Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии

# ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ БАЛОК И ПЛАСТИН

Сабитов Камиль Басирович

Институт стратегических исследований Республики Башкортостан,
г. Стерлитамак, Россия,
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета

sabitov_fmf@mail.ru

Казань – 2021

Многие задачи о колебаниях стержней, балок и пластин, которые имеют важное значение в строительной механике, теории устойчивости вращающихся валов и вибрации кораблей приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка.

Пусть балка длины $l$ для определенности опирается на две опоры с помощью штифтовых устройств. Под влиянием непрерывной внешней силы $g(x,t)$, рассчитанной на единицу длины, вынужденные изгибные поперечные колебания однородной балки, при отсутствии вращательного движения при изгибе, описываются уравнением четвертого порядка [*Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966 (изд. 3). С. 141 – 143*], [*Рэлей Л. Теория звука. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955. (изд. 2). С. 278 – 280*]

$$\rho S u_{tt} + EJ u_{xxxx} = g(x,t),$$

где $\rho$ – линейная плотность балки, $S$ – площадь поперечного сечения, $E$ – модуль упругости материала, $J$ – момент инерции сечения относительно своей горизонтальной оси, которое перепишем в следующем виде:

$$Lu \equiv u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = f(x,t), \qquad (1)$$

где $\alpha^2 = EJ/\rho S$, $f(x,t) = g(x,t)/\rho S$.

Отметим, что к уравнению (1) приходят во многих задачах при расчете устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей [*Крылов А.Н. Вибрация судов. М., 2012. 447 с. (изд. 2)*].

Для определения колебания (смещения) $u(x,t)$ точек балки нужно задать граничные условия на концах $x = 0$ и $x = l$. Вид дополнительных граничных условий зависит от способа закрепления соответствующего конца. Если оба конца подперты, т.е. могут свободно вращаться вокруг точки закрепления, то в этом месте изгибающий момент должен равняться нулю. В этом случае мы имеем условия

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(l,t) = u_{xx}(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2}$$

А в случае балки с наглухо закрепленными обоими концами граничными условиями являются неподвижность балки и горизонтальность касательной на концах:

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u(l,t) = u_x(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3}$$

Если оба конца свободны, то в этом случае на концах должны равняться нулю изгибающий момент и тангенциальная сила

$$u_{xx}(0,t) = u_{xxx}(0,t) = u_{xx}(l,t) = u_{xxx}(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{4}$$

Если конец $x = 0$ наглухо заделан, а другой конец $x = l$ свободен, то имеем следующие граничные условия:

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u_{xx}(l,t) = u_{xxx}(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{5}$$

Если конец $x = 0$ шарнирно закреплен, а другой наглухо заделан, то

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(l,t) = u_x(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{6}$$

Возможны и другие граничные условия.

Что касается начальных условий, то они такие же, как и в случае уравнения струны:

$$u(x,t)\,|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t(x,t)\,|_{t=0} = \psi(x), 0 \le x \le l. \tag{7}$$

В данной работе для уравнения (1) изучим следующие начально-граничные задачи в прямоугольной области

$$D = \{\, (x,t)\,|\; 0 < x < l,\ \ 0 < t < T \,\}\ ,$$

где $l$ и $T$ – заданные положительные числа.

## Начально-граничные задачи

*Найти функцию $u(x,t)$ со следующими свойствами:*

$$u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(\overline{D})\,; \tag{8}$$

$$Lu(x,t) \equiv f(x,t),\ \ (x,t) \in D\,; \tag{9}$$

*удовлетворяет начальным условиям* (7) *и одному из граничных условий* (2) – (6)*, где $f(x,t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.*

Для более ясности и краткости задачу (7) – (9) и $(N)$, где $N$ принимает значения 2, 3, 4, 5, 6, назовем задачей $N-1$, т.е., например, задача (7) – (9) и (3) будет называться задачей 2.

Отметим, что в работах
[ *Рэлей Л. Теория звука. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955 (изд. 2). С. 277*],
[ *Крылов А.Н. Вибрация судов. М., 2012. 447 с. (изд. 2)*],
[ *Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях: Введение в метод промежуточных задач Вайнштейна. М.: Мир, 1970. Гл. VI*],
[ *Коренев Б.Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. М.: Стройиздат, 1965. С. 45*],
[ *Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями. М.: Наука, 1968. С. 35*],
[ *Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. С. 151*],
[ *Андрианов И.В., Данишевский В.В., Иванков А.О. Асимптотические методы в теории колебаний балок и пластин. Днепропетровск: Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, 2010. С. 25*]
методом разделения переменных найдены собственные частоты (собственные значения) и формы собственных колебаний (собственные функции) для уравнения (1) при $f(x,t)=0$ с граничными условиями (2) – (6). Вопросы об обосновании корректности поставленных нами начально-граничных задач не изучены. Интерес к этим задачам вызван обращением автору статьи специалистов по строительной механике с просьбой построить в явном виде решения поставленных задач.

**Теорема 1.1**

*Если существуют решения указанных начально-граничных задач 1 – 5, то при любом* $t \in [0, T]$ *для каждого решения справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^l \left(u_t^2 + \alpha^2 u_{xx}^2\right) dx \le e^T \left[\int\limits_0^l \left(\psi^2(x) + \alpha^2 \varphi''^{\,2}(x)\right) dx + \iint\limits_D f^2(x,t)\,dxdt\right]. \qquad (10)$$

Отметим, что интеграл

$$E_0(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(\rho S u_t^2 + EJ u_{xx}^2\right) dx = \frac{1}{\rho S}\frac{1}{2}\int\limits_0^l \left[u_t^2(x,t) + \alpha^2 u_{xx}^2(x,t)\right] dx = \frac{1}{\rho S}E(t)$$

представляет собой закон сохранения энергии свободных колебаний однородной балки при нулевых граничных условиях (2) – (6). Поэтому неравенство (10) по аналогии с теорией колебаний струны назовем энергетическим.

## Следствие 1.1

*Если в условиях теоремы* 1.1 *правая часть уравнения* (1) *равна нулю, т.е.* $f(x,t) \equiv 0$, *то при любом* $t \in [0,T]$

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \int\limits_0^l \left[ \psi^2(x) + \alpha^2 \varphi''^2(x) \right] dx, \tag{11}$$

*т.е. равенство* (11) *означает, что полная энергия свободных колебаний однородной балки остается в течении всего процесса колебаний постоянной и равной ее начальной энергии.*

## Следствие 1.2 (Теорема единственности)

*Если существует функция* $u(x,t)$, *удовлетворяющая условиям* (7) – (9) *и одному из граничных условий* (2) – (6), *то она единственна.*

Для решения задачи 1, т.е. задачи (7) – (9), (2), применим метод разделения переменных. Разделяя переменные $u(x,t) = X(x)T(t)$ в уравнении (1) при $f(x,t) \equiv 0$, получим

$$X^{(4)}(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{12}$$

$$X(0) = X''(0) = 0, \quad X(l) = X''(l) = 0. \tag{13}$$

Собственные значения и соответствующие собственные функции определяются по формулам:

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \mu_n x, \tag{14}$$

$$\lambda_n = -\mu_n^4 = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Решение поставленной задачи определяется в виде суммы ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \mu_n x, \tag{16}$$

где

$$u_n(t) = \varphi_n \cos \alpha \mu_n^2 t + \frac{\psi_n}{\alpha \mu_n^2} \sin \alpha \mu_n^2 t, \tag{17}$$

$$\varphi_n = \int_0^l \varphi(x) X_n(x)\, dx, \qquad \psi_n = \int_0^l \psi(x) X_n(x)\, dx.$$

## Теорема 1.2

*Если функции* $\varphi(x) \in C^5[0,l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(l) = 0$, $\psi(x) \in C^3[0,l]$, $\psi(0) = \psi(l) = \psi''(0) = \psi''(l) = 0$, *то существует единственное решение задачи* (7) – (9) *и* (2), *которое определяется рядом* (16), *коэффициенты которого находятся по формуле* (17).

## Теорема 1.3

*Для решения* (16) *задачи* 1 *имеют место оценки:*

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,l]} \le C_5\Big( \|\varphi(x)\|_{L_2[0,l]} + \|\psi(x)\|_{L_2[0,l]} \Big), \tag{18}$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D})} \le C_6\Big( \|\varphi'(x)\|_{C[0,l]} + \|\psi(x)\|_{C[0,l]} \Big). \tag{19}$$

Здесь рассмотрим задачу для уравнения (1) более общую, чем в п. 1.3, а именно: найти в области $D$ функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям (7) – (9) и

$$u(0,t) = h_1(t), \;\; u_{xx}(0,t) = \alpha_1(t), \;\; u(l,t) = h_2(t), \;\; u_{xx}(l,t) = \alpha_2(t), \;\; 0 \le t \le T, \tag{20}$$

где $h_i(t)$, $\alpha_i(t)$, $i = 1, 2$, – заданные достаточно гладкие, удовлетворяющие условиям согласования с начальными функциями (7):

$$\begin{array}{llll} h_1(0) = \varphi(0), & h_2(0) = \varphi(l), & \alpha_1(0) = \varphi''(0), & \alpha_2(0) = \varphi''(l), \\ h_1'(0) = \psi(0), & h_2'(0) = \psi(l), & \alpha_1'(0) = \psi''(0), & \alpha_2'(0) = \psi''(l). \end{array} \tag{21}$$

Отметим, что решение неоднородной задачи (7) – (9), (20) путем рассмотрения новой искомой функции можно непосредственно свести к решению начально-граничной задачи для неоднородного уравнения балки с новой правой частью при нулевых граничных и начальных условиях.

В самом деле, введем новую функцию

$$v(x,t) = u(x,t) - z(x,t) - w(x,t), \tag{22}$$

где

$$z(x,t) = h_1(t)\left(1 - \frac{x}{l}\right) + h_2(t)\frac{x}{l} - \frac{\alpha_1(t)}{6l}(x^3 - 3x^2 l + 2xl^2) + \frac{\alpha_2(t)}{6l}(x^3 - l^2 x), \tag{23}$$

$$w(x,t) = w_1(x) + t\,w_2(x) = \varphi(x) - \varphi(0) - [\varphi(l) - \varphi(0)]\frac{x}{l} +$$

$$+\frac{\varphi''(0)}{6l}(x^3 - 3x^2 l + 2xl^2) - \frac{\varphi''(l)}{6l}(x^3 - l^2 x) + t\Big\{\psi(x) - \psi(0) - [\psi(l) - \psi(0)]\frac{x}{l} +$$

$$+ \frac{\psi''(0)}{6l}(x^3 - 3x^2 l + 2xl^2) - \frac{\psi''(l)}{6l}(x^3 - l^2 x)\Big\}\,. \tag{24}$$

Тогда функция (22) в силу условий согласования (21) удовлетворяет уравнению

$$Lv = L(u - z - w) = f(x,t) - Lz - Lw =$$

$$= f(x,t) - h_1''(t)\left(1 - \frac{x}{l}\right) - h_2''(t)\frac{x}{l} + \frac{\alpha_1''(t)}{6l}(x^3 - 3x^2 l + 2xl^2) -$$

$$- \frac{\alpha_2''(t)}{6l}(x^3 - l^2 x) - \varphi^{IV}(x) - t\psi^{IV}(x) = \widetilde{f}(x,t) \qquad (25)$$

и нулевым граничным и начальным условиям

$$v(0,t) = v(l,t) = 0, \qquad t \leq t \leq T, \qquad (26)$$

$$v_{xx}(0,t) = v_{xx}(l,t) = 0, \qquad t \leq t \leq T, \qquad (27)$$

$$v(x,0) = v_t(x,0) = 0, \qquad 0 \leq x \leq l. \qquad (28)$$

Поэтому в дальнейшем будем изучать задачу (25) – (28) в классе функций (8). Решение этой задачи будем искать в виде суммы ряда

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \tag{29}$$

где $X_n(x)$ – собственные функции задачи (12), (13), которые определяются по формуле (14),

$$T_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_0^t \widetilde{f}_n(s) \sin[\omega_n(t-s)]\, ds, \quad \omega_n = \alpha \mu_n^2, \tag{30}$$

$$\widetilde{f}_n(t) = \int_0^l \widetilde{f}(x,t) X_n(x)\, dx\,. \tag{31}$$

## Теорема 1.4

*Если функция* $\widetilde{f}(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_x^3(\bar{D})$ *и* $\widetilde{f}(0,t) = \widetilde{f}_{xx}(0,t) = \widetilde{f}(l,t) = \widetilde{f}_{xx}(l,t) = 0$ *при* $0 \le t \le T$, *то существует единственное решение задачи* (25) – (28), (8), *которое определяется рядом* (29), *коэффициенты которого находятся по формулам* (30) *и* (31).

Рассмотрим уравнение (1) в полуплоскости

$$Q = \{(x,t)\, t > 0,\ x \in \mathbb{R}\}.$$

## Начальная задача

*Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(Q) \cap C^1_t(Q \cup \{t=0\}) \cap C(\overline{Q}); \tag{32}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0,\ \ (x,t) \in Q; \tag{33}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ u_t(x,0) = \psi(x),\ \ x \in \mathbb{R}, \tag{34}$$

*где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.*

Методом разделения переменных построим частные решения вида

$$u_\lambda^{(1)}(x,t) = \cos\alpha\lambda^2 t\left[a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x\right], \tag{35}$$

$$u_\lambda^{(2)}(x,t) = \frac{1}{\alpha\lambda^2}\sin\alpha\lambda^2 t\left[a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x\right] \tag{36}$$

с произвольными функциями $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$.

Интегрируя равенство (35) по параметру $\lambda$, получим также решение уравнения (1)

$$u_1(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos\alpha\lambda^2 t\left[a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x\right]\,d\lambda, \tag{37}$$

если этот интеграл равномерно сходится и его можно дифференцировать под знаком интеграла два раза по $t$ и четырежды по $x$.

Выберем функции $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ так, чтобы выполнялось первое из начальных условий (34). Удовлетворяя функцию (37) этому условию, получим

$$\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x]\ d\lambda. \tag{38}$$

Интеграл в первой части (38) совпадает с интегралом Фурье функции $\varphi(x)$, если

$$a(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\cos\lambda\xi\, d\xi, \qquad b(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\sin\lambda\xi\, d\xi. \tag{39}$$

Подставляя (39) в (37), будем иметь

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\sin\left[\frac{(\xi - x)^2}{4\alpha t} + \frac{\pi}{4}\right] d\xi. \tag{40}$$

## Лемма 2.1

*Функция*

$$G_1(x,t,\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha t}} \sin\left[\frac{(\xi - x)^2}{4\alpha t} + \frac{\pi}{4}\right] \tag{41}$$

*обладает со следующими свойствами:*
а) $G_1(x,t,\xi) \in C^\infty(Q)$;
б) *является решением уравнения балки в области* $Q$;
в) *при* $t \to 0+0$ *обращается в бесконечность;*
г) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_1(x,t,\xi)\, d\xi = 1.$

## Лемма 2.2

*Если функция* $\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R})$ *и функции* $\varphi(x)$, $x\varphi(x)$, $x^2\varphi(x)$, $x^3\varphi(x)$, $x^4\varphi(x)$, $\varphi''(x)$ *абсолютно интегрируемы на промежутке* $(-\infty, +\infty)$, *то функция* $u_1(x,t)$, *определенная формулой* (40), *удовлетворяет условиям* (32), (33), (34) *(где* $\psi(x) = 0$*) и ограничена в полуплоскости* $Q$.

Далее на основании частных решений (36) построим вторую часть решения задачи Коши

$$u_2(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) G_2(x,t,\xi)\, d\xi, \tag{42}$$

где

$$G_2(x,t,\xi) = \frac{1}{\pi\alpha} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2} \sin \alpha\lambda^2 t \cos\left[\lambda(\xi - x)\right]\, d\lambda. \tag{43}$$

## Лемма 2.3

*Функция $G_2(x,t,\xi)$ обладает со следующими свойствами:*

а) $G_2(x,t,\xi) \in C^\infty(Q)$;

б) *является решением уравнения* $(1)$;

в) $\lim\limits_{t\to 0+0} G_2(x,t,\xi) = 0$;

г) $\dfrac{\partial G_2(x,t,\xi)}{\partial t} = G_1(x,t,\xi)$;

д) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G_2(x,t,\xi)}{\partial t}\, d\xi = 1.$

## Лемма 2.4

*Если функция* $\psi(x) \in C(\mathbb{R})$ *и функции* $\psi(x)$, $x\psi(x)$, $x^2\psi(x)$, $x^3\psi(x)$, $x^4\psi(x)$ *абсолютно интегрируемы на* $\mathbb{R}$, *то функция* $u_2(x,t)$, *определенная формулой* $(42)$, *удовлетворяет условиям* $(32)$, $(33)$, $(34)$ *(где* $\varphi(x) = 0$*).*

## Теорема 2.1

*Если функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *удовлетворяют соответственно условиям лемм* $2.2$ *и* $2.4$, *то существует решение задачи Коши, которое определяется в виде суммы*

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t),$$

*где* $u_1(x,t)$ *и* $u_2(x,t)$ *выражаются через формулы* $(40)$ *и* $(42)$.

$$\int\limits_0^{+\infty} \left\{ \begin{array}{l} \sin\left(ax^2+bx+c\right) \\ \cos\left(ax^2+bx+c\right) \end{array} \right\} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \left\{ \frac{1}{2}\left(\cos\widetilde{d} \pm \sin\widetilde{d}\right) - \cos\widetilde{d}\, S\left(\frac{b^2}{4a}\right) \mp \sin\widetilde{d}\, C\left(\frac{b^2}{4a}\right) \right\},$$

где $\widetilde{d} = \dfrac{4ac-b^2}{4a}$, $a > 0$,

$S(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int\limits_0^z \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt,\quad C(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int\limits_0^z \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt$ – интегралы Френеля,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(ax^2+bx+c\right)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sin\left(\widetilde{d} + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \left[\cos\widetilde{d}\, S\left(\frac{b^2}{4a}\right) + \sin\widetilde{d}\, C\left(\frac{b^2}{4a}\right)\right],$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(ax^2+bx+c\right)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cos\left(\widetilde{d} + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \left[\cos\widetilde{d}\, S\left(\frac{b^2}{4a}\right) - \sin\widetilde{d}\, C\left(\frac{b^2}{4a}\right)\right],$$

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin a^2 x \cos bx\,dx = \sqrt{\pi a} \sin\left(\frac{b^2}{4a} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{b\pi}{2}\left[S\left(\frac{b^2}{4a}\right) - C\left(\frac{b^2}{4a}\right)\right] \quad a > 0.$$

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = F(x,t) = f(x)g(t). \tag{44}$$

Для уравнения (44) изучим следующие задачи.

**Задача 3.1.** *Найти функции* $u(x,t)$ *и* $f(x)$, *удовлетворяющие условиям*

$$u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(\overline{D}); \tag{45}$$

$$f(x) \in C[0,l]; \tag{46}$$

$$Lu(x,t) \equiv F(x,t), \quad (x,t) \in D; \tag{47}$$

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(l,t) = u_{xx}(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T. \tag{48}$$

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t(x,t)\Big|_{t=0} = \psi(x), 0 \le x \le l. \tag{49}$$

$$u(x,t_0) = \varphi_0(x), \quad 0 \le x \le l, \quad 0 < t_0 \le T, \tag{50}$$

*здесь* $g(t)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *– заданные функции,* $t_0$ *– заданная точка из* $(0,T]$.

**Задача 3.2.** *Найти функции* $u(x,t)$ *и* $g(t)$*, удовлетворяющие условиям* (45) – (49) *и*

$$g(t) \in C[0,T]; \tag{51}$$

$$u(x_0,t) = h(t),\ \ 0 \le t \le T,\ \ 0 < x_0 < l, \tag{52}$$

*здесь* $f(x)$*,* $h(t)$*,* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *– заданные функции,* $x_0$ *– заданная точка из* $(0,l)$*.*

**Задача 3.3.** *Найти функции* $\psi(x)$ *и* $u(x,t)$*, удовлетворяющие условиям* (45) – (49) *и дополнительному требованию*

$$u(x,T) = \varphi_0(x),\ \ 0 \le x \le l, \tag{53}$$

*где* $F(x,t)$*,* $\varphi(x)$ *и* $\varphi_0(x)$ *– заданные функции.*

**Задача 3.4.** *Найти функции* $\varphi(x)$ *и* $u(x,t)$*, удовлетворяющие условиям* (45) – (49) *и* (53)*, здесь* $F(x,t)$*,* $\psi(x)$ *и* $\varphi_0(x)$ *– известные достаточно гладкие функции.*

Из постановок этих задач видно, что задачи 3.1 и 3.2 являются обратными, поэтому здесь условия (50) и (52) являются дополнительными для определения соответственно сомножителей $f(x)$ и $g(t)$ правой части $F(x,t)$ уравнения (44).

Задачи 3.3 и 3.4 также являются обратными по отысканию начальных условий $\psi(x) = u_t(x,0)$ и $\varphi(x) = u(x,0)$, для которых условие (53) является дополнительным.

Решение прямой задачи (45) – (49) определяется в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \mu_n x, \tag{54}$$

где

$$u_n(t) = \varphi_n \cos \omega_n t + \frac{\psi_n}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t F_n(s) \sin\left[\omega_n (t-s)\right] ds, \tag{55}$$

$$F_n(t) = \int_0^l F(x,t) X_n(x)\, dx. \tag{56}$$

**Теорема 3.1.** *Если* $\varphi(x) \in C^5[0,l]$, $\varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(l) = 0$, $i = 0, 2, 4$; $\psi(x) \in C^3[0,l]$, $\psi(0) = \psi(l) = \psi''(0) = \psi''(l) = 0$; $F(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_x^3(\overline{D})$, $F(0,t) = F_{xx}(0,t) = F(l,t) = F_{xx}(l,t) = 0$ *при* $0 \le t \le T$, *то существует единственное решение задачи* (45) – (49) *и оно определяется рядом* (54).

В формуле (56) положим $F(x,t) = f(x)g(t)$, тогда она примет вид

$$F_n(t) = g(t) f_n,$$

где

$$f_n = \int_0^l f(x) X_n(x)\, dx, \tag{57}$$

$$u_n(t) = \int_0^l u(x,t) X_n(x)\, dx = \varphi_n \cos \omega_n t + \frac{\psi_n}{\omega_n} \sin \omega_n t + f_n g_n(t), \tag{58}$$

$$g_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t g(s) \sin\left[\omega_n (t-s)\right]\, ds, \quad \omega_n = \alpha \mu_n^2. \tag{59}$$

Удовлетворяя функцию (54) граничному условию (50), получим уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t_0)X_n(x) = \varphi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{0n} X_n(x), \tag{60}$$

здесь

$$\varphi_{0n} = \int_0^l \varphi_0(x) X_n(x)\, dx, \tag{61}$$

$u_n(t_0)$ определяется по формулам (55) и (56), где $f_n$ подлежат нахождению.
Из равенства (60) найдем

$$f_n = \frac{1}{g_n(t_0)} \left( \varphi_{0n} - \varphi_n \cos\omega_n t_0 - \frac{\psi_n}{\omega_n} \sin\omega_n t_0 \right) \tag{62}$$

при условии, что при всех $n \in \mathbb{N}$

$$g_n(t_0) \neq 0. \tag{63}$$

Подставляя (62) в (58) построим в явном виде функции

$$u_n(t) = \varphi_n \cos\omega_n t + \frac{\psi_n}{\omega_n} \sin\omega_n t + \frac{g_n(t)}{g_n(t_0)} \left( \varphi_{0n} - \varphi_n \cos\omega_n t_0 - \frac{\psi_n}{\omega_n} \sin\omega_n t_0 \right). \tag{64}$$

Тогда решение задачи 3.1 находится как сумма рядов

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)X_n(x), \tag{65}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_nX_n(x), \tag{66}$$

где коэффициенты $u_n(t)$ и $f_n$ определяются соответственно формулами (64) и (62) при выполнении условий (63) при всех $n\in\mathbb{N}$. Из однозначного характера построения решения задачи 3.1 следует его единственность. Действительно, пусть выполнены условия (63) при всех $n\in\mathbb{N}$ и $\varphi(x)=\psi(x)=\varphi_0(x)\equiv 0$. Тогда из (62) и (64) следует, что при всех $n\in\mathbb{N}$: $f_n=0$ и $u_n(t)\equiv 0$. Отсюда в силу равенств (57) и (58) получим, что

$$\int_0^l u(x,t)X_n(x)\,dx=0,\ \ \int_0^l f(x)X_n(x)\,dx=0,\ \ n=1,2,\dots .$$

Из этих равенств в силу полноты системы $X_n(x)$ в пространстве $L_2[0,l]$ следует, что $u(x,t)=0$ почти всюду на $[0,l]$ при любом $t\in[0,T]$ и $f(x)=0$ почти всюду на $[0,l]$. Отсюда в силу условий (45) и (46) получим, что $u(x,t)\equiv 0$ в $\overline{D}$ и $f(x)\equiv 0$ на $(0,l)$ при любой функции $g(t)$ из $C[0,T]$.

Если при некотором $t_0$ и $n=m$ выражение $g_m(t_0)=0$, то однородная задача 3.1 (где $\varphi(x)=\psi(x)=\varphi_0(x)\equiv 0$) при любой непрерывной функции $g(t)$ имеет ненулевое решение

$$u(x,t)=f_mg_m(t)\sin\mu_nx,\ \ f(x)=f_m\sin\mu_nx,$$

где $f_m\neq 0$ – произвольная постоянная.

При $g(s) = const \neq 0$

$$g_n(t_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin\frac{\omega_n t_0}{2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin\frac{\alpha\pi t_0}{2l^2}\pi n^2 = \sin d\pi n^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; d = \frac{k}{n^2} \;\; k \in \mathbb{N},$$

т.е. при рациональных значениях $d$ нарушается единственность решения задачи 3.1.

**Теорема 3.2.** *Если существует решение задачи* $3.1$*, то оно единственно только тогда, когда при всех* $n \in \mathbb{N}$ *выполнены условия* (63).

**Утверждение 3.1.** *Если* $d = \alpha\pi t_0/(2l^2)$ *является иррациональным алгебраическим числом степени* $s \geq 2$*, то существует постоянная* $C_2 > 0$*, такая, что при всех* $n \in \mathbb{N}$ *имеет место оценка*

$$\left|\sin d\pi n^2\right| > \frac{C_2}{n^{2(s-1)}}. \qquad (67)$$

**Теорема 3.3.** *Пусть функции* $\varphi(x), \varphi_0(x) \in C^{4s+1}[0,l]$, $\varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(l) = \varphi_0^{(i)}(0) = \varphi_0^{(i)}(l) = 0$, $i = 0, 2, \ldots, 4s$, $\psi(x) \in C^{4s-1}[0,l]$, $\psi^{(j)}(0) = \psi^{(j)}(l) = 0$, $j = 0, 2, \ldots, 4s-2$ *и* $g(t)$ *– непрерывная, возрастающая и неотрицательная функция и число* $d$ *является алгебраическим иррациональным числом степени* $s \geq 2$*. Тогда существует единственное решение задачи* $3.1$ *и оно определяется рядами* (65) *и* (66).

Теперь рассмотрим задачу 3.2. Удовлетворим функцию (54) граничному условию (52):

$$u(x_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x_0) = h(t), \ \ 0 \le t \le T. \tag{68}$$

Подставляя (58) и (59) в (68), получим интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^t g(s) K(t, s)\, ds = \widetilde{h}(t), \ \ 0 \le t \le T, \tag{69}$$

где

$$K(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\omega_n} \sin\left[\omega_n (t - s)\right] X_n(x_0), \tag{70}$$

$$\widetilde{h}(t) = h(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \varphi_n \cos \omega_n t - \frac{\psi_n}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) X_n(x_0).$$

Дифференцируя уравнение (69) по $t$, имеем

$$K(t, t) g(t) + \int_0^t g(s) \frac{\partial K(t, s)}{\partial t}\, ds = \widetilde{h}'(t). \tag{71}$$

Из (70) видим, что $K(t, t) \equiv 0$. Тогда еще раз дифференцируя уравнение (71) по $t$, получим

$$\left.\frac{\partial K(t, s)}{\partial t}\right|_{s=t} g(t) + \int_0^t g(s) \frac{\partial^2 K(t, s)}{\partial t^2}\, ds = \widetilde{h}''(t). \tag{72}$$

Теперь из (70) вычислим

$$\left.\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}\right|_{s=t} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x_0) = f(x_0).$$

Отсюда видно, что если $f(x_0) \neq 0$, то уравнение (72) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью при условии $g(t) \in C^2[0,T]$. Следовательно, интегральное уравнение (72) имеем единственное решение $g(t)$ в классе $C[0,T]$ и приходим к следующему утверждению.

**Теорема 3.4.** *Пусть функции $f(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы* 1, $g(t) \in C^2[0,T]$, $h(0) = \varphi(x_0)$, $h'(0) = \psi(x_0)$. *Тогда, если $f(x_0) \neq 0$, то задача* 3.2 *имеет единственное решение, которое определяется по формуле* (54), *в которой функция $g(t)$ находится из интегрального уравнения* (72).

Теперь выясним насколько существенно условие $f(x_0) \neq 0$ в теореме 3.4. Пусть для некоторых $n = m$ и $\widetilde{x}_0 = x_0/l \in (0,1)$: $\sin \mu_m x_0 = \sin \frac{\pi m x_0}{l} = \sin \pi m \widetilde{x}_0 = 0$. Очевидно, что такие точки $\widetilde{x}_0$ существуют. Тогда для функции $f(x) = \sin \mu_m x$ при любой функции $g(t) \in C[0,T]$ существует ненулевое решение задачи 3.2 (где $\varphi(x) = \psi(x) = 0$)

$$u(x,t) = \frac{\sin \mu_m x}{\omega_m} \int_0^t g(s) \sin\left[\omega_m (t-s)\right] ds.$$

**Замечание.** Возникает вопрос о том, что если $f(x_0) = 0$, то существует ли единственное решение задачи 3.2? Из доказательства теоремы 3.4 нетрудно заметить, что если $f(x_0) = 0$, то при $f^{(4)}(x_0) \neq 0$ задача 3.2 будет иметь единственное решение. Если же $f(x_0) = f^{(4)}(x_0) = 0$, то когда $f^{(8)}(x_0) \neq 0$ также получим положительный результат и т.д.

Аналогично изучаются задачи 3.3 и 3.4, т.е. задачи по отысканию начальных условий.

Поперечные колебания тонкой однородной прямоугольной пластины толщины $h$, при этом толщина ее полагается малой по сравнению с другими размерами, со сторонами $p$ и $q$ описывается дифференциальным уравнением в частных производных четвертого порядка [1, с. 394]

$$Lu \equiv u_{tt} + \alpha^2 \Delta^2 u = F(x, y, t), \tag{73}$$

где $\alpha^2 = EJ/(\rho h)$, $EJ$ — жесткость пластинки, $\rho$ — масса на единицу площади пластинки, $E$ — модуль упругости материала, $J$ — момент инерции, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $F(x, y, t)$ — непрерывная внешняя сила, рассчитанная на единицу площади пластинки, $u(x, y, t)$ — смещение точки $(x, y)$ пластинки в момент времени.
Отметим, что многие задачи о колебаниях мембран, пластинок имеют важное прикладное значение в строительной механике, которые изучены в известных работах [2, с. 444-449], [3, с. 132-133], [4, с. 35-69].
Рассмотрим уравнение (73) в области

$$Q = D \times (0, T), \text{ где } D = \{(x, y) \,|\, 0 < x < p, 0 < y < q\},$$

здесь $p$ и $q$ отмечены выше, размеры пластинки, $T$ — заданная положительная постоянная, и поставим следующие задачи.

**Задача 4.1**. *Найти определенную в области $Q$ функцию $u(x,y,t)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y,t) \in C^{4,2}_{xy,t}(\overline{Q}); \tag{74}$$

$$Lu(x,y,t) \equiv F(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q; \tag{75}$$

$$\begin{aligned} u(0,y,t) = u_{xx}(0,y,t) = u(p,y,t) = u_{xx}(p,y,t) = 0, \quad 0 \le y \le q, \quad 0 \le t \le T, \\ u(x,0,t) = u_{yy}(x,0,t) = u(x,q,t) = u_{yy}(x,q,t) = 0, \quad 0 \le x \le p, \quad 0 \le t \le T; \end{aligned} \tag{76}$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad u_t(x,y,0) = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{77}$$

*где $F(x,y,t)$, $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ — заданные достаточно гладкие функции.*

Здесь граничные условия (76) означают, что все стороны пластинки подперты, т.е. свободно могут двигаться вокруг точек закрепления.

**Задача 4.2.** *Пусть $F(x,y,t) = f(x,y)g(t)$. Найти функции $u(x,y,t)$ и $g(t)$, удовлетворяющие условиям* (74) – (77), *и, кроме того,*

$$g(t) \in C[0,T]; \tag{78}$$

$$u(x_0,y_0,t) = h(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{79}$$

*где $f(x,y), \varphi(x,y), \psi(x,y)$ и $h(t)$ — заданные достаточно гладкие функции, $(x_0,y_0)$ заданная точка из области $D$.*

**Задача 4.3.** *Пусть* $F(x,y,t) = f(x,y)g(t)$*. Найти пару функций* $u(x,y,t)$ *и* $f(x,y)$*, удовлетворяющих условиям* (74) – (77) *и кроме того,*

$$f(x,y) \in C(\overline{D}); \tag{80}$$

$$u(x,y,t_0) = \varphi_0(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{81}$$

*где* $g(t)$*,* $\varphi(x,y)$*,* $\psi(x,y)$ *и* $\varphi_0(x,y)$ *— заданные достаточно гладкие функции,* $t_0$ *— заданная точка из полуинтервала* $(0,T]$*.*

Из постановок этих задач видно, что задача 4.1 представляет собой прямую начально-граничную задачу для неоднородного уравнения колебаний прямоугольной пластинки. Задачи 4.2 и 4.3 являются обратными, поэтому здесь условия (79) и (81) являются дополнительными для определения сомножителей $g(t)$ и $f(x,y)$ правой части $F(x,y,t)$ уравнения (73).

Данная часть является продолжением исследований автора [13 – 17], посвященных обоснованию корректности постановки начально-граничных и обратных задач для одномерного уравнения балки. Постановка обратных задач 4.2 и 4.3 исходит из работ [*Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994. 208 с.; Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York; Basel: Marcel Dekker Inc, 1999. 709 p.; Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с. (изд. 2).*], где аналогичные задачи изучены для уравнений теплопроводности, струны и операторных уравнений. Решения поставленных задач построены в явном виде как суммы рядов и доказаны соответствующие теоремы единственности и существования решений. Отметим, что при обосновании сходимости рядов, представляющих решение задачи 4.3, возникает проблема малых знаменателей [23 – 26], которая создает дополнительные трудности. В связи с чем установлены оценки об отделенности от нуля с соответствующей асимптотикой.

**Теорема 4.1.** *Если существует решение начально-граничной задачи* (74) – (77), *то при любом* $t \in [0, T]$ *для решения справедливо неравенство*

$$\iint\limits_D \left[u_t^2 + \alpha^2(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)\right] dxdy \leq$$

$$\leq e^T \Big[\iint\limits_D \left[\psi^2 + \alpha^2(\varphi_{xx}^2 + 2\varphi_{xy}^2 + \varphi_{yy}^2)\right] dxdy + \iiint\limits_Q F^2(x, y, t)\, dxdydt\Big]. \qquad (82)$$

Отметим, что интеграл

$$E_0(t) = \frac{1}{2} \iint\limits_D \left[\rho h u_t^2 + EJ(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)\right] dxdy =$$

$$= \rho h \frac{1}{2} \iint\limits_D \left[u_t^2 + \alpha^2(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)\right] dxdy = \rho h E(t)$$

представляет собой закон сохранения энергии свободных колебаний однородной пластинки при нулевых граничных условиях (76).

Действительно, кинетическая энергия движущейся пластинки состоит из поступательного движения элемента $dxdy$ параллельно смещению $u(x,y,t)$ и определяется интегралом

$$K(t) = \frac{1}{2} \iint\limits_D \rho h u_t^2 \, dxdy,$$

где $\rho h$ есть масса на единицу поверхности пластинки.

Потенциальная энергия колебаний пластинки зависит от жесткости $EJ$ при изгибе и находится интегралом [3, с. 446]

$$\Pi(t) = \frac{1}{2} \iint\limits_D EJ(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2) \, dxdy.$$

Следовательно, интеграл $E_0(t) = K(t) + \Pi(t)$ представляет собой полную энергию свободных поперечных колебаний пластинки.

**Следствие 4.1.** Если в условиях теоремы 4.1 правая часть $F(x,y,t)$ уравнения (73) равна нулю, то при любом $t \in [0,T]$ справедливо равенство

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \iint\limits_D \left[\psi^2(x,y) + \alpha^2(\varphi_{xx}^2 + 2\varphi_{xy}^2 + \varphi_{yy}^2)\right] dxdy, \qquad (83)$$

т. е. равенство (83) означает, что полная энергия собственных колебаний однородной пластины остается в течении всего процесса колебаний постоянной и равной ее начальной энергии.

**Следствие 4.2.** (Теорема единственности) Если существует решение задачи (74) – (77), то она единственно.

Разделяя переменные $u(x,y,t) = v(x,y)f(t)$ в уравнении (73) при $F(x,y,t) \equiv 0$, относительно функции $v(x,y)$ получим следующую спектральную задачу:

$$\Delta(\Delta v) + \lambda^2 v = 0, \quad (x,y) \in D, \tag{84}$$

$$\begin{aligned} v(0,y) = u_{xx}(0,y) = v(p,y) = v_{xx}(p,y) = 0, \quad 0 \le y \le q, \\ v(x,0) = v_{yy}(x,0) = v(x,q) = v_{yy}(x,q) = 0, \quad 0 \le x \le p. \end{aligned} \tag{85}$$

В качестве решения спектральной задачи (84), (85) возьмем функции

$$v_{mn}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{pq}} \sin\frac{m\pi x}{p} \sin\frac{n\pi y}{q}, \tag{86}$$

которые соответствуют собственным значениям

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{m\pi}{p}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{q}\right)^2, \quad m,n \in \mathbb{N}. \tag{87}$$

Отметим, что система собственных функций (86) задачи (84), (85) является полной и ортонормированной в пространстве $L_2(D)$ и образует там базис.

Решение задачи (74) – (77) определяется в виде суммы ряда Фурье

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) v_{mn}(x,y), \tag{88}$$

где

$$u_{mn}(t) = \varphi_{mn} \cos \omega_{mn} t + \frac{\psi_{mn}}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn} t + \widetilde{F}_{mn}(t), \tag{89}$$

$$\widetilde{F}_{mn}(t) = \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t F_{mn}(s) \sin[\omega_{mn}(t-s)] ds, \quad \omega_{mn} = \alpha \lambda_{mn}. \tag{90}$$

Ряд (88) и его производные до второго порядка включительно при любых $(x,y,t) \in \overline{Q}$ мажорируются рядом

$$C_3 \sum_{m,n=1}^{\infty} \left( \lambda_{mn}^2 |\varphi_{mn}| + \lambda_{mn} |\psi_{mn}| + \lambda_{mn} \Big| F_{mn}(t_M) \Big| \right).$$

**Теорема 4.2.** *Если функции* $\varphi(x,y) \in C^6(\overline{D})$,
$\varphi(0,y) = \varphi_{xx}(0,y) = \varphi_{xxxx}(0,y) = \varphi(p,y) = \varphi_{xx}(p,y) = \varphi_{xxxx}(p,y) = 0$, $0 \le y \le q$,
$\varphi(x,0) = \varphi_{yy}(x,0) = \varphi_{yyyy}(x,0) = \varphi(x,q) = \varphi_{yy}(x,q) = \varphi_{yyyy}(x,q) = 0$, $0 \le x \le p$;
$\psi(x,y) \in C^4(\overline{D})$, $\psi(0,y) = \psi_{xx}(0,y) = \psi(p,y) = \psi_{xx}(p,y) = 0$, $0 \le y \le q$,
$\psi(x,0) = \psi_{yy}(x,0) = \psi(x,q) = \psi_{yy}(x,q) = 0$, $0 \le x \le p$, $F(x,y,t) \in C(\overline{Q}) \cap C^4_{xy}(\overline{D})$,
$F(0,y,t) = F_{xx}(0,y,t) = F(p,y,t) = F_{xx}(p,y,t) = 0$, $0 \le y \le q$, $0 \le t \le T$,
$F(x,0,t) = F_{yy}(x,0,t) = F(x,q,t) = F_{yy}(x,q,t) = 0$, $0 \le x \le p$, $0 \le t \le T$,, *то существует единственное решение задачи* (74) – (77), *которое определяется суммой ряда* (88).

**Теорема 4.3.** *Для решения* (88) *задачи* (74) – (77) *имеют место оценки:*

$$\|u(x,y,t)\|_{L_2(D)} \leq C_5\Big(\|\varphi(x,y)\|_{L_2(D)} + \|\psi(x,y)\|_{L_2(D)} + \|F(x,y,t_M)\|_{L_2(D)}\Big), \tag{91}$$

$$\|u(x,y,t)\|_{C(\overline{Q})} \leq C_6\Big(\|\varphi(x,y)\|_{C^2(\overline{D})} + \|\psi(x,y)\|_{C(\overline{D})} + \|F(x,y,t_M)\|_{C(\overline{D})}\Big). \tag{92}$$

Пусть $F(x,y,t) = f(x,y)g(t)$. При этом функции (89) и (90) принимают вид

$$F_{mn}(t) = f_{mn}g(t), \tag{93}$$

$$u_{mn}(t) = \varphi_{mn}\cos\omega_{mn}t + \frac{\psi_{mn}}{\omega_{mn}}\sin\omega_{mn}t + f_{mn}g_{mn}(t), \tag{94}$$

где

$$f_{mn} = \iint\limits_D f(x,y)v_{mn}(x,y)dxdy, \tag{95}$$

$$g_{mn}(t) = \frac{1}{\omega_{mn}}\int_0^t g(s)\sin[\omega_{mn}(t-s)]ds. \tag{96}$$

Далее удовлетворим функцию (88) граничному условию (79):

$$u(x_0,y_0,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t)v_{mn}(x_0,y_0) = h(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{97}$$

Заменив в (97) функцию $u_{mn}(t)$ ее выражением (94), получим интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^t g(s)K(t,s)ds = \widetilde{h}(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{98}$$

$$K(t,s) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{f_{mn}}{\omega_{mn}}\sin[\omega_{mn}(t-s)]v_{mn}(x_0,y_0), \quad 0 \le s \le t \le T, \tag{99}$$

$$\widetilde{h}(t) = h(t) - \sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\varphi_{mn}\cos\omega_{mn}t + \frac{\psi_{mn}}{\omega_{mn}}\sin\omega_{mn}t\right)v_{mn}(x_0,y_0). \tag{100}$$

В силу условий теоремы 4.1 функция $f(x,y)$ должна удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned} f(x,y)\in C^4(\overline{D}),\quad & f(0,y)=f_{xx}(0,y)=f(x,y)=f_{xx}(p,y)=0,\quad 0\le y\le q;\\ & f(x,0)=f_{yy}(x,0)=f(x,q)=f_{yy}(x,q)=0,\quad 0\le x\le p. \end{aligned} \tag{101}$$

В силу условий (101) ряд (99) и ряды из производных по $t$ первого и второго порядков сходятся равномерно на $0\le s\le t\le T$, поэтому функции $K(t,s), K_t(t,s)$ и $K_{tt}(t,s)$ непрерывны на указанном множестве.

Если функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ удовлетворяют условиям теоремы 4.1, то ряд в правой части равенства (100) равномерно сходится на $[0,T]$ и допускает там почленное дифференцирование по $t$ дважды. Следовательно, при условии $h(t)\in C^2[0,T]$ функция $\widetilde{h}(t)$ также принадлежит $C^2[0,T]$.

Теперь, продифференцировав интегральное уравнение (98) по $t$, получим

$$K(t,t)g(t) + \int_0^t g(s)\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}ds = \widetilde{h}'(t). \tag{102}$$

Из равенства (99) следует, что $K(t,t) \equiv 0$. Тогда дифференцируя уравнение (102) еще раз по $t$, будем иметь

$$\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}\Big|_{s=t} g(t) + \int_0^t g(s)\frac{\partial K^2(t,s)}{\partial t^2}ds = \widetilde{h}''(t). \tag{103}$$

На основании соотношения (99) вычислим

$$\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}\Big|_{s=t} = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn}v_{mn}(x_0,y_0) = f(x_0,y_0). \tag{104}$$

Отсюда видно, что если $f(x_0,y_0) \neq 0$, то уравнение (103) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью. Следовательно, интегральное уравнение (103), стало быть, и интегральное уравнение (98), имеет единственное решение $g(t)$ в классе $C[0,T]$. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

**Теорема 4.4**. *Пусть функции $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям* (101), $h(t) \in C^2[0, T]$, $h(0) = \varphi(x_0, y_0)$, $h(0) = \psi(x_0, y_0)$. *Тогда, если $f(x_0, y_0) \neq 0$, то задача* (74) – (79) *имеет единственное решение. Это решение определяется по формуле* (88), *в которой функция $g(t)$ находится из интегрального уравнения* (103).

Теперь выясним насколько существенно условие $f(x_0, y_0) \neq 0$ в теореме 4.4. Пусть при некоторых $m = m_0$, $\widetilde{x}_0 = x_0/p \in (0, 1)$ или $n = n_0$, $\widetilde{y}_0 = y_0/q \in (0, 1)$ выполняется равенство

$$\sin \frac{m_0 \pi x_0}{p} = \sin m_0 \pi \widetilde{x}_0 = 0 \quad \text{или} \quad \sin \frac{n_0 \pi y_0}{q} = \sin n_0 \pi \widetilde{y}_0 = 0.$$

Ясно, что такие $\widetilde{x}_0$ и $\widetilde{y}_0$ существуют. Пусть выполнено первое из этих равенств. Тогда для функции $f(x, y) = \sin \frac{m_0 \pi x}{p} \sin \frac{n \pi y}{q}$ при любой функции $g(t) \in C[0, T]$ существует ненулевое решение задачи 4.2 (где $\varphi(x, y) = \psi(x, y) \equiv 0$)

$$u_{m_0 n}(x, y, t) = \sin \frac{m_0 \pi x}{p} \sin \frac{n \pi y}{q} \frac{1}{\omega_{m_0 n}} \int_0^t g(s) \sin[\omega_{m_0 n}(t - s)] ds.$$

Удовлетворим решение (88) задачи 4.1 граничному условию (81). Тогда получаем уравнение

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t_0)v_{mn}(x,y) = \varphi_0(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \varphi_{0mn}v_{mn}(x,y), \tag{105}$$

здесь

$$\varphi_{0mn} = \iint\limits_{D} \varphi_0(x,y)v_{mn}(x,y), \tag{106}$$

а $u_{mn}(t_0)$ определяется равенством (94), где коэффициенты $f_{mn}$ пока неизвестны и подлежат нахождению. Из уравнения (105) найдем

$$f_{mn} = \frac{1}{g_{mn}(t_0)}(\varphi_{0mn} - \varphi_{mn}\cos\omega_{mn}t - \frac{\psi_{mn}}{\omega_{mn}}\sin\omega_{mn}t), \tag{107}$$

при условии, что при всех $m,n \in \mathbb{N}$

$$g_{mn}(t_0) \neq 0. \tag{108}$$

Подставляя (107) в равенство (94), построим в явном виде функции

$$u_{mn}(t) = \varphi_{mn}\cos\omega_{mn}t + \frac{\psi_{mn}}{\omega_{mn}}\sin\omega_{mn}t +$$

$$+\frac{g_{mn}(t)}{g_{mn}(t_0)}(\varphi_{0mn} - \varphi_{mn}\cos\omega_{mn}t_0 - \frac{\psi_{mn}}{\omega_{mn}}\sin\omega_{mn}t_0). \tag{109}$$

Тогда решение задачи 4.3 определится как сумма рядов

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) v_{mn}(x, y), \tag{110}$$

$$f(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn} v_{mn}(x, y), \tag{111}$$

где коэффициенты $u_{mn}(t)$ и $f_{mn}$ находятся соответственно формулами (109) и (107).

**Теорема 4.5.** *Если существует решение задачи* $4.3$*, то оно единственно тогда и только тогда, когда при всех* $n \in \mathbb{N}$ *выполнены условия* (108)*.*

Поскольку выражение $g_{mn}(t_0)$ может иметь счетное множество нулей, то возникает проблема малых знаменателей [23 – 26] и поэтому необходимо установить оценки об отделенности от нуля с соответствующей асимптотикой.

Выражение $\sin(\omega_{mn}t_0/2)$ представим в следующем виде:

$$\sin\frac{\omega_{mn}t_0}{2} = \sin\pi N^2\nu_{mn}, \tag{112}$$

где

$$\nu_{mn} = d\left[\left(\frac{qm}{N}\right)^2 + \left(\frac{pn}{N}\right)^2\right], \quad d = \frac{\alpha t_0\pi}{2(pq)^2}.$$

Поскольку $\nu_{mn}$ — зависит от $n$ и $m$, то в зависимости от данных задачи $\alpha$, $p$, $q$ и $t_0$ выражение $\nu_{mn}$ может принимать только рациональные или иррациональные значения. Если $\nu_{mn}$ принимает только рациональные значения, то выражение (112) будет иметь счетное множество нулей. Поэтому остается рассмотреть случай, когда $\nu_{mn}$ принимает иррациональные значения. Также заметим, что множество значений $\nu_{mn}$ ограничено

$$d\,l_m^2 < \nu_{mn} \le d\,(p^2+q^2), \quad l_m = \min\{p,q\}.$$

Предварительно из теории чисел приведем утверждение, которое является аналогом теоремы Рота [28].

**Утверждение.** *Для любого алгебраического числа $\beta$ степени $s \ge 2$ и произвольного положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется положительное число $C_1 > 0$, такое, что при любых целых $p$ и $q$ $(q > 0)$ справедливо неравенство*

$$\left|\beta - \frac{p}{q^2}\right| > \frac{C_1}{q^{4+\varepsilon}}. \tag{113}$$

**Лемма 4.3.** *Если $\nu_{mn}$ является иррациональным алгебраическим числом степени $s \geq 2$, то при любом $\varepsilon > 0$ существует постоянная $C_2 > 0$, такая, что при всех $N \in \mathbb{N}$ имеет место оценка*

$$\left|\sin \pi N^2 \nu_{mn}\right| > \frac{C_2}{N^{2+\varepsilon}}, \tag{114}$$

*где $C_2$ — зависит от $m$ и $n$.*

**Лемма 4.4.** *Пусть функции $g(t)$ возрастающая и положительная на сегменте $[0, T]$ и $\nu_{mn}$ является алгебраическим иррациональным числом степени $s \geq 2$. Тогда при любом $N \in \mathbb{N}$ справедливы оценки*

$$|g_{mn}(t)| \leq \frac{2\|g\|_C}{\omega_{mn}^2} = \frac{C_3}{\lambda_{mn}^2} \leq \frac{C_4}{N^2}, \tag{115}$$

$$|g_{mn}(t_0)| \geq \frac{C_5}{N^{8+2\varepsilon}}, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{4}, \tag{116}$$

*где $\|g\|_C = \sup\limits_{0 \leq t \leq T} |g(t)|$, $C_i$ – здесь и далее положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от $\alpha$, $p$, $q$, $t_0$ и $g(t)$.*

**Теорема 4.6.** *Пусть функции* $\varphi(x,y)$, $\varphi_0(x,y) \in C^{10+\delta}(\overline{D})$, $2\varepsilon < \delta < 1$,
$\varphi_x^{(i)}(0,y) = \varphi_x^{(i)}(p,y) = \varphi_{0x}^{(i)}(0,y) = \varphi_{0x}^{(i)}(p,y) = 0$, $0 \le y \le q$,
$\varphi_y^{(i)}(x,0) = \varphi_y^{(i)}(x,q) = \varphi_{0y}^{(i)}(x,0) = \varphi_{0y}^{(i)}(x,q) = 0$, $0 \le x \le p$, $i = 0,2,4,6,8$;
$\psi(x,y) \in C^{8+\delta}(\overline{D})$, $\psi_x^{(j)}(0,y) = \psi_x^{(j)}(p,y) = 0$, $0 \le y \le q$, $\psi_y^{(j)}(x,0) = \varphi_y^{(j)}(x,q) = 0$,
$0 \le x \le p$, $j = 0,2,4,6$, *и непрерывная функция* $g(t)$ *и числа* $\nu_{mn}$ *удовлетворяют условиям леммы* $4.2$. *Тогда существует единственное решение задачи* $4.3$ *и оно определяется рядами* (110) *и* (111).

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с. (изд. 3).

2. Рэлей Л. Теория звука. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955. 503 с. (изд. 2).

3. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматлит, 1967. 444 с.

4. Крылов А.Н. Вибрация судов. М., 2012. 447 с. (изд. 2)

5. Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях: Введение в метод промежуточных задач Вайнштейна. М.: Мир, 1970. 328 с.

6. Коренев Б.Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. М.: Стройиздат, 1965. 232 с.

7. Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями. М.: Наука, 1968. 503 с.

8. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.

9. Андрианов И.В., Данишевский В.В., Иванков А.О. Асимптотические методы в теории колебаний балок и пластин. Днепропетровск: Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, 2010. 216 с.

10. Аманов Д., Жураев Н., Эшматов Б.Э. Краевая задача для уравнения балки // Тезисы докладов международной научной конференции "Неклассические уравнения математической физики и их приложения 23 - 25 октября 2014 г., Ташкент. С. 39.

11. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 800 с.

12. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2013. 352 с.

13. Сабитов К.Б. Начально-граничная задача для уравнения колебаний балки // В сборнике: Математические методы и модели в строительстве, архитектуре и дизайне. Самарский государственный архитектурно-строительный университет. Самара, 2015. С. 34–42.

14. Сабитов К.Б. Колебания балки с заделанными концами // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2015. Т. 19. № 2 (39). С. 311–324.

15. Сабитов К.Б. К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // Дифференц. уравнения. 2017. Т.53. №1. С. 89–100.

16. Сабитов К.Б. Начальная задача для уравнения колебаний балки // Дифференц. уравнения. 2017. Т.53. №5. С. 665–671.

17. Сабитов К.Б. Обратные задачи для уравнения колебаний балки по определению правой части и начальных условий // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 773–785.

18. Орловский Д.Г. Об одной обратной задаче для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1989 Т. 25. № 6. С. 1000–1009.

19. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994. 208 с.

20. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York; Basel: Marcel Dekker Inc, 1999. 709 p.

21. Соловьев В.В. Обратные задачи определения источника и коэффициента в эллиптическом уравнении в прямоугольнике // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47. № 8. С. 1365–1377.

22. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с. (изд. 2).

23. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН. 1963. Т. XVIII. Вып. 6 (114). С. 91–192.

24. Бутковский А.Г. Приложение некоторых результатов теории чисел к проблеме финитного управления и управляемости в распределенных системах // ДАН. 1976. 227:2. С. 309–311.

25. Ломов И.С. Малые знаменатели в аналитической теории вырождающихся дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2079–2089.

26. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков // Матем. заметки. 2015. Т. 97. Вып. 2. С. 262–276.

27. Хинчин А.Я. Цепные дроби. М.: Наука, 1978. 112 с.

28. Шидловский А.Б. Диофантовы приближения и трансцендентные числа. М.: Изд. МГУ, 1982. 264 с.

29. Сабитов К.Б., Акимов А.А. Начально-граничная задача для нелинейного уравнения колебаний балки // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 5. С. 632–645.

30. Сабитов К.Б. Начально-граничные задачи для уравнения колебаний балки с учетом ее вращательного движения при изгибе // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 3. С. 364–374.

31. Сабитов К.Б., Фадеева О.В. Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25. № 1. С. 51–66.

32. Сабитов К.Б. Начально-граничные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластины // Известия вузов. Математика. 2021 (в печати).

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ