\,+\,|u(y)|\;\leqslant\;K_6\,\|u\|_{1,p,\Omega}\;\leqslant$$

$$\leqslant K_6 \, |x-y|^\lambda \, \delta_0^{-\lambda} \, \|u\|_{1,p,\Omega} \, .$$

Теорема доказана.

Теорема 3.4. *Пусть* Ω *— произвольная область пространства* R^n*, обладающая свойством конуса,* Ω^k *— пересечение* Ω *с некоторой* k*-мерной плоскостью (предполагается, что* $1 \leqslant k \leqslant n$*,* $\Omega^n \equiv \Omega$*). Если* $n \geqslant mp$*,* $n - mp < k \leqslant n$*, то*

$$W_p^{m+j}(\Omega) \to W_q^j(\Omega^k). \tag{2.34}$$

Здесь

$$\begin{array}{lll} p \leqslant q \leqslant kp/(n-mp), & \text{если} & n > mp\,, \\ p \leqslant q < \infty, & \text{если} & n = mp\,, \\ 1 \leqslant q \leqslant k/(n-m), & \text{если} & p = 1,\ n > m,\ n - m \leqslant k \leqslant n. \end{array}$$

Постоянные вложений зависят от m*,* n*,* p*,* q *и конуса* C*, определяющего свойство конуса для* Ω*.*

При доказательстве теоремы 3.4 нам понадобится следующая

Лемма 3.7. *Пусть* Q *—* n*-мерный гиперкуб, ребра которого параллельны координатным осям и имеют длину* l*. Если* $p > 1$*,* $q \geqslant 1$*,* $mp - p < n < mp$*, то найдется постоянная* $K = K(p,q,m,n,l)$ *такая, что для почти всех* $x \in Q$ *справедливо неравенство*

$$|u(x)| \, \leqslant \, K \, \|u\|_{0,q,Q}^s \, \|u\|_{m,p,Q}^{1-s} \qquad \forall \, u \, \in \, W_p^m(Q)\,, \tag{2.35}$$

где $s = (mp-n)q/[np + (mp-n)q]$*.*

Доказательство. По теореме 3.3 при $mp > n \geqslant (m-1)p$

$$W_p^m(Q) \to C^0(\overline{Q}).$$

и, следовательно,

$$W_p^m(Q) \to L_q(Q) \qquad \forall q \geqslant 1.$$

Поэтому (2.35) достаточно установить для $u \in C^\infty(\overline{Q})$.

Пусть x' произвольная точка из $\overline{Q}$. Очевидно, существует куб, принадлежащий Q, одной из вершин которого является точка x', ребра параллельны координатным осям, а длина ребра равна $l/2$. Такой куб, обозначим через Q', длину его ребра — l'.

По лемме 3.3 для любой точки $y \in Q'$ имеем

$$|u(x')| - |u(y)| \leqslant |u(x') - u(y)| \leqslant K_1 \, |x - y|^{m-n/p} \, \|u\|_{m,p,Q'} \qquad (2.36)$$

Пусть $U = \|u\|_{m,p,Q'}$. Если $U = 0$, то для x' получить оценку (2.35) легко, так как из (2.36) вытекает, что функция u на Q' — константа. Поэтому

$$\|u\|_{m,p,Q'} = |u(x')| \, (\operatorname{mes} Q')^{1/p}, \qquad \|u\|_{0,q,Q'} = |u(x')| \, (\operatorname{mes} Q')^{1/q},$$

и, следовательно,

$$|u(x')| = (\operatorname{mes} Q')^{\mu} \, \|u\|^{s}_{0,q,Q'} \, \|u\|^{1-s}_{m,p,Q'} \leqslant (\operatorname{mes} Q')^{\mu} \, \|u\|^{s}_{0,q,Q} \, \|u\|^{1-s}_{m,p,Q},$$

здесь μ — константа, зависящая от l'.

Рассмотрим теперь случай, когда $U \neq 0$. Пусть

$$\rho = |x' - y|, \qquad \zeta = \Big(|u(x')| / (K_1 U) \Big)^{p/(mp-n)}.$$

Тогда (2.36) можно записать в виде

$$|u(y)| \geqslant |u(x')| - K_1 \, U \, \rho^{m-n/p}. \qquad (2.37)$$

Если $\zeta \leqslant l'$, то для всех точек y из множества

$$Q'(\zeta) = \left\{ y \in Q' \,\middle|\, |x' - y| \leqslant \zeta \right\}$$

правая часть (2.37) неотрицательна. Неравенство (2.37) возведем в степень q и проинтегрируем по $Q'(\zeta)$. В результате будем иметь

$$\int\limits_{Q'} |u(y)|^q \, dy \geqslant K_2 \, |u(x')|^q \int\limits_{Q'} \Big(1 - (\rho/\zeta)^{m-n/p} \Big)^q \, dy \,. \qquad (2.38)$$

Переходя в правой части (2.38) к сферическим координатам с началом в точке x', а затем — к новой переменной $\sigma = (\rho/\zeta)$, нетрудно получить следующие соотношения

$$K_2 \, |u(x')|^q \int\limits_{Q'} \Big(1 - (\rho/\zeta)^{m-n/p} \Big)^q \, dy =$$

$$= K_2 \, |u(x')|^q \int\limits_0^{\zeta} \Big(1 - (\rho/\zeta)^{m-n/p} \Big)^q \rho^{n-1} \, d\rho =$$

$$= K_2 \, \zeta^n \, |u(x')|^q \int\limits_0^{1} \Big(1 - \sigma^{m-n/p} \Big)^q d\sigma =$$

$$= K_3 \, |u(x')|^{q+np/(mp-n)} \, U^{-np/(mp-n)}.$$

Подставляя полученное выражение в (2.38), легко получить оценку (2.35) для x' и в этом случае.

И, наконец, если $\zeta > l'$, то по аналогии с $Q'(\zeta)$ введем множество $Q'(l')$. Тогда для всех $y \in Q'(l')$ из (2.37) имеем

$$|u(y)| \geqslant |u(x')| \Big(1 - (\rho/\zeta)^{m-n/p} \Big) \geqslant |u(x')| \Big(1 - (\rho/l')^{m-n/p} \Big) \geqslant 0.$$

Полученное неравенство возведем в степень $t > 0$ и проинтегрируем по $Q'(l')$. После несложных преобразований будем иметь

$$\int\limits_{Q'} |u(y)|^t \, dy \geqslant K_2 \, |u(x')|^t \int\limits_0^{l'} \Big(1 - (\rho/l')^{m-n/p} \Big)^t \rho^{n-1} \, d\rho =$$

$$= K_4 \, |u(x')|^t \, . \tag{2.39}$$

Положим

$$t = q \, \frac{mp-n}{mp} + p \, \frac{n}{mp}.$$

Ясно, что числа $mp/(mp-n)$ и $mp/(n)$ взаимно сопряжены. Поэтому

$$\int\limits_{Q'} |u(y)|^t \, dy = \int\limits_{Q'} \Big(|u(y)|^q \Big)^{(mp-n)/(mp)} \Big(|u(y)|^p \Big)^{n/(mp)} dy \leqslant$$

$$\leqslant \|u\|_{0,q,Q'}^{q(mp-n)/(mp)} \, \|u\|_{0,p,Q'}^{n/m}.$$

Используя эту оценку, из (2.39) получим

$$|u(x')|^t \leqslant K_4^{-1} \, \|u\|_{0,q,Q'}^{q(mp-n)/(mp)} \, \|u\|_{0,p,Q'}^{n/m}.$$

Откуда, очевидно, следует утверждение леммы и в этом случае. Лемма доказана.

Замечание 3.3. Утверждение леммы 3.7 справедливо и при $p=1,\ m=n$, поскольку в этом случае по лемме 3.5 пространство $W_1^n(Q)$ непрерывно вложено в $L_\infty(Q)$. Поэтому для почти всех $x\in Q$ имеет место оценка

$$|u(x)|\ \leqslant\ K\,\|u\|_{n,1,Q},$$

которая совпадает с (2.35).

Доказательство теоремы 3.4 будет проводиться по той же схеме, что и доказательство теоремы 3.2. Заметим, что утверждение теоремы 3.4 справедливо, если для любой функции u из $C^\infty(\Omega)\cap W_p^m(\Omega)$ имеет место оценка

$$\|u\|_{0,q,\Omega^k}\ \leqslant\ K\,\|u\|_{m,p,\Omega}\,,\qquad K=K(m,k,q,p,C). \tag{2.40}$$

Сначала получим (2.40) для ограниченной области Ω при $n>mp$, $q=kp/(n-mp)$. В этом случае имеет место равенство (1.1). Поэтому для доказательства (2.40) достаточно получить оценку

$$\|u\|_{0,q,\Omega_j^k}\ \leqslant\ K\,\|u\|_{m,p,\Omega_j}\,,\qquad K=K(m,k,q,p,C), \tag{2.41}$$

где $\Omega_j\subset\Omega$ — область, представимая в виде (1.2) и обладающая сильным локальным свойством Липшица (а потому и сегмента).

Докажем (2.41). При этом, как и при доказательстве соответствующего утверждения леммы 3.4, индекс j, мы будем опускать и будем получать оценку (2.40) для ограниченной области Ω, которая является объединением кубов с ребром 2 и гранями параллельными координатным плоскостям. При указанных предположениях, очевидно, оценку (2.40) достаточно получить для функции $u\in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Доказательство неравенства (2.40) проведем с помощью леммы 3.3 при $\bar n=k,\ \bar k=n-\nu$, где символами $\bar n$ и $\bar k$ обозначены n и k из леммы 3.3, параметр ν при $p>1$ полагается равным наибольшему целому числу, меньшему mp, и $\nu=m$, если $p=1$. Заметим, что ν выбрано таким образом, что $n-\nu\leqslant k$. Действительно, при $p>1$, очевидно, имеем $mp-p<\nu<mp$, поэтому из условия $n-mp<k$ следует, что $n-\nu\leqslant k$. Если $p=1$, то $k>n-m=n-\nu$.

Далее пусть R_0^k — k-мерная плоскость пространства R^n, проходящая через начало координат параллельно плоскости, содержащей Ω^k. Проекцию Ω^k на R_0^k обозначим через Ω_0^k. Пусть $\mu=C_k^{n-\nu},\ E_i\ (1\leqslant i\leqslant\mu)$ —

подпространства R_0^k размерности $n-\nu$, а Ω_i — проекция Ω_0^k (а, следовательно, и Ω^k) на E_i. (Заметим, что $\{\Omega_{J(\bar{k})}\} \equiv \{\Omega_i\}_{i=1}^{\mu}$.) На Ω_i определим функции

$$F_i(x^i) = \sup_{y\in\Omega_{i,x^i}} |u(y)|^{q/\mu},$$

здесь Ω_{i,x^i} — пересечение Ω с ν-мерной плоскостью, содержащей x^i и ортогональной E_i.

Докажем, что $F_i \in L_\lambda(\Omega_i)$, где $\lambda = C_{k-1}^{n-\nu-1}$. Имеем

$$\|F_i\|_{0,\lambda,\Omega_i}^{\lambda} = \int\limits_{\Omega_i} |F_i(x^i)|^{\lambda}\, dx^i = \int\limits_{\Omega_i} \sup_{y\in\Omega_{i,x^i}} |u(y)|^{q\lambda/\mu}\, dx^i\,. \tag{2.42}$$

Воспользовавшись леммой 3.7 при $q = q_0 \equiv np/(n-mp)$, для $y \in \Omega_{i,x^i}$ будем иметь

$$|u(y)| \leqslant K_1 \|u\|_{0,q_0,\Omega_{i,x^i}}^{s} \|u\|_{m,p,\Omega_{i,x^i}}^{1-s}\,, \tag{2.43}$$

где $s = (mp-\nu)q_0/[\nu p + (mp-\nu)q_0]$. Правую часть (2.42) оценим с помощью неравенства (2.43). В результате получим

$$\|F_i\|_{0,\lambda,\Omega_i}^{\lambda} \leqslant K_2 \int\limits_{\Omega_i} \|u\|_{0,q_0,\Omega_{i,x^i}}^{(mp-\nu)q_0/mp} \|u\|_{m,p,\Omega_{i,x^i}}^{\nu/m}\, dx^i \leqslant$$

$$\leqslant K_2\, \|u\|_{0,q_0,\Omega}^{(mp-\nu)q_0/mp} \|u\|_{m,p,\Omega}^{\nu/m}\,. \tag{2.44}$$

Далее заметим, что

$$\|u\|_{0,q,\Omega^k}^{q} \leqslant \int\limits_{\Omega_0^k} \prod_{i=1}^{\mu} \sup_{y\in\Omega_{i,x^i}} |u(y)|^{q/\mu}\, dx^k\,.$$

По лемме 3.3

$$\int\limits_{\Omega_0^k} \prod_{i=1}^{\mu} \sup_{y\in\Omega_{i,x^i}} |u(y)|^{q/\mu}\, dx^k \leqslant \prod_{i=1}^{\mu} \left\{ \int\limits_{\Omega_i} \sup_{y\in\Omega_{i,x^i}} |u(y)|^{q\lambda/\mu}\, dx^i \right\}^{1/\lambda}.$$

Из последних двух неравенств и (2.44) получим

$$\|u\|_{0,q,\Omega^k} \leqslant K_4 \left\{ \|u\|_{0,q_0,\Omega}^{(mp-\nu)q_0/mp} \|u\|_{m,p,\Omega}^{\nu/m} \right\}^{\mu/(q\lambda)} \leqslant$$

$$\leqslant K_5 \left\{ \|u\|_{m,p,\Omega}^{(mp-\nu)q_0/mp} \, \|u\|_{m,p,\Omega}^{\nu/m} \right\}^{\mu/(q\lambda)}. \tag{2.45}$$

Заметим, что

$$\frac{q\,\lambda}{\mu} = \frac{(n-\nu)p}{n-mp},$$

поэтому из (2.45) следует оценка (2.41), а значит и (2.40) при $n > mp$, $q = kp/(n-mp)$.

Доказательство (2.40) для $q \in [p, kp/(n-mp)]$ аналогично доказательству соответствующего результата в лемме 3.4. В случае произвольной области Ω, а также при $n = mp$ способ получения оценки (2.40) содержится в доказательстве леммы 3.5. Теорема 3.4 доказана.

§ 3. Следы функций из $W_p^m(\Omega)$ на $\partial\Omega$.

В теории краевых задач для дифференциальных уравнений важна информация о регулярности решения не только внутри области, но и на границе. Источником такой информации могут быть результаты о непрерывном вложении пространства X, содержащего решение рассматриваемой задачи, в некое пространство функций, определенных на границе. Если A — оператор, определяющий это вложение, то Au называют следом элемента u.

Заметим, что информацию о следах функций на $\partial\Omega$ можно найти и в доказанных выше теоремах вложения. Например, если $W_p^m(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$, то ясно, что следы функций из $W_p^m(\Omega)$ принадлежат $C(\partial\Omega)$.

В этом параграфе указываются достаточные условия, при которых след на $\partial\Omega$ функции из $W_p^m(\Omega)$ принадлежит пространству $L_q(\partial\Omega)$.[4] Рассматриваемый здесь подход восходит к работам Лионса (см. [8], [9]). При его использовании предполагается возможность продолжении функций из $W_p^m(\Omega)$ на R^n с сохранением класса, то есть предполагается существование оператора E, действующего из $W_p^m(\Omega)$ в $W_p^m(R^n)$ и удовлетворяющего следующим условиям

$$Eu(x) = u(x) \qquad \forall x \in \Omega, \tag{3.1}$$

[4] Использование пространств Соболева дробных порядков (см. гл.4) позволяет точнее описать регулярность следов функций из $W_p^m(\Omega)$.

$$\|Eu\|_{m,p,R^n} \leqslant K\, \|u\|_{m,p,\Omega}. \tag{3.2}$$

Такой оператор называется оператором продолжения. Возможность построения оператора продолжения в основном зависит от свойств области Ω. В параграфе 4 будут приведены примеры построения операторов продолжения.

Теорема 3.5. *Пусть Ω — произвольная область пространства R^n, обладающая свойством равномерной C^m-регулярности, и существует оператор продолжения E, действующий из $W_p^m(\Omega)$ в $W_p^m(R^n)$. Тогда имеет место вложение*

$$W_p^m(\Omega) \to L_q(\partial\Omega), \tag{3.3}$$

где

$$\begin{aligned} p \leqslant q \leqslant (n-1)p/(n-mp), \quad &\textit{если} \quad n > mp; \\ p \leqslant q < \infty, \quad &\textit{если} \quad n = mp. \end{aligned}$$

Доказательство. Ясно, что вложение (3.3) будет иметь место, если

$$X \,\equiv\, \left\{ v \in W_p^m(R^n) \,\middle|\, v = Eu,\ u \in W_p^m(\Omega) \right\} \,\to\, L_q(\partial\Omega). \tag{3.4}$$

Поскольку E — ограниченный оператор, и $C_0^\infty(R^n)$ по теореме 2.6 плотно в $W_p^m(\Omega)$, то для доказательства (3.4) достаточно получить следующую оценку

$$\|Eu\|_{0,q,\partial\Omega} \leqslant K_1\, \|u\|_{m,p,\Omega} \qquad \forall\, u \in C_0^\infty(R^n). \tag{3.5}$$

Сначала справедливость неравенства (3.5) установим при $mp < n$ и $q = (n-1)p/(n-mp)$.

По определению свойства равномерной C^m-регулярности существуют локально конечное открытое покрытие $\{U_j\}$ множества $\partial\Omega$ и для каждого U_j взаимно однозначная m-гладкая функция Ψ_j, отображающая $B = \{y \in R^n \mid |y| < 1\}$ на множество U_j, так, что

$$U_j \bigcap \partial\Omega \,=\, \Psi_j(B_0), \qquad B_0 = \{y \in B \mid y_n = 0\}.$$

Если носитель функции f принадлежит $\{U_j\}$, то, производя замену переменных $x = \Psi_j(y)$, нетрудно получить, что

$$\int\limits_{\partial\Omega} f(x)\, d\sigma \,=\, \int\limits_{U_j \bigcap \partial\Omega} f(x)\, d\sigma \,=\, \int\limits_{B_0} f\Big(\Psi_j(y',0)\Big)\, J_j(y')\, dy'\,.$$

Здесь $y' = (y_1, \ldots, y_{n-1})$, $d\sigma$ — поверхностная мера на $\partial\Omega$, сомножитель $J_j(y')$ (коэффициент пропорциональности между $d\sigma$ и dy') определяется следующим соотношением

$$J_j(y') = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \left(x_1(y), \ldots, x_{k-1}(y),\, \hat{x}_k,\, x_{k+1}(y), \ldots, x_n(y) \right)}{\partial \left(y_1, \ldots, y_{n-1} \right)} \right)^2 \right\}^{1/2} \Bigg|_{y_n=0}.$$

Заметим, что по определению свойства равномерной C^m-регулярности существует постоянная K_2 такая, что для каждого j якобианы преобразований $x = \Psi_j(y)$ и $y = \Phi_j(x)$ по модулю ограничены K_2 для всех $y \in B$ и $x \in U_j$. Поэтому найдется постоянная K_3, для которой выполнено неравенство

$$|J_j(y')| \leqslant K_3 \qquad \forall\, y' \in B_0. \tag{3.6}$$

Если f является произвольной функцией, определенной на $\partial\Omega$, а $\{v_j(x)\}$ — разбиение единицы для $\partial\Omega$, соответствующее $\{U_j\}$, то

$$\int\limits_{\partial\Omega} f(x)\, d\sigma = \sum_j \int\limits_{U_j \bigcap \partial\Omega} f(x)\, v_j(x)\, d\sigma\,.$$

Поэтому, учитывая, что $0 \leqslant v_j(x) \leqslant 1$, и оценки (3.6), легко убедиться в справедливости следующих неравенств

$$\int\limits_{\partial\Omega} |Eu(x)|^q\, d\sigma \leqslant \sum_j \int\limits_{U_j \bigcap \partial\Omega} |Eu(x)|^q\, d\sigma \leqslant K_3 \sum_j \|Eu \circ \Psi_j\|^q_{0,q,B_0}. \tag{3.7}$$

Для оценки $\|Eu \circ \Psi_j\|^q_{0,q,B_0}$ воспользуемся теоремой 3.4, в результате будем иметь

$$\int\limits_{\partial\Omega} |Eu(x)|^q\, d\sigma \leqslant K_3 \sum_j \left(\|Eu \circ \Psi_j\|^p_{m,p,B} \right)^{q/p}.$$

Используя теорему 2.7 и m-гладкость преобразования $y = \Phi_j(x)$, нетрудно показать, что

$$\int\limits_{\partial\Omega} |Eu(x)|^q\, d\sigma \leqslant K_4 \sum_j \left(\|Eu\|^p_{m,p,U_j} \right)^{q/p} \leqslant K_4 \left(\sum_j \|Eu\|^p_{m,p,U_j} \right)^{q/p}.$$

Из этого неравенства, теоремы 1.4 и неравенства (3.2) следует (3.5) при $mp < n$ и $q = (n-1)p/(n-mp)$. Справедливость оценки (3.5) при других значениях параметров устанавливается так же, как при доказательстве теоремы 3.4. Теорема 3.5 доказана.

Следствие 3.4. *Утверждение теоремы 3.5 останется справедливым, если вместо свойства равномерной C^m-регулярности предположить, что область Ω обладает свойством сегмента,*

$$\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^{N} \Gamma_j\,, \tag{3.8}$$

и для каждого j существуют область $U_j \subset R^n$ и m-гладкое взаимно однозначное отображение Φ_j, переводящее U_j в ограниченную область $D \subset R^n$, а Γ_j в $D_0 \subset (D \cap R^{n-1})$.

Доказательство. При указанных предположениях имеем

$$\int\limits_{\partial\Omega} |Eu(x)|^q\, d\sigma \leqslant \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\Gamma_j} |Eu(x)|^q\, d\sigma = \sum_{j=1}^{N} \|Eu\|^q_{0,q,\Gamma_j}.$$

Используя (3.6) и теорему 3.4, нетрудно получить, что

$$\|Eu\|_{0,q,\Gamma_j} \leqslant K\, \|Eu \circ \Psi_j\|_{0,q,D_0} \leqslant K_1\, \|Eu \circ \Psi_j\|_{m,p,D}.$$

По теореме 2.7

$$\|Eu \circ \Psi_j\|_{m,p,D} \leqslant K_2\, \|Eu\|_{m,p,U_j} \leqslant K_2\, \|Eu\|_{m,p,R^n}.$$

Из этих неравенств и (3.2) следует (3.5). Поскольку область Ω обладает свойством сегмента, то (3.5) останется справедливым и для любой функции из $W_p^m(\Omega)$.

§ 4. Об операторах продолжения для $W_p^m(\Omega)$.

Совершенно очевидно, что оператор продолжения условиями (3.1), (3.2) определяется неоднозначно. Существуют разные способы построения таких операторов. Об одном из них, названном в [6] "оператором сильного m-продолжения", пойдет речь в этом параграфе.

Определение 3.6. Линейный оператор E, действующий из $W_p^k(\Omega)$ в $W_p^k(R^n)$ называется оператором сильного m-продолжения, если E является оператором продолжения для всех $1 \leqslant p < \infty$ и $0 \leqslant k \leqslant m$.

Теорема 3.6. *Пусть Ω — полупространство в R^n или область пространства R^n, обладающая свойством равномерной C^m-регулярности, у которой $\partial\Omega$ — ограниченное множество. Тогда оператор сильного m-продолжения существует.*

Доказательство. Сначала построим оператор E для

$$\Omega \;=\; R^n_+ \;\equiv\; \{\, x \in R^n \,|\quad x_n > 0 \,\}.$$

Для функций, определенных почти всюду в R^n_+, положим

$$E\,u(x) \;=\; \begin{cases} \qquad u(x), & \text{если} \quad x_n > 0, \\ \sum\limits_{j=1}^{m+1} \lambda_j\, u(x', -j\, x_n), & \text{если} \quad x_n \leqslant 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Здесь $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Коэффициенты λ_j выбираются из условия

$$\sum_{j=1}^{m+1} (-1)^k\, \lambda_j \;=\; 1.$$

Ясно, что $E\,u \,\in\, C^m(R^n)$, если $u \,\in\, C^m(\overline{R^n_+})$. Нетрудно показать, что определенный в (4.1) оператор удовлетворяет (3.2) для любой функции $u \in C^m(\overline{R^n_+})$. По теореме 2.6 неравенство (3.2) будет иметь место и для любой функции $u \in W_p^m(R^n_+)$.

Теперь пусть Ω обладает свойством равномерной C^m-регулярности и $\partial\Omega$ — ограниченное множество. Тогда существует конечное покрытие $\{U_j\}_{j=1}^N$ множества $\partial\Omega$ и m-гладкие взаимно однозначные функции $\{\Psi_j\}_{j=1}^N$ такие, что $\Psi_j(B) = U_j$ (напомним, что $B = \{y \in R^n \mid |y| < 1\}$). Пусть

$$Q \;=\; \{\, y \in R^n \,|\quad |y'| < 1/2,\; |y_n| < \sqrt{3}/2 \,\},$$

здесь $y' = (y_1, \ldots, y_{n-1})$. Имеем

$$\{\, y \in R^n \,|\; |y| < 1/2 \,\} \;\subset\; Q \;\subset\; B.$$

Положим $V_j = \Psi_j(Q)$. По условию 1) определения 3.5 объединение множеств V_j является при некотором $\delta > 0$ открытым покрытием Ω_δ. Пусть V_0 — открытое множество из Ω, находящееся от $\partial\Omega$ на расстоянии больше или равным δ, такое, что $\Omega = \bigcup\limits_{j=0}^{N} V_j$. Согласно теореме 1.1 найдутся бесконечно дифференцируемые функции $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_N$, для которых

$$\operatorname{supp}\, \omega_j \subset V_j, \qquad \sum_{j=0}^{N} \omega_j\,(x) \,=\, 1 \ \text{ для почти всех } \ x \in \Omega.$$

Заметим, что носитель ω_0 может не быть компактом, если Ω неограничена.

Далее, так как из свойства равномерной C^m-регулярности следует свойство сегмента, то множество, состоящее из сужений на Ω функций из $C_0^\infty(R^n)$, плотно в $W_p^m(\Omega)$. Поэтому для доказательства теоремы требуемое продолжение достаточно построить для сужения на Ω функции из $C_0^\infty(R^n)$. Итак, пусть $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$. Определим функции $\varphi_j = \omega_j\, \varphi$. Ясно, что $\sum\limits_{j=0}^{N} \varphi_j$ совпадает с φ на Ω.

Для $j \geqslant 1$ и $y \in B$ обозначим через $\psi_j(y) = \varphi_j(\Psi_j(y))$. По теореме 2.7

$$\|\psi_j\|_{m,p,B} \,\leqslant\, K_1\, \|\varphi_j\|_{m,p,U_j}\,. \tag{4.2}$$

Заметим, что ψ_j принадлежит $C_0^\infty(Q)$, поскольку $\varphi_j \in C_0^\infty(V_j)$ по построению. Продолжим ψ_j нулем вне Q. Пусть $E\,\psi_j$ — функция, определенная с помощью равенства (4.1). Из определения оператора E следует, что $E\,\psi_j(y', -y_n) = 0$, если $\psi_j(y) = 0$. Поэтому из неравенства (3.2) имеем

$$\|E\,\psi_j\|_{m,p,R^n} \,=\, \|E\,\psi_j\|_{m,p,Q} \,\leqslant\, K_2\, \|\psi_j\|_{m,p,R^n_+} \,=\, K_2\, \|\psi_j\|_{m,p,Q_+}, \tag{4.3}$$

здесь $Q_+ = \{y \in Q \mid \ y_n > 0\}$, K_1 — постоянная, зависящая только от p. Рассмотрим функцию $\theta_j(x) = E\,\psi_j(\Phi_j(x))$ (напомним, что $\Phi_j = \Psi_j^{-1}$). Очевидно, что $\theta_j \in C_0^m(V_j)$ и $\theta_j(x) = \varphi_j(x)$, если $x \in \Omega$. Далее, по теореме 2.7

$$\|\theta_j\|_{m,p,R^n} \,=\, \|E\,\psi_j \circ \Phi_j\|_{m,p,R^n} \,=\, \|E\,\psi_j \circ \Phi_j\|_{m,p,V_j} \,\leqslant\, K_1\, \|E\,\psi_j\|_{m,p,Q}\,.$$

Из последнего неравенства и оценок (4.3), (4.2) следует, что

$$\|\theta_j\|_{m,p,R^n} \leqslant K_3 \, \|\varphi_j\|_{m,p,\Omega}. \tag{4.4}$$

Теперь определим оператор продолжения $\widetilde{E}$ следующим образом

$$\widetilde{E}\,\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{N} \theta_j.$$

Очевидно, что $\widetilde{E}\,\varphi(x) = \varphi(x)$, если $x \in \Omega$. Ограниченность оператора $\widetilde{E}$ нетрудно показать, используя (4.4) и следующие легко проверяемые неравенства

$$\|\varphi_j\|_{m,p,\Omega} \leqslant K_3 \, \|\varphi\|_{v,p,\Omega}\,, \qquad 1 \leqslant j \leqslant N.$$

Теорема 3.6 доказана.

Следствие 3.5. *Оператор сильного* m*-продолжения существует и для*

$$\Omega = \left\{\, x \in R^n \mid \quad x_{i_j} > 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant k, \;\; 1 \leqslant i_j \leqslant n, \;\; k \leqslant n \,\right\}.$$

Доказательство. Обозначим $E^{(n)}$ оператор, определенный формулой (4.1), и построим по аналогии операторы $E^{(i)}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$. Пусть $\widehat{E} = E^{(i_1)}E^{(i_2)}\ldots E^{(i_k)}$. Нетрудно показать, что операторы $E^{(i_j)}$ перестановочны, сам же оператор $\widehat{E}$ как произведение ограниченных операторов является ограниченным оператором из $W_p^m(\Omega)$ в $W_p^m(R^n)$. Кроме того, $\widehat{E}\,u(x) = u(x)$ для любых $x \in \Omega$, так как по определению $E^{(i_j)}\,u(x) = u(x)$ при $x \in \Omega$.

Отметим, что в следствии 3.5 оператор продолжения построен для области с кусочно-гладкой границей специального вида. Используя этот результат, можно построить оператор сильного m-продолжения для существенно более широкого класса областей с кусочно-гладкой границей.

Определение 3.7. Будем говорить, что область Ω обладает свойством кусочно-равномерной C^m-регулярности, если для Ω выполнены все условия определения 3.5, кроме 3). Условие 3) заменяется следующим более слабым: для каждого j существует число $1 \leqslant k_j \leqslant n$ такое, что

$$\Phi_j(U_j \cap \Omega) = \{ y \in B \mid \quad y_i > 0, \ k_j \leqslant i \leqslant n \}.$$

Следствие 3.6. *Если Ω обладает свойством кусочно-равномерной C^m-регулярности, и $\partial\Omega$ — ограниченное множество, то оператор сильного m-продолжения существует.*

Доказательство. Построение оператора сильного m-продолжения проводится по той же схеме, что и построение оператора $\widetilde{E}$ в теореме 3.6, но при этом при определении функции θ_j вместо E нужно использовать оператор

$$\widehat{E} = E^{(k_j)} E^{(k_j+1)} \ldots E^{(n)},$$

и полагать

$$Q = \left\{ y \in R^n \,\middle|\, \left(\sum_{i=1}^{k_j-1} (y_i)^2 \right)^{1/2} < 1/2, \quad \left(\sum_{i=k_j}^{n} (y_i)^2 \right)^{1/2} < \sqrt{3}/2 \right\}.$$

§ 5. Компактные вложения $W_p^m(\Omega)$.

Почти все вложения $W_p^m(\Omega)$, доказанные в параграфе 3, для ограниченных областей Ω являются компактными. В этом параграфе для произвольной не обязательно ограниченной области Ω будет установлена компактность вложений вида

$$W_p^m(\Omega) \to X(\Omega_0), \tag{5.1}$$

где Ω_0 — ограниченная подобласть Ω, а $X(\Omega_0)$ совпадает либо с $W_q^j(\Omega_0)$, либо с $C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}_0)$, либо с $W_q^j(\Omega_0^k)$. Если Ω — ограниченная область, то в качестве Ω_0 может быть выбрана сама область Ω.

Следует отметить, что первые результаты о компактности вложения были получены Реллихом (для $W_2^1(\Omega)$ [10]) и В.И.Кондрашовым (для более общих пространств Соболева [5]), поэтому в математической литературе излагаемые ниже теоремы обычно называют теоремами Реллиха — Кондрашова.

Теорема 3.7. *Пусть* Ω *— произвольная область пространства* R^n*, обладающая сильным локальным свойством Липшица, а* Ω_0 *— ограниченная подобласть* Ω*. Тогда следующие вложения являются компактными:*

$$W_p^{m+j}(\Omega) \to C^j(\overline{\Omega}_0), \qquad mp > n; \tag{5.2}$$

$$W_p^{m+j}(\Omega) \to C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}_0), \qquad mp > n \geqslant (m-1)p. \tag{5.3}$$

Здесь $0 < \lambda < m - n/p$, $j \geqslant 0$.

Доказательство, очевидно, достаточно привести при $j = 0$. Если $mp > n \geqslant (m-1)p$ и $0 < \lambda < m - n/p$, то найдется μ такое, что $\lambda < \mu < m - n/p$. Так как Ω_0 ограничена, то вложение

$$C^{0,\mu}(\overline{\Omega}_0) \to C^{0,\lambda}(\overline{\Omega}_0) \tag{5.4}$$

является компактным по теореме 1.2. По теореме 3.3 имеет место непрерывное вложение $W_p^m(\Omega)$ в $C^{0,\mu}(\overline{\Omega}_0)$. Это означает, что любое ограниченное в $W_p^m(\Omega)$ множество будет ограничено и в $C^{0,\mu}(\overline{\Omega}_0)$. Из (5.4) следует, что в $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega}_0)$ оно будет компактным. Компактность вложения (5.3) доказана.

Если $mp > n$, то обозначим через j^* неотрицательное целое число, удовлетворяющее неравенствам $(m - j^*)p > n \geqslant (m - j^* - 1)p$. Имеет место следующая цепочка вложений

$$W_p^m(\Omega) \to W_p^{m-j^*}(\Omega) \to C^{0,\mu}(\overline{\Omega}_0) \to C(\overline{\Omega}_0), \tag{5.5}$$

где $0 < \mu < m - j^* - n/p$. Последнее вложение в (5.5) компактно по теореме (1.2). Таким образом, вложение (5.2) также компактно.

Теорема 3.8. *Пусть* Ω *— область пространства* R^n*, обладающая свойством конуса,* Ω_0 *— ограниченная подобласть* Ω*,* Ω_0^k *— пересечение* Ω_0 *с* k*-мерной плоскостью в* R^n*,* $1 \leqslant k \leqslant n$*. Кроме того, пусть* $mp > n$*. Тогда при* $j \geqslant 0$ *следующие вложения являются компактными:*

$$W_p^{m+j}(\Omega) \to C_B^j(\Omega_0), \tag{5.6}$$

$$W_p^{m+j}(\Omega) \to W_q^j(\Omega_0^k) \qquad \text{для всех } 1 \leqslant q \leqslant \infty. \tag{5.7}$$

Доказательство. Здесь также рассмотрим лишь случай $j = 0$. Не ограничивая общности, можно предполагать, что Ω_0 также обладает свойством конуса. Действительно, если это не так, то введем в рассмотрение область $\widetilde{\Omega}$, которая является объединением всех конечных конусов, конгруэнтных конусу C, содержащихся в Ω и имеющих непустое пересечение с Ω_0. Ясно, что $\Omega_0 \subset \widetilde{\Omega} \subset \Omega$, область $\widetilde{\Omega}$ ограничена и обладает свойством конуса. Если вложение $W_p^m(\Omega) \to X(\widetilde{\Omega})$ является компактным, то, очевидно, компактно и вложение $W_p^m(\Omega) \to X(\Omega_0)$.

Итак, полагаем, что Ω_0 обладает свойством конуса, кроме того, она ограничена. Тогда по теореме 3.1 она представима в виде объединения конечного числа подобластей:

$$\Omega_0 = \bigcup_{j=1}^{\aleph} \Omega_j,$$

причем каждая область Ω_j обладает сильным локальным свойством Липшица. Если $mp > n$, то

$$W_p^m(\Omega) \to W_p^m(\Omega_j) \to C^0(\overline{\Omega}_j),$$

причем последнее вложение по теореме 3.7 компактно. Пусть $\{u_i\}$ — ограниченная в $W_p^m(\Omega)$ последовательность. Поскольку число областей Ω_j конечно, то можно выделить подпоследовательность $\{u_i'\}$, сходящуюся в $C^0(\overline{\Omega}_j)$ для всех $1 \leqslant j \leqslant \aleph$. Но тогда $\{u_i'\}$ сходится в $C_B^0(\Omega_0)$. Компактность вложения (5.6) доказана.

Заметим, что из (5.6), в частности, следует компактность вложения $W_p^m(\Omega) \to C_B^0(\Omega_0^k)$. Используя этот факт, нетрудно убедиться в справедливости (5.7), если учесть, что для ограниченных областей

$$\|u\|_{0,q,\Omega_0^k} \leqslant \big(\operatorname{mes}\Omega_0^k\big)^{1/q} \, \|u\|_{C_B^0(\Omega_0^k)}.$$

Лемма 3.8. *Пусть Ω — область пространства R^n, обладающая свойством конуса, Ω_0 — подобласть Ω, множество Ω_0^k является пересечением Ω_0 с k-мерной плоскостью в R^n, $k \in [1, n]$. Кроме того, пусть $1 \leqslant q_1 < q_0$, и*

$$W_p^m(\Omega) \to L_{q_0}(\Omega_0^k), \tag{5.8}$$

$$W_p^m(\Omega) \;\to\; L_{q_1}(\Omega_0^k), \tag{5.9}$$

причем (5.9) компактно. Тогда для всех $q \in [q_1, q_0)$ *компактным является вложение*

$$W_p^m(\Omega) \;\to\; L_q(\Omega_0^k). \tag{5.10}$$

Доказательство. Пусть

$$\lambda \;=\; \frac{q_1(q_0-q)}{q(q_0-q_1)}, \qquad \mu \;=\; \frac{q_0(q-q_1)}{q(q_0-q_1)}\,.$$

Очевидно, что $\lambda > 0,\ \mu \geqslant 0,\ \lambda+\mu = 1$. Имеем

$$\|u\|^q_{0,q,\Omega_0^k} \;=\; \int\limits_{\Omega_0^k} |u(x)|^q\,dx \;=\; \int\limits_{\Omega_0^k} |u(x)|^{q\lambda}\,|u(x)|^{q\mu}\,dx.$$

Правую часть оценим с помощью неравенства Гельдера с показателем $q_1/(q\lambda)$ (сопряженным ему числом будет $q_0/(q\mu)$), в результате получим

$$\|u\|^q_{0,q,\Omega_0^k} \;\leqslant\; \|u\|^{q\lambda}_{0,q_1,\Omega_0^k}\,\|u\|^{q\mu}_{0,q_0,\Omega_0^k} \;\leqslant\; \|u\|^{q\lambda}_{0,q_1,\Omega_0^k}\,\|u\|^{q\mu}_{m,p,\Omega_0^k}\,. \tag{5.11}$$

Последняя оценка в этой цепочке неравенств следует из (5.8).

Пусть $\{u_i\}$ — ограниченная в $W_p^m(\Omega)$ последовательность. Так как вложение (5.9) компактно , то существует подпоследовательность $\{u_i'\}$, фундаментальная в $L_{q_1}(\Omega_0^k)$. Из (5.11) следует, что $\{u_i'\}$ является фундаментальной последовательностью и в $L_q(\Omega_0^k)$. Лемма доказана.

Теорема 3.9. *Пусть* Ω *— область пространства* R^n*, обладающая свойством конуса,* Ω_0 *— ограниченная подобласть* Ω*,* Ω_0^k *— пересечение* Ω_0 *с* k*-мерной плоскостью пространства* R^n*,* $1 \leqslant k \leqslant n$*. Кроме того, пусть* $mp \leqslant n$*. Тогда вложение*

$$W_p^{m+j}(\Omega) \to W_q^j(\Omega_0^k) \tag{5.12}$$

будет компактным для всех

$$1 \leqslant q < \frac{kp}{n-mp}, \qquad \textit{если} \quad 0 < n-mp < k \leqslant n;$$

$$1 \leqslant q < \infty, \qquad\quad \textit{если} \quad mp = n,\ 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Доказательство. Как уже отмечалось при доказательстве теоремы 3.8, можно полагать, что $j = 0$, и Ω_0 обладает свойством конуса. Ясно, что Ω_0^k также будет обладать свойством конуса.

Сначала докажем, что вложение (5.12) компактно при $k = n$ и при $q = q_0 \equiv np/(n - mp)$. Используя теорему 3.2 и лемму 3.8, нетрудно показать, что компактность вложения

$$W_p^m(\Omega) \to L_q(\Omega_0) \tag{5.13}$$

для $1 \leqslant q < q_0$ следует из компактности (5.13) при $q = 1$.

Докажем компактность (5.13) при $q = 1$. При этом будем использовать теорему 1.7. Пусть

$$\Omega_j \;=\; \{\, x \in \Omega_0 \,|\quad \operatorname{dist}(x, \partial\Omega_0) \;>\; 2/j \,\}, \qquad j = 1, 2, 3, \dots .$$

Если S — ограниченное в $W_p^m(\Omega)$ множество, то, очевидно, оно ограничено и в $L_1(\Omega_0)$. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $j(\varepsilon)$ такое, что для всех $u \in S$ справедливы оценки

$$\int\limits_{\Omega_0 \setminus \Omega_{j(\varepsilon)}} |u(x)|\, dx \;<\varepsilon\,, \tag{5.14}$$

$$\int\limits_{\Omega_0} |\tilde{u}(x+h) \;-\; \tilde{u}(x)|\, dx \;<\varepsilon \qquad \forall\, h \;\in\; R^n, \quad |h| < 1/j(\varepsilon). \tag{5.15}$$

Здесь

$$\tilde{u}(x) \;=\; \begin{cases} u(x), & x \in \Omega_0, \\ \;0, & x \in R^n \setminus \Omega_0. \end{cases}$$

По неравенству Гельдера и теореме 3.2 имеем

$$\int\limits_{\Omega_0 \setminus \Omega_{j(\varepsilon)}} |u(x)|\, dx \;\leqslant\; \big(\operatorname{mes}(\Omega_0 \setminus \Omega_{j(\varepsilon)})\big)^{1-1/q_0} \left\{ \int\limits_{\Omega_0 \setminus \Omega_{j(\varepsilon)}} |u(x)|^{q_0}\, dx \right\}^{1/q_0} \;\leqslant$$

$$\leqslant\; K_1\, \|u\|_{m,p,\Omega}\, \big(\operatorname{mes}(\Omega_0 \setminus \Omega_{j(\varepsilon)})\big)^{1-1/q_0}\;.$$

Используя ограниченность области Ω_0, из последнего неравенства при достаточно большом $j(\varepsilon)$ нетрудно получить (5.14) и оценку

$$\int\limits_{\Omega_0 \setminus \Omega_{j(\varepsilon)}} |\tilde{u}(x+h) - \tilde{u}(x)|\, dx < \varepsilon/2 \qquad \forall\, h \in R^n . \tag{5.16}$$

Докажем теперь, что при $|h| < 1/j(\varepsilon)$

$$\int\limits_{\Omega_{j(\varepsilon)}} |\tilde{u}(x+h) - \tilde{u}(x)|\, dx < \varepsilon/2 \qquad \forall\, u \in S .$$

Для любой функции $u \in C^\infty(\Omega)$ имеем

$$\int\limits_{\Omega_{j(\varepsilon)}} |u(x+h) - u(x)|\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega_{j(\varepsilon)}} dx \int\limits_0^1 \left| \frac{d}{dt} u(x+th) \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant |h| \int\limits_0^1 dt \int\limits_{\Omega_{2\,j(\varepsilon)}} |\operatorname{grad} u(y)|\, dy \leqslant |h|\, \|u\|_{1,1,\Omega_0} \leqslant K_2\, |h|\, \|u\|_{m,p,\Omega} , \tag{5.17}$$

поскольку $x + th \in \Omega_{2\,j(\varepsilon)}$ для всех $x \in \Omega$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$. В (5.17) постоянная K_2 не зависит от u и h. Так как $C^\infty(\Omega)$ плотно в $W_p^m(\Omega)$, то (5.17) справедливо для любого $u \in W_p^m(\Omega)$. Поэтому (5.15) также имеет место при достаточно больших $j(\varepsilon)$. По теореме 1.7 из (5.14), (5.15) и ограниченности множества S следует предкомпактность этого множества и компактность вложения (5.13) при $q = 1$, следовательно, и при $1 \leqslant q < q_0$.

Теперь рассмотрим случай $k < n$, а $p > 1$. Пусть r выбрано так, что $1 < r < p$ и $n - mr < k$. Пусть ν — наибольшее целое число, меньшее mr, $s = kr/(n - mr)$, $q = nr/(n - mr)$. Воспользуемся первой оценкой в (2.45), полученной при доказательстве теоремы 3.4, полагая $\bar{p} = r$, $\bar{q_0} = q$, $\bar{s} = q$, $\bar{\nu} = \nu$ (символами $\bar{p}$, $\bar{q_0}$, $\bar{s}$, $\bar{\nu}$ обозначены параметры p, q_0, s, ν из теоремы 3.4). В результате получим

$$\|u\|_{0,1,\Omega_0^k} \leqslant K_3\, \|u\|_{0,s,\Omega_0^k} \leqslant$$

$$\leqslant K_4\, \|u\|_{0,q,\Omega_0}^{\beta}\, \|u\|_{m,r,\Omega_0}^{1-\beta} \leqslant K_5\, \|u\|_{0,q,\Omega_0}^{\beta}\, \|u\|_{m,p,\Omega}^{1-\beta} , \tag{5.18}$$

здесь $\beta = n(mr-\nu)/(mr(n-\nu))$, K_3, K_4, K_5 не зависят от u. Заметим, что $0 < \beta < 1$, $1 < q < q_0$. Из (5.18) и доказанной уже компактности вложения $W_p^m(\Omega) \to L_q(\Omega_0)$ следует компактность вложения $W_p^m(\Omega)$ в $L_1(\Omega_0^k)$. Используя это и лемму 3.8, нетрудно показать, что $W_p^m(\Omega)$ вкладывается в $L_q(\Omega_0^k)$ компактно для всех $q \in [1, kp/(n-kp))$.

Если $p = 1$ и $0 \leqslant n - m < k < n$, то, очевидно, $n - m + 1 \leqslant k < n$, а потому $2 \leqslant m \leqslant n$. По теореме 3.2

$$W_p^m(\Omega) \to W_r^{m-1}(\Omega) \qquad \text{при} \quad r = n/(n-1) > 0.$$

Вложение $W_r^m(\Omega) \to L_1(\Omega_0^k)$ является компактным по доказанному выше. Этого достаточно для завершения доказательства теоремы при $n > mp$.

Пусть теперь $n = mp$. Если $p > 1$ и $1 \leqslant q < \infty$, то можно выбрать r таким, что $1 \leqslant r < p$, $k > n - mr > 0$ и $kr/(n-mr) > q$. Тогда по доказанному выше имеем

$$W_p^m(\Omega) \to W_r^m(\Omega_0) \to L_q(\Omega_0^k), \tag{5.19}$$

причем последнее вложение компактно.

При $p = 1$, $n = m \geqslant 2$ положим $r = n/(n-1) > 1$. Тогда по теореме 3.2

$$W_1^n(\Omega) \to W_r^{n-1}(\Omega)\,.$$

Компактность вложения $W_r^{n-1}(\Omega)$ в $L_q(\Omega_0^k)$ следует из (5.19).

Наконец, пусть $p = m = n = 1$. В этом случае $k = 1$ и $\Omega_0^k = \Omega_0$. Ранее при $k = n$ была доказана для любого $p \geqslant 1$ компактность вложения

$$W_p^1(\Omega) \to L_1(\Omega_0).$$

Из последнего утверждения, вложения $W_1^1(\Omega) \to L_q(\Omega_0)$ для любого $1 \leqslant q < \infty$ и леммы 3.8 следует утверждение теоремы и в этом случае. Теорема доказана.

Теорема 3.10. *Пусть Ω — ограниченная область пространства R^n, обладающая свойством равномерной C^m-регулярности, и существует оператор продолжения E (см. параграф 4), действующий из $W_p^m(\Omega)$ в $W_p^m(R^n)$. Тогда вложение*

$$W_p^m(\Omega) \to L_q(\partial\Omega) \tag{5.20}$$

компактно для

$$p \leqslant q < (n-1)p/(n-mp), \quad \textit{если} \quad n > mp;$$
$$p \leqslant q < \infty, \quad \textit{если} \quad n = mp.$$

Доказательство. Пусть M — произвольное ограниченное в $W_p^m(\Omega)$ множество. Докажем, что множество следов функций из M компактно в $L_q(\partial\Omega)$. Из свойства равномерной C^m-регулярности и ограниченности области Ω следует существование конечного открытого покрытия $\{U_j\}_{j=1}^N$ множества $\partial\Omega$ и набора m-гладких взаимно однозначных функций $\{\Psi_j\}_{j=1}^N$, отображающих $B = \{y \in R^n \mid |y| < 1\}$ на множество U_j так, что

$$U_j \bigcap \partial\Omega \; = \; \Psi_j(B_0), \qquad B_0 = \{y \in B \mid y_n = 0\}.$$

Имеем

$$\|E\,u\|_{m,p,U_j} \;\leqslant\; \|E\,u\|_{m,p,R^n} \;\leqslant\; K\,\|u\|_{m,p,\Omega} \;\leqslant\; \overline{K} \qquad \forall u \in M.$$

Используя m-гладкость функций Ψ_j, нетрудно показать (см. также доказательство теоремы 3.5), что

$$\|Eu \circ \Psi_j\|_{m,p,B} \;\leqslant\; \overline{K}_1\,\|E\,u\|_{m,p,U_j}\,,$$

то есть множество функций $\{Eu \circ \Psi_j \mid u \in M\}$ равномерно ограничено в $W_p^m(B)$. По теореме 3.9 найдется последовательность $\{Eu_n^j \circ \Psi_j\}_{n=1}^\infty$, где $u_n^j \in M$, фундаментальная в $L_q(B_0)$. Поскольку покрытие $\{U_j\}_{j=1}^N$ содержит конечное число элементов, то, очевидно, найдется последовательность $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset M$ такая, что при каждом j последовательность $\{Eu_n \circ \Psi_j\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна. Докажем, что $\{Eu_n\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна в $L_q(\partial\Omega)$. Используя неравенство (3.7), запишем следующие соотношения

$$\int\limits_{\partial\Omega} |Eu_n(x) \,-\, Eu_l(x)|^q\,d\sigma \;\leqslant\; \sum_{j=1}^N \int\limits_{U_j \bigcap \partial\Omega} |E\,(u_n \,-\, u_l)(x)|^q\,d\sigma \;\leqslant$$

$$\leqslant\; K_3 \sum_{j=1}^N \|E\,u_n \circ \Psi_j \,-\, E\,u_l \circ \Psi_j\|_{0,q,B_0}^q \;\to 0 \qquad \text{при} \quad n, l \to \infty\,.$$

Теорема доказана.

Следствие 3.7. *Утверждение теоремы 3.10 остается справедливым, если вместо свойства равномерной C^m-регулярности предположить, что область Ω обладает свойством сегмента,*

$$\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^{N} \Gamma_j\,,$$

и для каждого j существуют область $U_j \subset R^n$ и m-гладкое взаимно однозначное отображение Φ_j, переводящее U_j в ограниченную область $D \subset R^n$, а Γ_j в $D_0 \subset (D \cap R^{n-1})$.

Доказательство этого утверждения дословно повторяет доказательство теоремы 3.10.

Глава 4

Пространства Соболева дробного порядка

В данной главе определяются пространства Соболева $W_p^s(\Omega)$ с нецелым s. Для упрощения изложения мы ограничиваемся случаем $0 < s < 1$; аналогичным образом можно рассмотреть пространства для любых нецелых $s > 0$. Пространства подобного типа естественным образом возникают при описании граничных свойств функций классических пространств Соболева, но представляют также интерес и с других точек зрения, например, в теории интерполяции функциональных пространств.

При изложение основ теории пространств с дробным порядком дифференцирования мы существенно используем интерполяционный "метод следов" Лионса, привлекая аппарат интегрирования и обобщенного дифференцирования функций со значениями в банаховом пространстве.

§ 1. Банаховозначные функции, интеграл Бохнера

Банаховозначной функцией будем называть отображение числового интервала S в банахово пространство B и обозначать: "$f : S \to B$". Пусть $C(S; B)$ — множество непрерывных отображений $S \to B$. Если интервал S компактен, то $C(S; B)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{C(S;B)} = \sup_{t\in S} \|f(t)\|_B .$$

Функция $f : S \to B$ называется дифференцируемой в точке $t \in S$, если существует элемент $b \in B$ такой, что

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ t+h\in S}} \left\| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} - b \right\|_B = 0 .$$

Элемент b называют производной от f в точке t и обозначают $f'(t)$. Функция $f : S \to B$ называется дифференцируемой, если она дифференцируема в каждой точке интервала S. При этом функция $f'(t) : S \to B$, которая каждому $t \in S$ ставит в соответствие производную от f в точке t, называют производной первого порядка банаховозначной функции f. Аналогично определяются производные и более высоких порядков.

Через $C^m(S;B)$ будем обозначать множество функций $f : S \to B$, обладающих непрерывными производными до порядка m включительно. В случае компактного интервала S множество $C^m(S;B)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{C^m(S;B)} = \sum_{j=0}^{m} \sup_{t\in S} \|f^{(j)}(t)\|_B \,,$$

где $f^{(j)}(t)$ — производная порядка j от функции f в точке t.

Введем понятие интеграла для банаховозначных функций. Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$. Функция $f : (a,b) \to B$ называется простой, если она имеет вид

$$f(t) = \sum_{j=1}^{m} \chi_{A_j}(t) u_j,$$

где $\{A_j\}_{j=1}^m$ — конечное семейство измеримых по Лебегу попарно непересекающихся подмножеств (a,b), χ_{A_j} — характеристическая функция множества A_j, $\{u_j\}_{j=1}^m$ — набор элементов из B. Для простой функции полагаем

$$\int\limits_a^b f(t)dt = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{mes}\,(A_j) u_j,$$

где $\mathrm{mes}\,(A)$ — мера Лебега множества A.

Функция $f : (a,b) \to B$ называется измеримой, если существует последовательность простых функций $\{f_n\}$ таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(t) - f(t)\|_B = 0 \quad \text{п.в. на} \ \ (a,b).$$

Если, кроме того, эту последовательность можно выбрать так, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \|f_n(t) - f(t)\|_B dt = 0,$$

то f называется интегрируемой по Бохнеру на интервале (a, b). При этом полагают

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

Последовательность элементов пространства B в правой части сходится ввиду неравенства для простых функций

$$\| \int_a^b f(t)dt\|_B \leqslant \int_a^b \|f(t)\|_B dt,$$

которое предельным переходом обобщается на интегрируемые по Бохнеру функции. В дальнейшем всюду, где встречается интеграл от измеримой банаховозначной функции, он будет пониматься в смысле Бохнера.

Для $p \in [1, \infty]$ через $L_p(a, b; B)$ обозначается множество всех измеримых функций $f : (a, b) \to B$ таких, что функция $\|f(\cdot)\|_B$ является элементом пространства $L_p(a, b)$. Пространство $L_p(a, b; B)$ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|f\|_{L_p(a,b;B)} = \left(\int_a^b \|f(t)\|_B^p dt\right)^{1/p}, \qquad p \in [1, \infty),$$

$$\|f\|_{L_\infty(a,b;B)} = \operatorname*{ess\,sup}_{a\leqslant t\leqslant b} \|f(t)\|_B\,, \qquad p = \infty\,.$$

Функция f называется локально интегрируемой, если для всех c, d из (a, b) таких, что $c < d$, функция f принадлежит $L_1(c, d; B)$. В этом случае пишут $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(a, b; B)$.

Локально интегрируемая функция $g : (a, b) \to B$ называется слабой производной порядка j локально интегрируемой функции $f : (a, b) \to B$, если

$$\int_a^b \varphi^{(j)}(t)f(t)dt = (-1)^j \int_a^b \varphi(t)g(t)dt$$

для всех вещественнозначных функций $\varphi \in C_0^\infty(a, b)$.

§ 2. Полугруппы операторов и абстрактная задача Коши

Пусть B — банахово пространство, и $L(B)$ — пространство линейных непрерывных операторов из B в B.

Определение 4.1. Функция $G : [0,\infty) \to L(B)$ называется непрерывной полугруппой на B, если

(i) $G(0) = I$ (тождественный оператор);

(ii) $G(s)G(t) = G(s+t)$ $\forall s, t \geqslant 0$;

(iii) для каждого $b \in B$ функция $G(\cdot)b$ непрерывна из $[0,\infty)$ в B.

Заметим, что (ii) влечет перестановочность операторов $G(s)$ и $G(t)$ для всех $s, t \geqslant 0$. Из условия (iii) следует, что для каждого $t_0 \geqslant 0$ множество $\{t \in R \mid \ \|G(t)\|_{L(B)} > t_0\}$ открыто и, следовательно, измеримо. Если $0 \leqslant t_0 < t_1 < \infty$, то функция $G(\cdot)b$ равномерно непрерывна на $[t_0, t_1]$ для каждого $b \in B$, и, следовательно, существует положительная константа K_b такая, что $\|G(t)b\|_B \leqslant K_b$ для всех $t \in [t_0, t_1]$. В силу принципа равномерной ограниченности отсюда вытекает, что $\|G(t)\|_{L(B)} \leqslant K$ на $[t_0, t_1]$. Таким образом, $\|G(\cdot)\|_{L(B)} \in L_\infty[0, t_0]$ для любого $t_0 > 0$.

Лемма 4.1. *(a) Существует предел*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|G(t)\|_{L(B)}}{t} = \delta_0 \ < \ +\infty.$$

(b) Для каждого $\delta > \delta_0$ существует постоянная M_δ такая, что для всех $t \geqslant 0$

$$\|G(t)\|_{L(B)} \leqslant M_\delta e^{\delta t}.$$

Доказательство. Пусть $N(t) = \ln \|G(t)\|_{L(B)}$. Так как

$$\|G(s+t)\|_{L(B)} \leqslant \|G(s)\|_{L(B)} \|G(t)\|_{L(B)},$$

то

$$N(s+t) \leqslant N(s) + N(t).$$

Положим $\delta_0 = \inf\limits_{t>0} N(t)/t$. Ясно, что $-\infty \leqslant \delta_0 < +\infty$. Для произвольного $\delta > \delta_0$ выберем $r > 0$ так, чтобы $N(r)/r < \delta$. Если $t \geqslant 2r$, то пусть k будет таким целым числом, что $(k+1)r \leqslant t < (k+2)r$. Тогда

$$\delta_0 \leqslant \frac{N(t)}{t} \leqslant \frac{N(kr) + N(t-kr)}{t} \leqslant \frac{k}{t} N(r) + \frac{1}{t} N(t-kr).$$

Так как $t - kr \in [r, 2r)$, то, как было замечено выше, $N(t - kr) \leqslant K$. Таким образом,

$$\delta_0 \leqslant \frac{N(t)}{t} \leqslant \frac{kr}{t}\delta + \frac{K}{t} \leqslant \left(1 - \frac{r}{t}\right)\delta + \frac{K}{t}.$$

Правая часть неравенства стремится к δ при $t \to \infty$, что доказывает утверждение (a) в силу произвольности $\delta > \delta_0 = \inf\limits_{t>0} N(t)/t$.

Если $\delta > \delta_0$, то существует t_δ такое, что $N(t) \leqslant \delta t$ при $t \geqslant t_\delta$ или, что равносильно, $\|G(t)\|_{L(B)} \leqslant e^{\delta t}$. Отсюда следует утверждение (b) с постоянной $M_\delta = \max\{1, \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant t_\delta} \|G(t)\|_{L(B)}\}$. Лемма доказана.

Пусть $D(\Lambda)$ обозначает множество тех элементов $b \in B$, для которых существует предел

$$\Lambda b = \lim_{t\to+\infty} \frac{G(t)b - b}{t}\,.$$

Ясно, что множество $D(\Lambda)$ является линейным подпространством пространства B и оператор Λ, определяемый этим равенством, есть линейный оператор из $D(\Lambda)$ в B. Оператор Λ называется инфинитезимальным производящим оператором полугруппы G. Легко видеть, что оператор Λ перестановочен с операторами $G(t)$ на $D(\Lambda)$.

Лемма 4.2. *(a) Для каждого* $b \in B$

$$\lim_{t\to 0+} \frac{1}{t} \int\limits_0^t G(\tau)b\; d\tau = b.$$

(b) Для каждого $b \in B$, $t > 0$

$$\int\limits_0^t G(\tau)b\; d\tau \in D(\Lambda), \qquad \Lambda \int\limits_0^t G(\tau)b\; d\tau = G(t)b - b.$$

(c) Для каждого $b \in D(\Lambda)$, $t > 0$

$$\int\limits_0^t G(\tau)\Lambda b\; d\tau = G(t)b - b.$$

(d) $D(\Lambda)$ *плотно в* B.

(e) Λ является замкнутым оператором в B, то есть график $\{(b,\Lambda b) \mid b \in D(\Lambda)\}$ является замкнутым подпространством пространства $B \times B$.

Доказательство. Пусть $b \in B$. Так как функция $G(\cdot)b$ непрерывна, то

$$\lim_{\tau\to 0+} \|G(\tau)b - b\|_B = 0.$$

Теперь (a) следует из тождества $b = 1/t \int\limits_0^t b\, d\tau$.

Для фиксированного $t > 0$, вследствие (ii), имеем

$$\lim_{s\to 0+} \frac{G(s)-G(0)}{s} \int\limits_0^t G(\tau)b\, d\tau = \lim_{s\to 0+} \frac{1}{s} \int\limits_0^t (G(s+\tau)-G(\tau))b\, d\tau =$$

$$= \lim_{s\to 0+} \left(\frac{1}{s} \int\limits_s^{s+t} G(\tau)b\, d\tau - \frac{1}{s} \int\limits_0^t G(\tau)b\, d\tau \right) =$$

$$= \lim_{s\to 0+} \left(\frac{1}{s} \int\limits_t^{s+t} G(\tau)b\, d\tau - \frac{1}{s} \int\limits_0^s G(\tau)b\, d\tau \right) =$$

$$= \lim_{s\to 0+} \frac{1}{s} \int\limits_0^s G(\tau)G(t)b\, d\tau - b = G(t)b - b.$$

Это доказывает утверждение (b). Если $b \in D(\Lambda)$, то при $s \to 0+$

$$\left\| \int\limits_0^t G(\tau) \left(\frac{G(s)b-b}{s} - \Lambda b \right) d\tau \right\| \leqslant$$

$$\leqslant t \sup_{0<\tau<t} \|G(\tau)\|_{L(B)} \left\| \frac{G(s)b-b}{s} - \Lambda b \right\| \to 0.$$

Таким образом,

$$\Lambda \int\limits_0^t G(\tau)b\, d\tau = \lim_{s\to 0+} \int\limits_0^t G(\tau) \frac{G(s)b-b}{s}\, d\tau = \int\limits_0^t G(\tau)\Lambda b\, d\tau,$$

что доказывает утверждение (c). Утверждение (d) является непосредственным следствием (a) и (b).

Пусть $b_n \in D(\Lambda)$, $b_n \to b$ и $\Lambda b_n \to b_0$ в B. По (c) имеем

$$G(t)b_n - b_n = \int_0^t G(\tau)\,\Lambda b_n\,d\,\tau.$$

Переходя к пределу по $n \to \infty$, получим

$$G(t)b - b = \int_0^t G(\tau)\,b_0\,d\tau.$$

Таким образом, по (a)

$$\lim_{t\to 0+} \frac{G(t)b - b}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t} \int_0^t G(\tau)\,b_0\,d\,\tau = b_0,$$

следовательно, $b \in D(\Lambda)$ и $\Lambda b = b_0$, что доказывает (e). Теорема полностью доказана.

Замечание 4.1. Последнее утверждение теоремы равносильно тому, что $D(\Lambda)$ является банаховым пространством относительно нормы $\|b\|_{D(\Lambda)} = \|b\|_B + \|\Lambda b\|_B$, вложенным в пространство B.

Следующая теорема касается разрешимости и единственности решения задачи Коши в банаховом пространстве.

Теорема 4.1. *Пусть Λ является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы G в банаховом пространстве B. Пусть $a \in D(\Lambda)$ и пусть $f : [0,\infty) \to B$ — непрерывно дифференцируемая функция. Тогда существует единственная непрерывная функция $u : [0,\infty) \to D(\Lambda)$, имеющая непрерывную производную из $[0,\infty) \to B$, такая, что*

$$u'(t) - \Lambda u(t) = f(t) \quad \forall\, t > 0, \quad u(0) = a. \tag{2.1}$$

Более того, решение этой задачи дается формулой

$$u(t) = G(t)a + \int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau. \tag{2.2}$$

Доказательство. Единственность. Нужно показать, что решением задачи (2.1) с правой частью $f(t) \equiv 0$ и начальным условием $a = 0$ может быть только $u(t) \equiv 0$. Действительно, если u — любое решение такой задачи, то при $t > \tau$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial \tau} G(t-\tau)u(\tau) = \lim_{s\to 0} \frac{G(t-\tau-s)\,u(\tau+s) - G(t-\tau)\,u(\tau)}{s} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{G(t-\tau-s) - G(t-\tau)}{s}\,u(s) + \lim_{s\to 0} G(t-\tau-s)\,\frac{u(\tau+s)-u(\tau)}{s} =$$

$$= -G(t-\tau)\,\Lambda u(\tau) + G(t-\tau)\,u'(\tau) = -G(t-\tau)\,\left(\Lambda u(\tau) - u'(\tau)\right) = 0.$$

Поэтому, $G(t-\tau)u(\tau) = G(t)u(0) = 0$ для всех $t > \tau$. Переходя к пределу по $t \to \tau+$, получим $u(\tau) = G(0)u(\tau) = 0$ для всех $\tau \geqslant 0$.

Существование. Покажем, что функция u, определяемая формулой (2.2), является решением задачи (2.1). Поскольку $u(0) = a$, то, очевидно, $(d/dt)G(t)a = \Lambda G(t)a$. Следовательно, достаточно проверить, что

$$g(t) = \int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau \in D(\Lambda) \qquad \forall\, t > 0,$$

функция $g : [0,\infty) \to B$ непрерывно дифференцируема и удовлетворяет при $t > 0$ уравнению $g'(t) = \Lambda g(t) + f(t)$. Действительно,

$$\frac{g(t+s)-g(t)}{s} = \frac{1}{s}\int_0^{t+s} G(t+s-\tau)\,f(\tau)\,d\tau - \frac{1}{s}\int_0^t G(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{s}\int_{-s}^{t} G(t-\tau)\,f(\tau+s)\,d\tau - \frac{1}{s}\int_0^t G(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^t G(t-\tau)\,\frac{f(\tau+s)-f(\tau)}{s}\,d\tau + \frac{1}{s}\int_0^{t+s} G(\tau)\,f(t+s-\tau)\,d\tau.$$

Так как f непрерывно дифференцируема на $[0,\infty)$ в B, то функция

$$g'(t) = \int\limits_0^t G(t-\tau)f'(\tau)d\tau + G(t)f(0)$$

определена и непрерывна на $[0,\infty)$ в B. С другой стороны,

$$\frac{g(t+s)-g(t)}{s} =$$

$$= \int\limits_0^t \frac{G(s)-G(0)}{s} G(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau \;+\; \frac{1}{s}\int\limits_t^{t+s} G(t+s-\tau)\, f(\tau)\, d\tau \;=$$

$$= \frac{G(s)-G(0)}{s}\, g(t) \;+\; \frac{1}{s}\int\limits_0^s G(s-\tau)\, f(t+\tau)\, d\tau.$$

По лемме 4.2(a) и в силу непрерывности f последнее слагаемое сходится к $f(t)$, когда $s \to 0+$. Таким образом, вместе с существованием $g'(t)$ существует $\lim\limits_{s\to 0+} (G(s)-G(0))g(t)/s$ и, следовательно, $g(t) \in D(\Lambda)$. Поэтому $g'(t) = \Lambda g(t) + f(t)$, и теорема доказана.

§ 3. Пространство следов

Пусть B_1 и B_2 два банахова пространства с нормами $\|\cdot\|_i$, $i=1,2$, соответственно, и пусть эти пространства непрерывно вложены в некоторое банахово пространство X. Определим сумму пространств

$$B_1 + B_2 \;=\; \{\, b_1 + b_2 \in X \mid \quad b_i \in B_i,\ i = 1,2 \}\ ,$$

которая является банаховым пространством относительно нормы

$$\|u\|_{B_1+B_2} \;=\; \inf\,(\|b_1\|_1 + \|b_2\|_2),$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным представлениям вектора $u = b_1 + b_2 \in B_1 + B_2$, $b_i \in B_i$, $i=1,2$.

Для вещественного ν через t^ν обозначается вещественнозначная функция на $[0,\infty)$, $t^\nu(t) = t^\nu$ для любого $t \in [0,\infty)$. Определим для

$p \in [1,\infty]$ и вещественного ν векторное пространство $W(p,\nu;B_1,B_2)$, или короче W, измеримых функций $f:[0,\infty)\to(B_1+B_2)$ таких, что

$$t^\nu f \in L_p(0,\infty;B_1), \qquad t^\nu f' \in L_p(0,\infty;B_2),$$

где f' обозначает слабую производную f. Пространство W является банаховым пространством относительно нормы

$$\|f\|_W = \max\left(\|t^\nu f\|_{L_p(0,\infty;B_1)},\ \|t^\nu f'\|_{L_p(0,\infty;B_2)}\right).$$

Используя такую конструкцию можно показать, что пространство $W(p,0;\ W_p^1(R^n),L_p(R^n))$ изоморфно пространству Соболева $W_p^1(\Omega)$, где $\Omega=\{(x,t)\mid x\in R^n,\ t>0\}$.

Лемма 4.3. *Подпространство W, состоящее из бесконечно дифференцируемых на $(0,\infty)$ в B_1 функций, плотно в W при $1\leqslant p<\infty$.*

Доказательство. Рассмотрим преобразование $t=e^\tau$, $f(e^\tau)=\widetilde{f}(\tau)$. Ясно, что $f\in W$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(e^{\theta p\tau}\|\widetilde{f}(\tau)\|_{B_1}^p + e^{(\theta-1)p\tau}\|\widetilde{f}'(\tau)\|_{B_2}^p\right)d\tau \ < \ \infty,$$

где $\theta=\nu+1/p$. Пусть

$$J_\varepsilon * \widetilde{f}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} J_\varepsilon(t-\xi)\,\widetilde{f}(\xi)\,d\xi\,,$$

где $J_\varepsilon(\xi)$ — определенная в параграфе 3 главы 1 функция. Ясно, что $J_\varepsilon*\widetilde{f}:\ R\to B_1$ бесконечно дифференцируема. Следуя доказательству теоремы 1.5, нетрудно показать, что при $\varepsilon\to 0+$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(e^{\theta p\tau}\|J_\varepsilon*\widetilde{f}(\tau)-\widetilde{f}(\tau)\|_{B_1}^p + e^{(\theta-1)p\tau}\|(J_\varepsilon*\widetilde{f})'(\tau)-\widetilde{f}'(\tau)\|_{B_2}^p\right)d\tau \ \to\ 0.$$

Таким образом, функции $f_n(t)=J_{1/n}*\widetilde{f}(\ln(t))$ бесконечно дифференцируемы на $(0,\infty)$ в B_1, и $f_n\to f$ в W. Лемма доказана.

Ниже будет показано, что при определенных значениях p и ν, функции f из W будут иметь "след" $f(0)\in B_1+B_2$.

Лемма 4.4. *Пусть $f \in W$. Тогда существует $b \in B_1 + B_2$ такой, что*

$$f(t) = b + \int_1^t f'(\tau) d\tau \tag{3.1}$$

для почти всех $t \in (0, \infty)$. Следовательно, f совпадает с непрерывной функцией на $(0, \infty)$ в $B_1 + B_2$ всюду, кроме, быть может, множества меры нуль.

Доказательство. Так как $t^\nu f \in L_p(0, \infty; B_1)$, то $f \in L_{p,\mathrm{loc}}(0, \infty; B_1)$. Аналогично, $f' \in L_{p,\mathrm{loc}}(0, \infty; B_2)$, следовательно, $B_1 + B_2$-значная функция

$$v(t) = f(t) - \int_1^t f'(\tau) d\tau$$

является элементом $L_{p,\mathrm{loc}}(0, \infty; B_1 + B_2)$. Поэтому для произвольного линейного непрерывного на $B_1 + B_2$ функционала b' скалярная функция $< v(\cdot), b' >$[5] локально интегрируема на $(0, \infty)$ и ее слабая производная $\dfrac{d}{dt} < v(t), b' >$ равна нулю почти всюду, откуда следует существование элемента $b \in B_1 + B_2$ такого, что $v(t) = b$ почти всюду. Лемма доказана.

Лемма 4.5. *Пусть $\nu + 1/p < 1$. Тогда для $f \in W$ правая часть (3.1) сходится в $B_1 + B_2$ при $t \to 0+$. Этот предел называется значением $f(0)$ или следом f при $t = 0$.*

Доказательство. Если $0 < s < t,\ 1 < p < \infty$, то

$$\Big\| \int_s^t f'(\tau) d\tau \Big\|_{B_2} \leqslant \int_s^t \|\tau^\nu f'(\tau)\|_{B_2} \tau^{-\nu} d\tau \leqslant \|t^\nu f'\|_{L_p(0,\infty;B_2)} \Big(\int_0^t \tau^{-\nu q} d\tau \Big)^{1/q},$$

где $q = p/(p-1)$. При $t \to 0+$ последний интеграл стремится к нулю, так как $q\nu < 1$. Это означает, что $\int\limits_1^t f'(\tau) d\tau$ сходится в B_2 при $t \to 0+$. Если $p = 1$ и $p = \infty$, то сходимость интеграла устанавливается непосредственно, без использования неравенства Гельдера. Лемма доказана.

[5]Здесь, как обычно, $< v, b' >$ — значение функционала b' на элементе v.

Для $p \in [1, \infty]$ и $\nu < 1 - 1/p$ определим пространство $T(p, \nu; B_1, B_2)$, или просто T, как пространство, состоящее из всех следов $f(0)$ функций $f \in W = W(p, \nu; B_1, B_2)$, с нормой

$$\|u\|_T = \inf_{f \in W_u} \|f\|_W, \tag{3.2}$$

где $W_u = \{f \in W \mid f(0) = u\}$.

По определению пространство T является банаховым пространством, являющимся подпространством пространства $B_1 + B_2$. В лемме 4.5 было доказано, что при $\theta = \nu + 1/p < 1$ для любой функции $f \in W$ существует след $f(0)$, то есть определен линейный оператор $\Upsilon : f \in W \to f(0) \in T$, называемый оператором следа на W. При $\theta = \nu + 1/p < 1$ оператор следа будет ограничен, так как

$$\|\Upsilon f\|_T = \|f(0)\|_T = \inf_{\widetilde{f} \in W_{f(0)}} \|\widetilde{f}\|_W \leqslant \|f\|_W \qquad \forall f \in W.$$

При выполнении более сильного неравенства $\theta \leqslant 0$ все следы эквивалентны нулю пространства $B_1 + B_2$, так как в противном случае нарушалось бы условие $t^\nu f \in L_p(0, \infty; B_1)$. Таким образом, при $\theta \leqslant 0$ пространство T тривиально и оператор следа есть нулевой оператор. Если же $\nu + 1/p \geqslant 1$, то нетрудно показать, что в пространстве W имеются функции, в окрестности нуля непрерывные (но не равномерно непрерывные) и неограниченные, поэтому след $f(0)$, в том смысле, о котором говорилось выше, не определен для всех $f \in W$. В этом случае оператор следа можно определить на некотором плотном подпространстве W и трактовать его (при разумном выборе области определения) как неограниченный замкнутый плотно определенный оператор из W в $B_1 + B_2$. Однако в дальнейшем нас будет интересовать наиболее содержательный случай: $0 < \theta < 1$.

Лемма 4.6. *Пусть $\theta = \nu + 1/p$ удовлетворяет условию $0 < \theta < 1$. Тогда*

(a) для каждого $u \in T$

$$\|u\|_T = \inf_{f \in W_u} \left(\|t^\nu f\|^{1-\theta}_{L_p(0,\infty;B_1)} \|t^\nu f'\|^{\theta}_{L_p(0,\infty;B_2)} \right);$$

(b) если $u \in B_1 \cap B_2$, то $u \in T$ и

$$\|u\|_T \leqslant K \|u\|^{1-\theta}_{B_1} \|u\|^{\theta}_{B_2} \qquad \forall u \in B_1 \cap B_2.$$

Доказательство. (a) Фиксируем $u \in T$ и $\varepsilon > 0$. Пусть $f \in W$, $f(0) = u$ и $\|f\|_W \leqslant \|u\|_T + \varepsilon$. Положим $R = \|t^\nu f\|_{L_p(0,\infty;B_1)}$, $S = \|t^\nu f'\|_{L_p(0,\infty;B_2)}$. Для $\lambda > 0$ функция $f_\lambda(t) = f(\lambda t)$ также принадлежит W и удовлетворяет равенству $f_\lambda(0) = u$. Кроме того,

$$\|t^\nu f_\lambda\|_{L_p(0,\infty;B_1)} = \lambda^{-\theta} R, \quad \|t^\nu f'_\lambda\|_{L_p(0,\infty;B_2)} = \lambda^{1-\theta} S.$$

Эти две нормы становятся равными $R^{1-\theta}S^\theta$ при $\lambda = R/S$. Следовательно,

$$\max(R,S) = \|f\|_W \leqslant \|u\|_T + \varepsilon \leqslant \inf_{\lambda>0} \|f_\lambda\|_W + \varepsilon \leqslant$$
$$\leqslant \inf_{\lambda>0} \max(\lambda^{-\theta}R, \lambda^{1-\theta}S) + \varepsilon \leqslant R^{1-\theta}S^\theta + \varepsilon \leqslant \max(R,S) + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ утверждение (a) доказано.

(b) Выберем функцию $\varphi \in C^\infty[0,\infty)$, удовлетворяющую условиям $\varphi(0) = 1, \varphi(t) = 0$ при $t \geqslant 1$ и $|\varphi'(t)| \leqslant K_1$ для всех $t \geqslant 0$. Если $u \in B_1 \cap B_2$, то для $f(t) = \varphi(t)u$ имеем $f(0) = u$ и

$$\|t^\nu f\|_{L_p(0,\infty;B_1)} \leqslant K_2 \|u\|_{B_1},$$

где $K_2 = \|t^\nu\|_{L_p(0,1)}$. Аналогично,

$$\|t^\nu f'\|_{L_p(0,\infty;B_2)} \leqslant K_1 K_2 \|u\|_{B_2},$$

следовательно, $f \in W$, и утверждение (b) следует теперь из (a). Лемма доказана.

Имеет место следующая

Теорема 4.2. *Пусть пространства B_1, B_2 непрерывно вложены в некоторое пространство X, а пространства A_1, A_2 — в $\widetilde{X}$, причем $B_1 \cap B_2$ плотно в B_1 и в B_2. Пусть далее $L : B_1 \cap B_2 \to A_1 \cap A_2$ — линейный оператор, для которого справедливы оценки*

$$\|Lu\|_{A_i} \leqslant K_i \|u\|_{B_i} \qquad \forall u \in B_1 \cap B_2, \quad i = 1,2.$$

Тогда при $0 < \theta = \nu + 1/p < 1$ оператор L является непрерывным оператором из $T = T(p,\nu;B_1,B_2)$ в $\widetilde{T} = T(p,\nu;A_1,A_2)$ и имеет место неравенство

$$\|Lu\|_{\widetilde{T}} \leqslant K_1^{1-\theta} K_2^\theta \|u\|_T \qquad \forall u \in T.$$

Доказательство. В силу плотности $B_1 \cap B_2$ в каждом из B_i оператор L по непрерывности можно единственным образом продолжить до линейного непрерывного оператора из B_i в A_i $(i = 1, 2)$, а, следовательно, и из $B_1 + B_2$ в $A_1 + A_2$, при этом $\|Lu\|_{A_1+A_2} \leqslant \max(K_1, K_2)\|u\|_{B_1+B_2}$. Так как L определен на $B_1 + B_2$, то он определен и на T. По предыдущей лемме для произвольного $u \in T$ и $\varepsilon > 0$ найдется элемент $f \in W$ такой, что $f(0) = u$ и

$$\|t^\nu f\|^{1-\theta}_{L_p(0,\infty;B_1)} \|t^\nu f'\|^{\theta}_{L_p(0,\infty;B_2)} < \|u\|_T + \varepsilon.$$

Полагая $g(t) = Lf(t)$, мы, очевидно, будем иметь $g \in W(p, \nu; A_1, A_2)$, $Lu = Lf(0) = g(0) \in \widetilde{T}$ и

$$\|Lu\|_{\widetilde{T}} \leqslant \|t^\nu g\|^{1-\theta}_{L_p(0,\infty;A_1)} \|t^\nu g'\|^{\theta}_{L_p(0,\infty;A_2)} \leqslant$$

$$\leqslant K_1^{1-\theta} \|t^\nu f\|^{1-\theta}_{L_p(0,\infty;B_1)} K_2^{\theta} \|t^\nu f'\|^{\theta}_{L_p(0,\infty;B_2)} < K_1^{1-\theta} K_2^{\theta} (\|u\|_T + \varepsilon),$$

что в силу произвольности $\varepsilon > 0$ доказывает теорему.

Замечание 4.2. Из теоремы 4.2 следует, что

$$\|L\|_{L(T,\widetilde{T})} \leqslant \|L\|^{1-\theta}_{L(B_1,A_1)} \|L\|^{\theta}_{L(B_2,A_2)},$$

где $L(Y_1, Y_2)$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из Y_1 в Y_2.

Лемма 4.7. *Предположим, что $B_1 \bigcap B_2$ плотно в B_1 и в B_2, и существует последовательность линейных операторов $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ из $L(B_1) \bigcap L(B_2)$ с областью значений в $B_1 \bigcap B_2$ такая, что*

$$\lim_{j\to\infty} \|P_j b - b\|_{B_i} = 0 \qquad \forall b \in B_i, \quad i = 1, 2.$$

Тогда для всех $u \in T$

$$\lim_{j\to\infty} \|P_j u - u\|_T = 0,$$

и $B_1 \bigcap B_2$ плотно в T.

Доказательство. Зафиксируем $u \in T$ и выберем $f \in W$ так, чтобы $f(0) = u$. Пусть $f_j(t) = P_j f(t)$. Если $b \in B_i$, то существует $j_0 = j_0(b)$ со свойством:

$$\|P_j b - b\|_{B_i} \leqslant 1 \qquad \forall j \geqslant j_0.$$

Следовательно, для каждого $b \in B_i$ последовательность $\{P_j b\}$ ограничена в B_i, $i = 1, 2$. В силу принципа равномерной ограниченности существуют постоянные K_i, $i = 1, 2$, такие, что

$$\|P_j\|_{L(B_i)} \leqslant K_i.$$

Поэтому для $i = 1, 2$

$$\|f_j(t)\|_{B_1} \leqslant K_1 \|f(t)\|_{B_1}, \quad \|f_j'(t)\|_{B_2} \leqslant K_2 \|f'(t)\|_{B_2}.$$

Так как для почти всех $t > 0$ $f_j(t) \to f(t)$ в B_1 и $f_j'(t) \to f'(t)$ в B_2 при $j \to \infty$, то, очевидно, $t^\nu f_j \to t^\nu f$ в $L_p(0, \infty; B_1)$ и $t^\nu f_j' \to t^\nu f'$ в $L_p(0, \infty; B_2)$. Это означает, что $f_j \to f$ в W, и поэтому при $j \to \infty$ $P_j u = P_j f(0) \to f(0) = u$ в T. Так как функции $t^\nu f_j$ и $t^\nu f_j'$ принимают значения в $B_1 \bigcap B_2$, то $P_j u \in B_1 \bigcap B_2$. Лемма доказана.

§ 4. Полугрупповая характеристика пространства следов

Пусть B — банахово пространство и G — непрерывная полугруппа на B, которая предполагается равномерно ограниченной, то есть

$$\|G(t)\|_{L(B)} \leqslant M, \quad 0 \leqslant t < \infty.$$

Пусть Λ — инфинитезимальный производящий оператор полугруппы G с (плотной) областью определения $D(\Lambda) \subset B$ и с нормой графика

$$\|u\|_{D(\Lambda)} = \|u\|_B + \|\Lambda u\|_B.$$

Определим пространство следов $T = T(p, \nu; D(\Lambda, B)$ при $\theta = 1/p + \nu < 1$. В этом параграфе мы дадим другую характеристику пространства T с использованием полугруппы G. Для этого определим пространство T^0, состоящее из всех элементов $u \in B$, для которых конечна норма

$$\|u\|_{T^0} = (\|u\|_B^p + \int_0^\infty t^{(\nu-1)p} \|G(t)u - u\|_B^p dt)^{1/p}. \tag{4.1}$$

Прежде, чем сформулировать основной результат, приведем без доказательства следующую вспомогательную лемму (см., напр., [4]).

Лемма 4.8. *Пусть f — вещественная функция, определенная на $[0,\infty)$, и пусть*

$$g(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f(s)ds.$$

Если $1 \leqslant p < \infty$, $\theta = 1/p + \nu < 1$, то

$$\int\limits_0^\infty t^{\nu p}|g(t)|^p dt \leqslant \frac{1}{(1-\theta)^p}\int\limits_0^\infty t^{\nu p}|f(t)|^p dt.$$

Теорема 4.3. *Если $1 \leqslant p < \infty$, $0 < 1/p + \nu < 1$, то пространство $T = T(p,\nu; D(\Lambda), B)$ совпадает с пространством T^0, и нормы $\|\cdot\|_T$ и $\|\cdot\|_{T^0}$ эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $u \in T$, и $f \in W$ такова, что $f(0) = u$, и f как функция из $(0,\infty)$ в $D(\Lambda)$ бесконечно дифференцируема. Положим $h(t) = f'(t) - \Lambda f(t)$. Если $0 < \varepsilon \leqslant t$, то по теореме 4.1

$$f(t) = G(t-\varepsilon)f(\varepsilon) + \int\limits_\varepsilon^t G(t-\varepsilon)h(\tau)d\tau.$$

Следовательно,

$$G(t-\varepsilon)f(\varepsilon) - f(\varepsilon) = \int\limits_\varepsilon^t f'(\tau)d\tau - \int\limits_\varepsilon^t G(t-\tau)h(\tau)d\tau.$$

Переходя к пределу по $\varepsilon \to 0+$, получим

$$G(t)f(0) - f(0) = \int\limits_0^t f'(\tau)d\tau - \int\limits_0^t G(t-\tau)h(\tau)d\tau.$$

По лемме 4.3 последнее равенство останется справедливым и для всех $f \in W$. Таким образом, для $u \in T$ и $f \in W_u$ имеем

$$G(t)u - u = \int\limits_0^t f'(\tau)d\tau - \int\limits_0^t G(t-\tau)h(\tau)d\tau, \quad h(\tau) = f'(\tau) - \Lambda f(\tau).$$

Из этих соотношений и из равномерной ограниченности полугруппы G следует, что

$$\|(G(t)u-u)/t\|_B \leqslant \frac{1}{t}\int\limits_0^t \|f'(\tau)\|_B d\tau + \frac{M}{t}\int\limits_0^t \|h(\tau)\|_B\,.$$

Применяя лемму 4.8, получим

$$\int\limits_0^\infty t^{(\nu-1)p}\|G(\tau)u-u\|_B^p d\tau \leqslant \frac{1}{(1-\theta)^p}\int\limits_0^\infty t^{\nu p}(\|f'(\tau)\|_B + M\|h(\tau)\|_B)^p d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^p(M+1)^p}{(1-\theta)^p}\|t^\nu f'\|_{L_p(0,\infty;B)} + \|t^\nu \Lambda f\|_{L_p(0,\infty;B)} \leqslant \frac{2^p(M+1)^p}{(1-\theta)^p}\|f\|_W^p. \quad (4.2)$$

Так как (4.2) выполнено для любой $f\in W_u$, то

$$\int\limits_0^\infty t^{(\nu-1)p}\|G(\tau)u-u\|_B^p d\tau \leqslant \left(\frac{2M+2}{1-\theta}\right)^p \|u\|_T^p.$$

Далее, поскольку $D(\Lambda)$ непрерывно вложено в пространство B, то по теореме 4.2 имеем: $\|u\|_B \leqslant \|u\|_T$. Следовательно, T непрерывно вложено в T^0 и

$$\|u\|_{T^0} \leqslant \left(1+\frac{2M+2}{1-\theta}\right)\|u\|_T.$$

Обратно, предположим, что $u\in T^0$. Пусть $\varphi\in C^\infty[0,\infty)$ такая, что $\varphi(0)=1$, $\varphi(t)=0$ при $t\geqslant 1$ и $|\varphi'(t)|\leqslant K_1$ при $t\geqslant 0$. Положим $f(t)=\varphi(t)g(t)$, где

$$g(t)=\frac{1}{t}\int\limits_0^t G(\tau)u d\tau.$$

По лемме 4.2 (a) $f(0)=\lim\limits_{t\to 0+}\varphi(t)g(t)$. Поэтому для доказательства оценки

$$\|u\|_T \leqslant K_2\|u\|_{T^0} \qquad \forall\, u\in T$$

достаточно показать, что $f\in W$ и $\|f\|_W\leqslant K_2\|u\|_{T^0}$. Для этого, в свою очередь, нужно доказать, что $t^\nu g\in L_p(0,1;D(\Lambda))$, $t^\nu g'\in L_p(0,1;B)$ и соответствующие нормы этих функций ограничены величиной $K_3\|u\|_{T^0}$.

По лемме 4.2 (b)

$$\int\limits_0^t G(\tau)u d\tau \in D(\Lambda), \qquad \Lambda \int\limits_0^t G(\tau)u d\tau = G(t)u - u.$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^1 t^{\nu p} \left\| g(t) \right\|_{D(\Lambda)}^p dt =$$

$$= \int\limits_0^1 t^{(\nu-1)p} \left(\| \int\limits_0^t G(\tau)u d\tau \|_B + \| \Lambda \int\limits_0^t G(\tau)u d\tau \|_B \right)^p dt \leqslant$$

$$\leqslant 2^{p-1} M^p \left\| u \right\|_B^p \int\limits_0^1 t^{\nu p} dt + 2^{p-1} \int\limits_0^\infty t^{(\nu-1)p} \left\| G(t)u - u \right\|_B^p dt \leqslant$$

$$\leqslant 2^{p-1} \max(M^p \theta/p, 1) \left\| u \right\|_{T^0}^p .$$

Так как

$$g'(t) = \frac{1}{t} G(t)u - \frac{1}{t^2} \int\limits_0^t (G(\tau)u - u) d\tau,$$

$$\int\limits_0^1 t^{(\nu-1)p} \| G(t)u - u \|_B^p dt \leqslant \| u \|_{T^0}^p,$$

то, заменяя в лемме 4.8 величину ν на $\nu - 1$, получим

$$\int\limits_0^1 t^{\nu p} \, \| \frac{1}{t^2} \int\limits_0^t (G(\tau)u - u) d\tau \|_B^p dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2-\theta)^p} \int\limits_0^\infty t^{(\nu-1)p} \| G(t)u - u \|_B^p dt \leqslant \frac{1}{(2-\theta)^P} \| u \|_{T^0}^p,$$

то есть

$$\int\limits_0^1 t^{\nu p} \| g'(t) \|_B^p dt \leqslant K_4 \| u \|_{T^0}^p.$$

Следовательно, $g \in W$ и $\|f\|_W \leqslant K_5\|u\|_{T^0}$, что завершает доказательство теоремы.

Далее дадим обобщение теоремы 4.3 в следующем смысле. Пусть $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$ — конечное семейство инфинитезимальных производящих операторов полугрупп $G_1, G_2, \ldots, G_n$ на B, коммутирующих между собой и равномерно ограниченных, то есть для $1 \leqslant j, k \leqslant n,\ s, t \geqslant 0$

$$\|G_j(t)\|_{L(B)} \leqslant M_j, \quad G_j(s)G_k(t) = G_k(t)G_j(s).$$

Пусть $B^n = B \times B \times \ldots \times B$ (n множителей) — декартово произведение, являющееся банаховым пространством с нормой

$$\|(b_1, b_2, \ldots, b_n)\|_{B^n} = \sum_{j=1}^{n} \|b_j\|_B.$$

Введем оператор Λ, определенный на $D(\Lambda) = \bigcap\limits_{j=1}^{n} D(\Lambda_j)$, со значениями в B^n, полагая

$$\Lambda u = (\Lambda_1 u, \Lambda_2 u, \ldots, \Lambda_n u).$$

Обобщая лемму 4.2, нетрудно показать, что Λ — замкнутый оператор с плотной в B областью определения $D(\Lambda)$, которая является банаховым пространством относительно нормы

$$\|u\|_{D(\Lambda)} = \|u\|_B + \|\Lambda u\|_{B^n} = \|u\|_B + \sum_{j=1}^{n} \|\Lambda_j u\|_B.$$

Справедлива

Теорема 4.4. *Если $0 < 1/p + \nu < 1,\ 1 \leqslant p < \infty$, то пространство следов $T = T(p, \nu; D(\Lambda), B)$ совпадает с пространством T^0 всех $u \in B$, для которых конечна норма*

$$\|u\|_{T^0} = \left(\|u\|_B^p + \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty t^{(\nu-1)p} \|G_j(t)u - u\|_B^p dt\right)^{1/p},$$

при этом нормы $\|\cdot\|_T$ и $\|\cdot\|_{T^0}$ эквивалентны.

Доказательство этой теоремы повторяет доказательство теоремы 4.3 с той лишь разницей, что здесь при доказательстве вложения $T^0 \subset T$ в качестве функции $g(t)$ нужно взять

$$g(t) = \frac{1}{t^n} \int\limits_0^t \int\limits_0^t \ldots \int\limits_0^t G_1(\tau_1) G_2(\tau_2) \ldots G_n(\tau_n) u d\tau_1 d\tau_2 \ldots d\tau_n.$$

Рассмотрим далее важный с точки зрения последующих рассуждений

Пример 4.7. Пусть $B = L_p(R^n)$, $1 \leqslant p < \infty$. Для $u \in B$ рассмотрим полугруппы сдвигов по координатным направлениям

$$(G_j(t)u)(x) = u(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \ldots, x_n), \quad (t > 0).$$

Нетрудно видеть, что G_j коммутируют, непрерывны на $B = L_p(R^n)$ и равномерно ограничены ($M_j = 1$). При этом инфинитезимальным производящим оператором Λ_j будет слабая производная D_j по переменной x_j, и $D(\Lambda_j) = \{u \in L_p(R^n) \mid \ D_j u \in L_p(R^n)\}$. Ясно, что

$$D(\Lambda) = \bigcap_{j=1}^{n} D(\Lambda_j) = W_p^1(R^n).$$

По теореме 4.4 норма

$$\left(\|u\|^p_{0,p,R^n} + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^\infty t^{(\nu-1)p} \int\limits_{R^n} |u(x + te_j) - u(x)|^p dx dt \right)^{1/p}$$

эквивалентна норме пространства следов $T = T(p, \nu; W_p^1(R^n),\ L_p(R^n))$, если $0 < 1/p + \nu < 1$. Здесь $(x + te_j) = (x_1, \ldots, x_j + t, \ldots, x_n)$.

§ 5. Пространства Соболева $W_p^s(\Omega)$ дробного порядка

В этом разделе мы определим пространства $W_p^s(\Omega)$ для $s \in (0, 1)$ и $p \in (1, \infty)$. Такие пространства называют пространствами Соболева-Слободецкого.

В дальнейшем всюду $s,\ p,\ \nu$ обозначают числа, удовлетворяющие условиям:

$$0 < s < 1, \quad 1 < p < \infty, \quad \nu = 1 - s - \frac{1}{p}\ .$$

Таким образом, для $\theta = \nu + 1/p$ имеем: $0 < \theta < 1$.

Обозначим через $W_p^s(\Omega)$ пространство следов $T(p,\nu; W_p^1(\Omega), L_p(\Omega))$, норму этого пространства — через $\|u\|_{s,p,\Omega}$. Следовательно,

$$\|u\|_{s,p,\Omega} =$$

$$= \inf_{f \in W_u} \max\left\{ \left(\int_0^\infty t^{\nu p} \|f(t)\|^p_{1,p,\Omega} dt \right)^{1/p}, \left(\int_0^\infty t^{\nu p} \|f'(t)\|^p_{0,p,\Omega} dt \right)^{1/p} \right\}, \quad (5.1)$$

где $W = W(p,\nu; W_p^1(\Omega), L_p(\Omega))$.

Теорема 4.5. *$C_0^\infty(R^n)$ плотно в $W_p^s(R^n)$.*

Доказательство. Теорема верна для $s = 0$ и $s = 1$ (см. теорему 2.6). Пусть $\psi \in C^\infty(R)$, $\psi(t) = 1$ при $t \leqslant 0$ и $\psi(t) = 0$ при $t \geqslant 1$. Определим $\psi_j \in C^\infty(R^n)$, положив $\psi_j(x) = \psi(|x| - j)$. Пусть

$$P_j u = J_{1/j} * (\psi_j u), \quad j = 1, 2, \ldots$$

Очевидно, P_j есть линейный непрерывный из $W_p^m(R^n)$ в $W_p^m(R^n)$ оператор с областью значений в $C_0^\infty(R^n)$. По лемме 2.1 для $u \in W_p^m(R^n)$ при целых $m \geq 0$ справедливо равенство

$$\lim_{j \to \infty} \|P_j u - u\|_{m,p,R^n} = 0.$$

Поэтому по лемме 4.7 для $u \in W_p^s(R^n) = T(p,\nu; W_p^1(R^n), L_p(R^n))$ имеем

$$\lim_{j \to \infty} \|P_j u - u\|_{s,p,R^n} = 0.$$

Теорема доказана.

Утверждение теоремы 4.5, как и многие другие свойства пространств $W_p^s(\Omega)$, могут быть доказаны для областей Ω более общего вида с помощью операторов продолжения с Ω на R^n.

Теорема 4.6. *Предположим, что существует оператор E, являющийся одновременно оператором продолжения из $L_p(\Omega)$ в $L_p(R^n)$ и из $W_p^1(\Omega)$ в $W_p^1(R^n)$.*[6] *Тогда пространство $W_p^s(\Omega)$ совпадает с множеством сужений всех функций из $W_p^s(R^n)$.*

[6]Этим условиям удовлетворяет, например, построенный в главе 3 оператор m-сильного продолжения при $m \geq 1$.

Доказательство. Из интерполяционного свойства пространства следов (теорема 4.2) следует, что E является оператором продолжения из $W_p^s(\Omega)$ в $W_p^s(R^n)$ (теорему 4.2 следует применить для $L = E$). Пусть $R_\Omega : W_p^s(R^n) \to W_p^s(\Omega)$ — оператор сужения на Ω функций, определенных на R^n. Применяя теорему 4.2 для оператора R_Ω, нетрудно показать непрерывность этого оператора. Таким образом,

$$W_p^s(\Omega) = R_\Omega E(W_p^s(\Omega)) \subset R_\Omega(W_p^s(R^n)) \subset W_p^s(\Omega),$$

что доказывает теорему.

Теорема 4.7. *В условиях предыдущей теоремы множество сужений на Ω функций из $C_0^\infty(R^n)$ плотно в $W_p^s(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{P}_j u = R_\Omega P_j E u$, где P_j — операторы, определенные при доказательстве теоремы 4.5. Тогда для любой функции $u \in W_p^s(\Omega)$

$$\lim_{j\to\infty} \|\widetilde{P}_j u - u\|_{s,p,\Omega} = \lim_{j\to\infty} \|P_j E u - E u\|_{s,p,R^n} = 0.$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что $P_j E u \in C_0^\infty(R^n)$.

Мы определили пространство $W_p^s(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ как пространство следов на n-мерной области $\Omega \subset R^n$ некоторого класса функций, определенных на $n+1$-мерной области $\Omega \times R_+ \subset R^{n+1}$. Как будет показано ниже, при некоторых условиях регулярности области Ω функции из $W_p^s(\Omega)$ можно охарактеризовать, используя лишь их значения на Ω. Именно, будет показано, что в некоторых случаях пространство $W_p^s(\Omega)$ совпадает с пространством $\widetilde{W}_p^s(\Omega)$ функций из $L_p(\Omega)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{\widetilde{W}_p^s(\Omega)} = \left(\|u\|_{0,p,\Omega}^p + \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \right)^{1/p}. \tag{5.2}$$

Теорема 4.8. *Пространства $W_p^s(R^n)$ и $\widetilde{W}_p^s(R^n)$ совпадают и их нормы эквивалентны.*

Доказательство. Как было показано в примере в конце предыдущего параграфа, в качестве нормы пространства $W_p^s(R^n)$ мы можем взять норму

$$\|u\|_{s,p} = \left(\|u\|^p_{0,p,R^n} + \sum_{j=1}^n \int_0^\infty t^{(\nu-1)p} \int_{R^n} |u(x+tx_j) - u(x)|^p dxdt\right)^{1/p}.$$

Для краткости записи для пространства $\widetilde{W}_p^s(R^n)$ будем использовать обозначение $\widetilde{W}$.

Пусть $u \in W_p^s(R^n)$. Для точки $x \in R^n$ положим $L_j x = (x_1, \ldots, x_j)$, $M_j x = (x_j, \ldots, x_n)$, $j = 1, \ldots, n$. Ясно, что $x = (L_j x, M_{j+1} x)$. Пусть $\lambda = (n + sp)/2 = (n - 1 + (1-\nu)p)/2$. Запишем разность $u(x) - u(y)$ в форме

$$u(x) - u(y) = \sum_{j=1}^n (u(L_{j-1}y, M_j x) - u(L_j y, M_{j+1} x)).$$

Нетрудно показать, что

$$\int_{R^n}\int_{R^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \leqslant K_1 \sum_{j=1}^n Q_j,$$

где

$$Q_j = \int_{R^n}\int_{R^n} \frac{|u(L_{j-1}y, M_j x) - u(L_j y, M_{j+1}x)|^p}{|x-y|^{2\lambda}} dxdy.$$

Ясно, что

$$Q_j = \int_{R^j} dL_j y \int_{R^{n+1-j}} dM_j x |u(L_{j-1}y, M_j x) - u(L_j y, M_{j+1}x)|^p R_j, \qquad (5.3)$$

где

$$R_j = \int_{R^{n-j}}\int_{R^{j-1}} \frac{dL_{j-1}x dM_j y}{|x-y|^{2\lambda}}.$$

Пусть $\rho^2 = |L_{j-1}(x-y)|^2 + |M_j(x-y)|^2$. Тогда

$$R_j = K_2\left(\int_0^{|x_j-y_j|} + \int_{|x_j+y_j}^\infty\right) \frac{\rho^{n-2}}{(\rho^2 + (x_j-y_j)^2)^\lambda} d\rho \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K_2}{|x_j-y_j|^{2\lambda}} \int_0^{|x_j-y_j|} \rho^{n-2} d\rho + K_2 \int_{|x_j-y_j|}^\infty \rho^{n-2-2\lambda} d\rho = K_3 |x_j-y_j|^{(\nu-1)p},$$

так как $\lambda > 0$ и $n-1-2\lambda < 0$. Положим

$$y_i = z_i,\ 1 \leqslant i \leqslant j,\ x_j = t + y_j,\ x_i = z_i,\ j+1 \leqslant i \leqslant n.$$

Тогда для (5.3) будем иметь

$$Q_j \leqslant 2K_3 \int\limits_0^\infty t^{(\nu-1)p} dt \int\limits_{R^n} |u(z_1, \ldots, z_j + t, \ldots, z_n) - u(z_1, \ldots, z_n)|^p dz.$$

Следовательно, $u \in \widetilde{W}$ и $\|u\|_{\widetilde{W}} \leqslant K_4 \|u\|_{s,p}$.

Обратно, предположим, что $u \in \widetilde{W}$. Пусть $x' = M_2 x,\ z' = M_2 z$. Очевидно, что

$$|u(x_1 + t, x') - u(x)|^p \leqslant$$
$$\leqslant K_5 \Big(|u(x_1 + t, x') - u(x_1 + 0.5t, z')|^p + |u(x_1 + 0.5t, z') - u(x)|^p \Big).$$

Интегрируя это неравенство по z' по области

$$D(t, x') = \{y' \in R^{n-1} \mid \ |x' - y'| \leqslant 0.5t\},$$

получим

$$|u(x_1 + t, x') - u(x)|^p \leqslant \frac{K_6}{t^{n-1}} \left(I_t(t, x) + I_t(0, x) \right),$$

где

$$I_t(s, x) = \int\limits_{D(t,x')} |u(x_1 + s, x') - u(x_1 + 0.5t, z')|^p dz', \qquad s = 0, t.$$

Имеем

$$\int\limits_0^\infty t^{(\nu-1)p} dt \int\limits_{R^n} \frac{1}{t^{n-1}} I_t(t, x) dx =$$

$$= \int\limits_{R^{n-1}} dx' \int\limits_0^\infty \frac{1}{t^{2\lambda}} dt \int\limits_{D(t,x')} dz' \int\limits_{-\infty}^\infty |u(x_1 + t, x') - u(x_1 + 0.5t, z')|^p dx_1 =$$

$$= \int\limits_{R^{n-1}} dx' \int\limits_0^\infty \frac{1}{t^{2\lambda}} dt \int\limits_{D(t,x')} dz' \int\limits_{-\infty}^\infty |u(x_1, x') - u(x_1 - 0.5t, z')|^p \, dx_1 =$$

$$= \int\limits_{R^n} dx \int\limits_{R^{n-1}} dz' \int\limits_{2|z'-x'|}^{\infty} \frac{|u(x_1, x') - u(x_1 - 0.5t, z')|^p}{t^{2\lambda}} dt =$$

$$= 2 \int\limits_{R^n} dx \int\limits_{R^{n-1}} dz' \int\limits_{-\infty}^{x_1 - |z'-x'|} \frac{|u(x) - u(z)|^p}{(2(x_1 - z_1))^{2\lambda}} dz_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{2^\lambda} \int\limits_{R^n} dx \int\limits_{R^n} \frac{|u(x) - u(z)|^p}{|x - z|^{2\lambda}} dz.$$

При этом используются замена переменных $z_1 = x_1 - 0.5t$ и легко проверяемые неравенства $|z' - x'| \leqslant 0.5t = x_1 - z_1$, $|x - z| \leqslant \sqrt{2}|x_1 - z_1|$. Аналогично оценивается интеграл $I_t(0, x)$. Таким образом,

$$\int\limits_0^\infty t^{(\nu-1)p} \int\limits_{R^n} |u(x_1 + t, x') - u(x)|^p dx dt \leqslant K_7 \int\limits_{R^n} \int\limits_{R^n} \frac{|u(x) - u(z)|^p}{|x - z|^{n+sp}} dx dz,$$

так как $2\lambda = n + sp$. Повторяя те же выкладки с заменой x_1 на $x_2, \ldots, x_n$, приходим к оценке $\|u\|_{s,p} \leqslant K_8 \|u\|_{\widetilde{W}}$. Теорема доказана.

Полученный результат также можно распространить с R^n на случай областей Ω более общего вида, если использовать непрерывный из $\widetilde{W}_p^s(\Omega)$ в $\widetilde{W}_p^s(R^n)$ оператор продолжения. Построению такого оператора посвящена следующая

Лемма 4.9. *Пусть Ω — либо полупространство в R^n, либо равномерно C^1-регулярная область в R^n, и $\partial\Omega$ — ограниченное множество. Тогда существует линейный непрерывный оператор E, действующий из $L_p(\Omega)$ в $L_p(R^n)$, такой, что*

1) $Eu(x) = u(x)$ почти всюду на Ω;

2) E действует из $\widetilde{W}_p^s(\Omega)$ в $\widetilde{W}_p^s(R^n)$ и непрерывен.

Доказательство. Пусть сначала $\Omega = R_+^n = \{x \in R^n \mid \ x_n > 0\}$. Обозначим $x' = L_{n-1}x$ и для $u \in L_p(\Omega)$ положим

$$Eu(x) = \begin{cases} u(x), & x_n > 0, \\ u(x', -x_n), & x_n < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\|Eu\|^p_{0,p,R^n} = \int\limits_{R^{n-1}} dx' \left(\int\limits_0^\infty |u(x)|^p dx_n + \int\limits_{-\infty}^0 |u(x', -x_n)|^p dx_n \right) = 2\|u\|^p_{0,p,R^n_+}.$$

Так же, как и выше, полагая $2\lambda = n + sp$, можем записать

$$\int\limits_{R^n}\int\limits_{R^n} \frac{|Eu(x) - Eu(y)|^p}{|x-y|^{2\lambda}} dxdy = I_{++} + I_{+-} + I_{-+} + I_{--},$$

где

$$I_{++} = \int\limits_{R^n_+}\int\limits_{R^n_+} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{2\lambda}} dxdy,$$

$$I_{+-} = \int\limits_{R^{n-1}} dx' \int\limits_{R^{n-1}} dy' \int\limits_0^\infty dx_n \int\limits_{-\infty}^0 \frac{|u(x) - u(y', -y_n)|^p}{(|x'-y'|^2 + (x_n - y_n)^2)^\lambda} dy_n \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{R^{n-1}} dx' \int\limits_{R^{n-1}} dy' \int\limits_0^\infty dx_n \int\limits_{-\infty}^0 \frac{|u(x) - u(y', -y_n)|^p}{(|x'-y'|^2 + (x_n + y_n)^2)^\lambda} dy_n \leqslant I_{++},$$

так как $(x_n + y_n)^2 \geqslant (x_n - y_n)^2$ для $x_n, y_n \geqslant 0$. Аналогично оцениваются соответствующие интегралы I_{-+}, I_{--}. Таким образом,

$$\|Eu\|_{s,p,R^n} = \|Eu\|_{\widetilde{W}^s_p(R^n)} \leqslant 4^{1/p} \|u\|_{\widetilde{W}^s_p(R^n_+)}.$$

Пусть теперь Ω — равномерно C^1-регулярная область, и $\partial\Omega$ — ограниченное множество. Тогда по определению существуют конечное открытое покрытие $\{U_j\}_{j=1}^N$ границы $\partial\Omega$ и семейство C^1-гладких функций $\{\Phi_j\}_{j=1}^N$, отображающих U_j на $B = \{y \in R^n \mid \ |y| < 1\}$, обладающие описанными в определении равномерной C^1-регулярности свойствами. Очевидно, можно считать, что U_j ограничены. Пусть $U_0 \subset \Omega$ такое открытое множество, что $\Omega \subset \bigcup\limits_{j=0}^N U_j$, и пусть $\{\omega_j\}_{j=0}^N$ — C^∞-разбиение единицы для Ω, подчиненное покрытию $\{U_j\}$. Для функции $u \in L_p(\Omega)$ положим $u_j(x) = \omega_j(x)u(x)$. Ясно, что $u_j \in L_p(\Omega)$ и $\|u_j\|_{0,p,\Omega} \leqslant \|u\|_{0,p,\Omega}$.

Если $u \in \widetilde{W}_p^s(\Omega)$, то для $1 \leqslant j \leqslant N$

$$\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega \frac{|u_j(x)-u_j(y)|^p}{|x-y|^{2\lambda}}dxdy \leqslant K_1 \int\limits_\Omega\int\limits_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{2\lambda}}dxdy +$$

$$+K_1 \int\limits_{\Omega\cap U_j} |u(y)|^p dy \int\limits_{U_j} \frac{|\omega_j(x)-\omega_j(y)|^p}{|x-y|^{2\lambda}}dxdy.$$

Так как

$$\int\limits_{U_j} \frac{|\omega_j(x)-\omega_j(y)|^p}{|x-y|^{2\lambda}}dxdy \leqslant K_2 \int\limits_{U_j} |x-y|^{p+1-n}dx \leqslant K_3,$$

то $u_j \in \widetilde{W}_p^s(\Omega)$ и $\|u_j\|_{\widetilde{W}} \leqslant K_4\|u\|_{\widetilde{W}}$. Так как $\omega_0(x) = 1$ для всех x из $\Omega \setminus (\bigcup\limits_{j=1}^N U_j)$, то последнее неравенство справедливо и для $j = 0$.

Пусть $\Psi_j = \Phi_j^{-1}$. Для $1 \leqslant j \leqslant N$ определим на R_+^n функции v_j следующим образом: $v_j(y) = u_j \circ \Psi_j(y)$, если $y \in B \cap R_+^n$, и $v_j(y) = 0$, если $y \in R_+^n \setminus B$. Тогда $v_j \in \widetilde{W}_p^s(R_+^n)$. Действительно, полагая $y = \Phi_j(x)$, $\eta = \Phi_j(\xi)$, будем иметь

$$\|v_j\|^p_{\widetilde{W}_p^s(R_+^n)} = \int\limits_{B\cap R_+^n} |u_j(\Psi_j(y))|^p dy +$$

$$+\int\limits_{B\cap R_+^n}\int\limits_{B\cap R_+^n} \frac{|u_j(\Psi_j(y))-u_j((\Psi_j(\eta))|^p}{|y-\eta|^{2\lambda}}dyd\eta = \int\limits_\Omega |u_j(x)|^p|\det\Phi_j'(x)|dx+$$

$$+\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega \frac{|u_j(x)-u_j(\xi)|^p}{|\Phi_j(x)-\Phi_j(\xi)|^{2\lambda}}|\det\Phi_j'(x)||\det\Phi_j'(\xi)|dxd\xi \leqslant K_5\|u_j\|^p_{\widetilde{W}_p^s(\Omega)},$$

так как $|\det\Phi_j'|$ ограничен, и

$$|x-\xi| = |\Psi_j(y)-\Psi_j(\eta)| \leqslant K_6|y-\eta| = K_6|\Phi_j(x)-\Phi_j(\xi)|$$

в силу C^1-гладкости функций Ψ_j.

По доказанному выше $Ev_j \in \widetilde{W}_p^s(R^n)$ и

$$\|Ev_j\|_{\widetilde{W}_p^s(R^n)} \leqslant 4^{1/p}\|v_j\|_{\widetilde{W}_p^s(R_+^n)}.$$

Заметим также, что $\operatorname{supp} Ev_j \subset\subset B$. Определим на R^n функции $\widetilde{u}_j$, полагая $\widetilde{u}_j(x) = Ev_j(\Phi_j(x))$, если $x \in U_j$, и $\widetilde{u}_j(x) = 0$, если $x \notin U_j$. Ясно, что $\widetilde{u}_j(x) = u_j(x)$ почти всюду на Ω, $\operatorname{supp} \widetilde{u}_j \subset\subset U_j$, и

$$\|\widetilde{u}_j\|_{\widetilde{W}_p^s(R^n)} \leqslant K_7 \|Ev_j\|_{\widetilde{W}_p^s(R^n)}.$$

Следовательно, оператор E^*, определяемый для каждой функции u из $\widetilde{W}_p^s(\Omega)$ формулой

$$E^* u(x) = u_0(x) + \sum_{j=1}^{N} \widetilde{u}_j(x),$$

удовлетворяет, очевидно, условиям леммы. Утверждение доказано.

Теорема 4.9. *Пусть область Ω совпадает либо с R^n, либо с полупространством R^n_+, либо равномерно C^1-регулярна, и $\partial\Omega$ — ограниченное множество. Тогда пространства $W_p^s(\Omega)$ и $\widetilde{W}_p^s(\Omega)$ совпадают и их нормы эквивалентны.*

Доказательство. По лемме 4.9 каждое из этих пространств совпадает с множеством сужений на Ω функций из $W_p^s(R^n)$ и $\widetilde{W}_p^s(R^n)$ соответственно. Последние же два пространства по теореме 4.8 совпадают и их нормы эквивалентны. Итак, пространства $W_p^s(\Omega)$ и $\widetilde{W}_p^s(\Omega)$ совпадают как множества и оба, по определению, непрерывно вложены в пространство $L_p(\Omega)$. По теореме Банаха о замкнутом графике, которую следует применить к тождественному отображению, нормы этих пространств эквивалентны. Теорема доказана.

На пространстве $W_p^s(\Omega)$ нами рассматривались три нормы:

1) фактор-норма пространства следов (3.2);

2) норма, определяемая полугруппами сдвигов в теореме 4.4;

3) норма, определяемая равенством (5.2).

В силу теорем 4.4 и 4.9 все эти нормировки эквивалентны.

§ 6. Прямые и обратные теоремы о следах

В этом параграфе устанавливаются результаты, касающиеся граничных свойств функций пространств Соболева, которые носят название прямой и обратной теорем вложения (смысл терминов будет ясен из дальнейшего). Эти теоремы фактически являются следствиями утверждений, доказанных в предыдущих параграфах.

Пусть $\Omega = R^n_+$. Границу

$$\partial\Omega = \{x \in R^n \mid \ x_n = 0\} = \big\{(x', 0) \mid \ x' \in R^{n-1}\big\}$$

этого полупространства отождествляем, как обычно, с R^{n-1}. Всюду далее $1 < p < \infty$. Пространство Соболева $W^1_p(R^n_+)$ можно рассматривать как пространство $W(p, 0; W^1_p(R^{n-1}), L_p(R^{n-1}))$. Через Υ обозначим оператор следа на $\partial\Omega$. Ясно, что на гладких функциях $\Upsilon u = u|_{\partial\Omega}$. По определению, оператор следа Υ является линейным непрерывным оператором из $W^1_p(R^n_+)$ на все пространство $W^{1-1/p}_p(\partial\Omega) = W^{1-1/p}_p(R^{n-1})$, то есть

$$\|\Upsilon u\|_{W^{1-1/p}_p(\partial\Omega)} \leqslant \|u\|_{W^1_p(R^n_+)} \,. \tag{6.1}$$

Это утверждение и есть прямая теорема вложения.

Для формулировки обратного утверждения заметим, что по определению нормы в пространстве Соболева дробного порядка (см. (5.1)) для любой функции $v \in W^{1-1/p}_p(\partial\Omega)$ найдется функция $u \in W^1_p(R^n_+)$ такая, что $\Upsilon u = v$ и

$$\|u\|_{1,p,R^n_+} \leqslant c\|v\|_{1-1/p,p,\partial\Omega}, \tag{6.2}$$

где $c > 0$ — постоянная, независящая от u. Это вторая теорема о следах, которая называется обратной теоремой вложения.

Если определить пространство следов с помощью полугрупп сдвигов по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$:

$$W^{1-1/p}_p(\partial\Omega) = T(p, 0; D(\Lambda), L_p(\partial\Omega)), \quad \Lambda = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1}),\ \Lambda_j = \partial/\partial x_j,$$

то можно построить указанным при доказательстве теоремы 4.4 способом ограниченный оператор продолжения $\Pi : W^{1-1/p}_p(\partial\Omega) \to W^1_p(R^n_+)$. Оператор Π является правым обратным к оператору следа Υ, то есть $\Upsilon\,\Pi\, v = v$ для любой функции $v \in W^{1-1/p}_p(\partial\Omega)$. Таким образом, вместо (6.2) имеет место более точный факт:

$$\|\Pi v\|_{1,p,\Omega} \leqslant c\|v\|_{1-1/p,p,\partial\Omega} \quad \text{и} \quad \Upsilon\,\Pi\, v = v \quad \forall v \in W^{1-1/p}_p(\partial\Omega). \tag{6.3}$$

Отметим, что оператор Π определяет функцию класса $W_p^1(R_+^n)$ по ее следу на границе.

Чтобы сформулировать теоремы о следах для областей с C^1-гладкой конечной границей, используем тот же метод локальных карт, что и в предыдущем параграфе, сохраняя те же обозначения. Пусть Ω — равномерно C^1-регулярная область, и $\partial\Omega$ — ограниченное множество. Пусть $\{U_j\}_{j=1}^N$ — конечное открытое покрытие границы $\partial\Omega$ и $\{\Psi_j\}_{j=1}^N$ — семейство C^1-гладких отображений $B = \{y \in R^n \mid \ |y| < 1\}$ на U_j с соответствующими свойствами, $\{\omega\}_{j=1}^N$ — C^∞-разбиение единицы для $\partial\Omega$, подчиненное покрытию $\{U_j\}$. Для функции v, определенной на $\partial\Omega$, построим продолжение на R^{n-1} по следующему правилу

$$\theta_j v(y') = \begin{cases} (\omega_j v)(\Psi_j(y',0)), & \text{если } \ |y'| < 1 \\ 0, & \text{если } \ |y'| \geq 1. \end{cases}$$

Для $0 < s < 1$ определим $W_p^s(\partial\Omega)$ как множество функций $v \in L_p(\partial\Omega)$, для которых $\theta_j v \in W_p^s(R^{n-1})$ для всех $j = \overline{1,N}$. Норму пространства $W_p^s(\partial\Omega)$ определим равенством

$$\|v\|_{s,p,\partial\Omega} = \left(\sum_{j=1}^N \|\theta_j v\|_{s,p,R^{n-1}}^p\right)^{1/p}.$$

Нетрудно убедиться в том, что определение пространства $W_p^s(\partial\Omega)$, данное выше, с точностью до эквивалентности норм не зависит от покрытия $\{U_j\}$, функций $\{\Psi_j\}$ и разбиения единицы $\{\omega_j\}$.

Теорема 4.10. *Пусть Ω — равномерно C^1-регулярная область, $\partial\Omega$ — ограниченное множество, Υ — оператор следа на $\partial\Omega$. Тогда*

1) (прямая теорема о следах) оператор Υ непрерывно отображает $W_p^1(\Omega)$ на все пространство $W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$;

2) (обратная теорема о следах) существует непрерывный оператор $\Pi : W_p^{1-1/p}(\partial\Omega) \to W_p^1(\Omega)$, обладающий свойствами (6.3).

Доказательство. Прямая теорема непосредственно следует из определения пространства $W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$. Докажем справедливость утверждения 2). Пусть $\widehat{\Pi} : W_p^{1-1/p}(R^{n-1}) \ \to \ W_p^1(R^n)$ — оператор продолжения с границы на полупространство, то есть непрерывный правый обратный к оператору следа на $\partial R^n_+ = R^{n-1}$. Пусть v — произвольная функция из $W^{1-1/p}_p(\partial\Omega)$, тогда $\theta_j v \in W^{1-1/p}_p(R^{n-1})$. Положим $w_j = \widehat{\Pi}\theta_j v \in W^1_p(R^n_+)$ и определим на Ω функцию

$$u_j(x) = \begin{cases} \omega_j(x) w_j(\Phi_j(x)), & \text{если} \quad x \in U_j \bigcap \Omega, \\ 0, & \text{если} \quad x \notin U_j \bigcap \Omega. \end{cases}$$

Ясно, что функция $u_j \in W^1_p(\Omega)$ и непрерывно зависит от $v \in W^{1-1/p}_p(\partial\Omega)$. Таким образом, линейный оператор Π, определяемый формулой

$$\Pi v = \sum_{j=1}^{N} u_j,$$

непрерывен из $W^{1-1/p}_p(\partial\Omega)$ в $W^1_p(\Omega)$. В силу того, что функции $\{\omega_j\}$ образуют разбиение единицы на $\partial\Omega$, подчиненное покрытию $\{U_j\}$, имеем $\Upsilon\,\Pi\, v = v$ для всех $v \in W^{1-1/p}_p(\partial\Omega)$. Теорема доказана.

Доказанная теорема имеет фундаментальное значение в приложениях пространств Соболева к уравнениям в частных производных. Она дает полное описание класса следов функций из пространства $W^1_p(\Omega)$.

Заключительные замечания к главе.

1) Мы ограничились случаем $0 < s < 1$ исключительно в целях упрощения изложения. Нет никаких принципиальных по сравнению с рассмотренным случаем трудностей для построения теории для произвольных вещественных $s > 0$.

2) Используя другие полугруппы, отличные от полугруппы сдвигов, можно построить различные эквивалентные нормировки пространств Соболева дробного порядка, как это было сделано в параграфе 4.

3) Имеются важные с точки зрения приложений обобщения теоремы о следах. Одно из обобщений связано с усложнением геометрии области. Например, в случае кусочно-гладкой границы без нулевых углов для корректного определения пространства $W^s_p(\partial\Omega)$ необходимо вводить некоторые условия "склейки" в стыках гладких кусков.

4) Оператор восстановления функции по ее следу можно строить таким образом, чтобы для заданного малого $\delta > 0$ носитель восстановленной функции содержался в δ-окрестности носителя ее следа. Это упроща-

ет анализ поведения функций, имеющих особенности в некоторых точках границы.

Литература

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М: Наука, 1976. – 544 с.

2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М: Наука, 1977. – 744 с.

3. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.– М: Наука, 1988. – 336 с.

4. Харди Г., Литтлвуд Дж.Е., Полиа Г. Неравенства. – М.: ИЛ, 1948, –456 с.

5. Кондрашов В.И. О некоторых свойствах функций пространства L_p // Докл. АН СССР. – 1945. – Т. 48. – №6. – С. 563–566.

6. Adams R.A. Sobolev spaces. – New York, San Francisco, London: Academic press, 1975. – 270 c.

7. Gagliardo E. Properieta di alcune classi di funczioni in piu variabili // Ricerche Mat. – 1958. – V. 7. – P. 102–137.

8. Lions J.L. Sur les espaces d'interpolation; dualite // Math. Scand – 1961. – V. 9. – P. 147–177.

9. Lions J.L. Theoremes de trace et d'interpolation (IV) // Math. Ann. – 1963. – P. 43–56.

10. Rellich F. Ein Satz uber mittlere Konvergenz // Gottingen Nachr. – 1930. – P. 30–35.