

УДК 532.546

## ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРИТОКА ЖИДКОСТИ К НЕСОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЕ

*П.Е. Морозов*

*Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, г. Казань, 420111, Россия*

### Аннотация

В работе получено решение задачи нестационарного притока жидкости к несовершенной вертикальной скважине, работающей с постоянным дебитом в анизотропном пласте с непроницаемыми кровлей и подошвой. Задача сводится к системе интегральных уравнений в пространстве изображений по Лапласу, связывающей перепад давления и распределение притока жидкости в интервале вскрытия. Учтено произвольное число и положение интервалов вскрытия относительно кровли и подошвы пласта, а также влияние объема ствола скважины и неравномерного скин-фактора. На основе метода суперпозиции получено решение задачи притока жидкости к несовершенной скважине после ее остановки. Установлено, что в процессе восстановления давления в закрытой на забое несовершенной скважине через интервалы вскрытия происходит переток жидкости.

**Ключевые слова:** полуаналитическое решение, нестационарный приток, несовершенная скважина, анизотропный пласт, неравномерный скин-фактор, влияние объема ствола, эффект «перетока» жидкости

### Введение

При разработке и эксплуатации нефтегазовых месторождений, подземных хранилищ газа, водоносных пластов нередко встречаются скважины с двойным видом несовершенства – как по степени, так и характеру вскрытия пласта. В призабойной зоне гидродинамически несовершенной скважины возникают дополнительные фильтрационные сопротивления, которые оказывают существенное влияние на продуктивность и динамику изменения забойного давления. В связи с этим изучение особенностей притока жидкости к гидродинамически несовершенным скважинам имеет большое практическое значение.

Впервые аналитическое решение задачи нестационарного притока жидкости и газа к несовершенной скважине с рабочей частью, примыкающей к кровле пласта, было получено в работе А.Л. Хейна [1] на основе замены ствола скважины линейным стоком постоянной интенсивности. В дальнейшем такой подход представления несовершенной скважины применялся в работах многих других авторов [2–13]. Модель несовершенной скважины с равномерным распределением притока жидкости в интервале вскрытия пласта приводит к неравномерному распределению давления в этом интервале. Более физически обоснованной считается модель бесконечно-проводимой скважины с условием постоянства давления в интервале вскрытия. Часто используется приближенный прием, который заключается в том, что в моделях с равномерным распределением притока жидкости по стволу скважины в качестве забойного берется средневзвешенное давление в интервале вскрытия [3–5, 7, 12, 13] или давление в некоторой фиксированной точке в

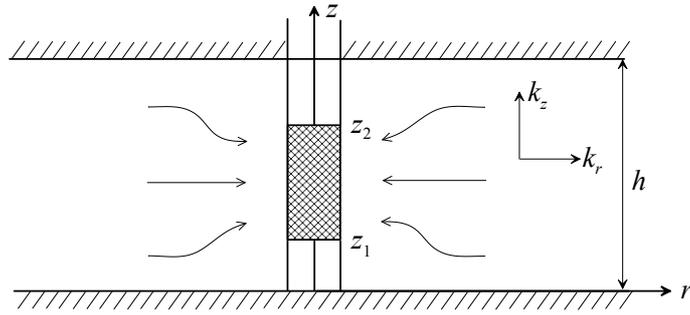


Рис. 1. Схема пласта, частично вскрытого вертикальной скважиной

стволе скважины [1, 6, 11]. Для более точного учета условия постоянного давления в интервале вскрытия используется нелокальное граничное условие [14–18]. В этом случае задача сводится к совместному определению забойного давления и плотности притока жидкости в интервале вскрытия пласта. На основе данного подхода в работе [14] получено аналитическое решение задачи нестационарного притока воды к несовершенной скважине в анизотропном напорном пласте с учетом скин-эффекта при заданном постоянном напоре в скважине. Обобщенная аналитическая модель нестационарного притока к несовершенной скважине в напорном и безнапорном пласте с перетеканием с учетом скин-эффекта конечной толщины представлена в [15, 16]. В работе [19] на основе численного решения задачи методом конечных разностей изучалось совместное влияние частичного вскрытия пласта, анизотропии проницаемости, объема ствола скважины и скин-эффекта на кривые изменения давления в несовершенной скважине. В [20–22] получено аналитическое решение задачи нестационарного притока жидкости к вертикальной скважине в анизотропном пласте с несколькими интервалами вскрытия. В работе [23] разработана аналитическая модель нестационарного притока жидкости к вертикальной скважине с неравномерно распределенным скин-фактором по длине ствола.

В настоящей работе получено обобщенное полуаналитическое решение задачи нестационарного притока жидкости к несовершенной вертикальной скважине в анизотропном пласте с учетом влияния объема ствола скважины и неравномерного распределения скин-фактора по длине интервала вскрытия. На основе предположения о равномерности притока жидкости в интервале вскрытия дано приближенное аналитическое решение задачи.

### 1. Постановка задачи

Процесс нестационарного притока жидкости к несовершенной вертикальной скважине в бесконечном по простиранию анизотропном пласте (рис. 1) описывается уравнением пьезопроводности [19]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{k_r}{\mu} r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{k_z}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \beta^* \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1)$$

с начальным

$$p(r, z, 0) = p_k \quad (2)$$

и граничными условиями

$$p(\infty, z, t) = p_k, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=h} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{2\pi k_r}{\mu} \int_{z_1}^{z_2} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_c} dz = Q + C \frac{\partial p_c(t)}{\partial t}, \quad (5)$$

$$p_c(t) = p(r_c, z, t) - S(z) \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_c}, \quad z_1 \leq z \leq z_2, \quad (6)$$

Здесь  $p$  – давление,  $k_r$ ,  $k_z$  – горизонтальная и вертикальная проницаемость пласта соответственно,  $\mu$  – вязкость,  $\beta^*$  – упругоёмкость,  $p_k$  – пластовое давление,  $p_c$  – давление на забое скважины,  $r_c$  – радиус скважины,  $Q$  – дебит,  $C$  – коэффициент влияния объема ствола скважины,  $S(z)$  – скин-фактор.

Запишем систему уравнений (1)–(6) в безразмерном виде

$$\frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left( r_d \frac{\partial p_d}{\partial r_d} \right) + \frac{1}{h_d^2} \frac{\partial^2 p_d}{\partial z_d^2} = \frac{\partial p_d}{\partial t_d}, \quad (7)$$

$$p_d(r_d, z_d, 0) = 0, \quad (8)$$

$$p_d(\infty, z_d, t_d) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial p_d}{\partial z_d} \Big|_{z_d=0} = 0, \quad \frac{\partial p_d}{\partial z_d} \Big|_{z_d=1} = 0, \quad (10)$$

$$\int_{z_{1d}}^{z_{2d}} q(\zeta) d\zeta = 1 - C_d \frac{\partial p_{cd}(t_d)}{\partial t_d}, \quad (11)$$

$$p_{cd}(t_d) = p_d(1, z_d, t_d) + S(z_d) q(z_d), \quad z_{1d} \leq z_d \leq z_{2d}, \quad (12)$$

где

$$p_d = \frac{2\pi k_r h (p_k - p)}{Q\mu}, \quad t_d = \frac{k_r t}{\mu\beta^* r_c^2}, \quad r_d = \frac{r}{r_c}, \quad z_d = \frac{z}{h},$$

$$q(z_d) = - \left( r_d \frac{\partial p_d}{\partial r_d} \right) \Big|_{r_d=1}, \quad h_d = \frac{h}{r_c} \sqrt{\frac{k_r}{k_z}}, \quad C_d = \frac{C}{2\pi h \beta^* r_c^2}.$$

Таким образом, задача состоит в нахождении забойного давления  $p_c$  и притока жидкости в интервале вскрытия  $q(z)$  при известных параметрах пласта и скважины.

## 2. Полуаналитическое решение задачи

Применяя к (7)–(12) преобразование Лапласа по времени и конечное косинус-преобразование Фурье по координате  $z_d$  для безразмерного давления в пласте, получим выражение

$$\bar{p}_d(r_d, z_d, u) = F(r_d, u) \int_{z_{1d}}^{z_{2d}} \bar{q}_d(\zeta) d\zeta +$$

$$+ 2 \sum_{m=1}^{\infty} F(r_d, \lambda_m) \cos(\pi m z_d) \int_{z_{1d}}^{z_{2d}} \bar{q}_d(\zeta) \cos(\pi m \zeta) d\zeta, \quad (13)$$

где  $u$  – переменная преобразования Лапласа,  $\lambda_m = u + \left( \frac{\pi m}{h_d} \right)^2$ ,  $F(\alpha, \beta) = \frac{K_0(\alpha\sqrt{\beta})}{\sqrt{\beta} K_1(\sqrt{\beta})}$ ,  $K_0(x)$ ,  $K_1(x)$  – модифицированные функции Бесселя второго рода

0-го и 1-го порядка соответственно. Радиальная и вертикальная компоненты скорости фильтрации в изображениях по Лапласу равны соответственно  $w_r = \frac{Q}{2\pi r_c h} \frac{d\bar{p}_d}{dr_d}$

и  $w_z = \frac{Qk_z}{2\pi h^2 k_r} \frac{d\bar{p}_d}{dz_d}$ .

Если несовершенная скважина находится в центре пласта с круговым контуром питания, то вместо (9) используется граничное условие  $p_d(r_{ed}, z_d, t_d) = 0$ . Тогда в (13) необходимо положить

$$F(\alpha, \beta) = \frac{I_0(r_{ed}\sqrt{\beta})K_0(\alpha\sqrt{\beta}) - K_0(r_{ed}\sqrt{\beta})I_0(\alpha\sqrt{\beta})}{\sqrt{\beta} [I_0(r_{ed}\sqrt{\beta})K_1(\sqrt{\beta}) + K_0(r_{ed}\sqrt{\beta})I_1(\sqrt{\beta})]},$$

где  $r_{ed} = r_e/r_c$  – безразмерный радиус пласта, а  $I_0(x)$  и  $I_1(x)$  – модифицированные функции Бесселя первого рода 0-го и 1-го порядка. Для замкнутого кругового пласта граничное условие принимает вид  $\frac{\partial p_d}{\partial r_d}(r_{ed}, z_d, t_d) = 0$  и в этом случае в (13) следует положить

$$F(\alpha, \beta) = \frac{I_1(r_{ed}\sqrt{\beta})K_0(\alpha\sqrt{\beta}) + K_1(r_{ed}\sqrt{\beta})I_0(\alpha\sqrt{\beta})}{\sqrt{\beta} [I_1(r_{ed}\sqrt{\beta})K_1(\sqrt{\beta}) - K_1(r_{ed}\sqrt{\beta})I_1(\sqrt{\beta})]}.$$

Плотность притока жидкости и безразмерное давление на забое скважины определяются из решения системы интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \bar{p}_{cd}(u) = F(1, u) \int_{z_{1d}}^{z_{2d}} \bar{q}_d(\zeta) d\zeta + S(z_d) \bar{q}_d(z_d) + \\ + 2 \sum_{m=1}^{\infty} F(1, \lambda_m) \cos(\pi m z_d) \int_{z_{1d}}^{z_{2d}} \bar{q}_d(\zeta) \cos(\pi m \zeta) d\zeta, \quad (14) \\ \int_{z_{1d}}^{z_{2d}} \bar{q}_d(\zeta) d\zeta = \frac{1}{u} - C_d u \bar{p}_{cd}. \quad (15) \end{aligned}$$

Используя метод зеркального отображения [24], найдем изменение давления в несовершенной скважине в пласте с прямолинейной непроницаемой границей или прямолинейным контуром питания на расстоянии  $r_e$  от скважины. Такой тип границ пласта моделирует линейный сброс или разлом. Для несовершенной скважины в полубесконечном пласте в (14) необходимо положить

$$F(\alpha, \beta) = \frac{K_0(\alpha\sqrt{\beta}) \pm K_0(r_{ed}\sqrt{\beta})}{\sqrt{\beta} K_1(\sqrt{\beta})},$$

где знак “+” берется в случае прямолинейной непроницаемой границы, а знак “-” – в случае прямолинейного контура питания.

Система интегральных уравнений (14), (15) решается численно. Для этого интервал вскрытия разбивается на  $M$  сегментов и полагается, что приток жидкости к каждому сегменту является равномерным. В результате для определения изображений по Лапласу притока жидкости к интервалу вскрытия и изменения давления на забое скважины получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \bar{p}_{cd}(u) = F(1, u) \sum_{i=1}^M \bar{q}_i \Delta \zeta_i + S_j \bar{q}_j + \\ + 2 \sum_{i=1}^M \bar{q}_i \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F(1, \lambda_m)}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi \Delta \zeta_i}{2}\right) \cos(m\pi \bar{\zeta}_i) \cos(m\pi \bar{\zeta}_j) \right], \quad j = 1, \dots, M, \quad (16) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^M \bar{q}_i \Delta \zeta_i = \frac{1}{u} - C_d u \bar{p}_{cd}(u), \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \zeta_i &= \zeta_i - \zeta_{i-1}, \quad i = 1, \dots, M; \\ \bar{\zeta}_i &= (\zeta_i + \zeta_{i-1})/2, \quad i = 1, \dots, M; \quad z_{1d} = \zeta_0 < \zeta_1 < \dots < \zeta_M = z_{2d}. \end{aligned}$$

Запишем систему уравнений (16)–(17) в векторно-матричном виде

$$\begin{bmatrix} A_{11} + S_1 & \dots & A_{1M} & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{M1} & \dots & A_{MM} + S_M & -1 \\ \Delta \zeta_1 & \dots & \Delta \zeta_M & C_d u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \vdots \\ \bar{q}_M \\ \bar{p}_{cd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/u \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где

$$A_{ij} = F(1, u) \Delta \zeta_i + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F(1, \lambda_m)}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi \Delta \zeta_i}{2}\right) \cos(m\pi \bar{\zeta}_i) \cos(m\pi \bar{\zeta}_j).$$

Обратное преобразование Лапласа осуществляется численно на основе алгоритма Стефеста, что требует многократного решения системы линейных алгебраических уравнений (18) с плотной матрицей. Для её решения используется стабилизированный метод бисопряженных градиентов BiCGStab с предобуславливанием [25].

### 3. Приближенное аналитическое решение

Допустим, что распределение притока жидкости в интервале вскрытия является равномерным. Тогда, интегрируя уравнение (14) по  $z_d$  с учетом (15), найдем средневзвешенное давление в интервале вскрытия:

$$\bar{p}_{av}(u) = \frac{1}{z_{2d} - z_{1d}} \int_{z_{1d}}^{z_{2d}} \bar{p}_{cd}(u) dz_d = \frac{u \bar{p}_d(u) + S}{u + C_d u^2 [u \bar{p}_d(u) + S]}, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{p}_d(u) &= \frac{F(1, u)}{u} + \frac{2}{u(z_{2d} - z_{1d})^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F(1, \lambda_m)}{m^2 \pi^2} [\sin(m\pi z_{2d}) - \sin(m\pi z_{1d})]^2, \\ S &= \frac{1}{(z_{2d} - z_{1d})^2} \int_{z_{1d}}^{z_{2d}} S(z_d) dz_d. \end{aligned}$$

Следует отметить, что в случае бесконечного по простиранию пласта полученное решение (19) с точностью до обозначений совпадает с решением задачи из [12]. Если в (19) положить  $z_{1d} = 0$  и  $z_{2d} = 1$ , то получим известные решения из [26, 27]

$$\bar{p}_{cd}(u) = \frac{F(1, u) + S}{u + C_d u^2 [F(1, u) + S]}. \quad (20)$$

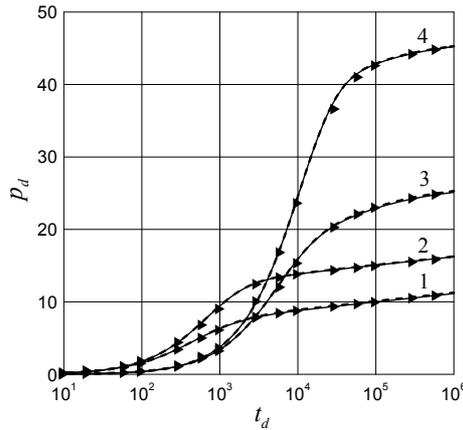


Рис. 2. Сравнение полуаналитического и приближенного аналитического решений задачи с численным решением из работы [19]: 1 -  $h_d = 100, S = 0, C_d = 50, z_{2d} - z_{1d} = 0.5$ ; 2 -  $h_d = 100, S = 2.5, C_d = 50, z_{2d} - z_{1d} = 0.5$ ; 3 -  $h_d = 500, S = 0, C_d = 250, z_{2d} - z_{1d} = 0.25$ ; 4 -  $h_d = 500, S = 5, C_d = 250, z_{2d} - z_{1d} = 0.25$

#### 4. Верификация решения и результаты расчетов

На рис. 2 представлены результаты расчетов безразмерного давления в несовершенной скважине, полученные на основе полуаналитического решения (16), (17) (сплошные линии), приближенного аналитического решения (19) (пунктирные линии), а также численное решение задачи (символы) из [19]. Расчеты проводились для несовершенной скважины с рабочей частью, примыкающей к кровле пласта, при различных значениях безразмерных величин влияния ствола скважины, толщины пласта, интервала вскрытия пласта. Предполагалось, что скин-фактор распределен равномерно по интервалу вскрытия.

Из рис. 2 видно, что кривые изменения давления в несовершенной скважине, полученные разными методами, достаточно хорошо согласуются между собой.

На рис. 3 приведены поля давления в окрестности несовершенной скважины, рассчитанные на основе предложенной аналитической модели при равномерном ( $S(z) = 5, z_1 \leq z \leq z_2$ ) и линейном ( $S(z) = 10(z - z_1) / (z_2 - z_1), z_1 \leq z \leq z_2$ ) распределениях скин-фактора по длине интервала вскрытия на момент времени  $t = 100$  ч. Расчеты проводились при следующих параметрах:  $p_k = 10$  МПа,  $k_r = 0.01$  мкм<sup>2</sup>,  $k_z = 0.001$  мкм<sup>2</sup>,  $\mu = 1$  мПа·с,  $\beta^* = 2 \cdot 10^{-4}$  МПа<sup>-1</sup>,  $Q = 10$  м<sup>3</sup>/сут,  $C = 1 \cdot 10^{-2}$  м<sup>3</sup>/МПа,  $r_c = 0.1$  м,  $h = 10$  м,  $z_1 = 4$  м,  $z_2 = 8$  м. Распределение притока жидкости по длине интервала вскрытия на момент времени  $t = 100$  ч приводится на рис. 4, а. Пунктирной линией показан график распределения притока жидкости при нулевом скин-факторе. Расчеты показали, что при равномерном распределении скин-фактора приток жидкости максимален на концах интервала вскрытия, причем с увеличением скин-фактора профиль притока выполаживается. Расстояние от скважины, на котором нарушается радиальность течения жидкости, зависит от распределения скин-фактора по длине интервала вскрытия и анизотропии.

Далее рассматривается задача определения притока жидкости к несовершенной скважине после ее остановки. Следуя методу суперпозиции, допустим, что начиная с момента времени  $T$  совместно с продолжающей работать скважиной запущена в работу мнимая скважина с дебитом  $-Q$ . В результате суммарный отбор жидкости из пласта будет равен нулю. На рис. 4, б показаны графики распределения

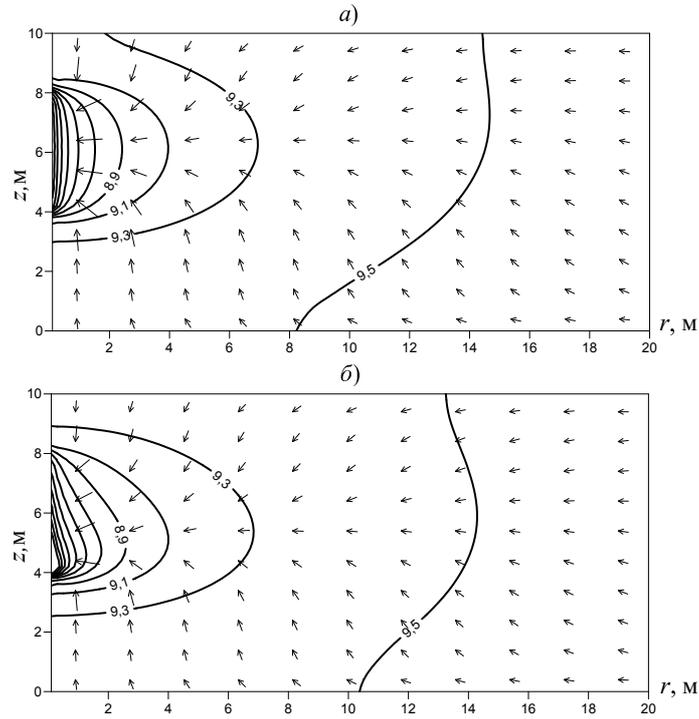


Рис. 3. Поле давления в окрестности несовершенной скважины при равномерном (а) и линейном (б) распределениях скин-фактора по длине интервала вскрытия

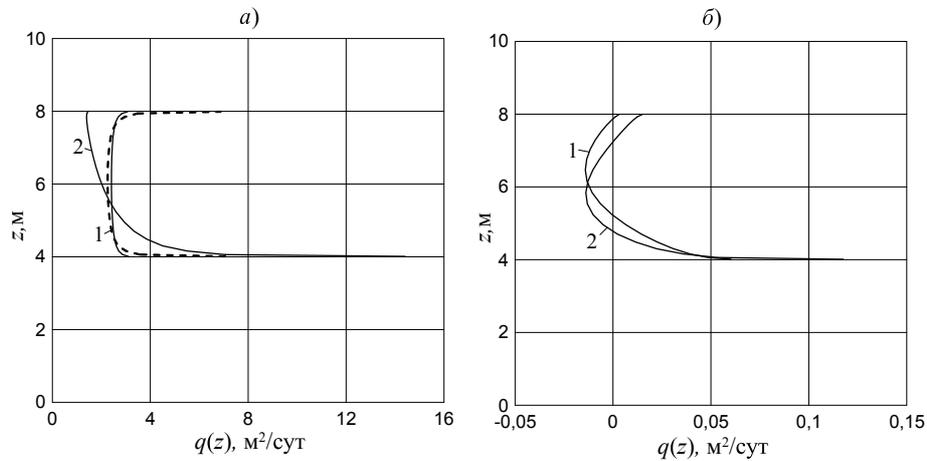


Рис. 4. Распределение притока жидкости по длине интервала вскрытия после пуска (а) и остановки (б) скважины (1 – при равномерном распределении скин-фактора, 2 – при линейном распределении скин-фактора)

притока жидкости по длине интервала вскрытия пласта в момент времени  $t = 0.1$  ч после остановки скважины. Расчеты проводились при условии закрытия скважины на ее забое, то есть полагалось, что  $C = 0$ . Кривая 1 соответствует постоянному распределению скин-фактора, а кривая 2 – линейному распределению скин-фактора. Видно, что через интервал вскрытия пласта происходит переток

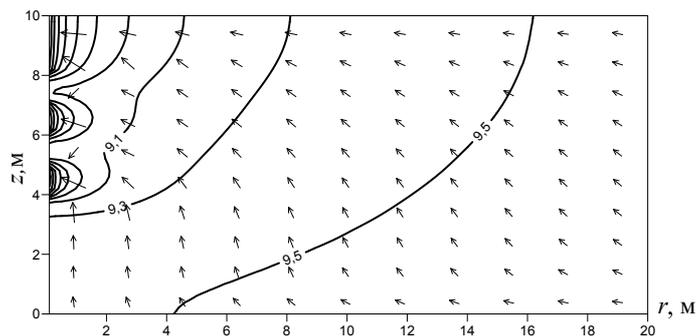


Рис. 5. Поле давления в окрестности несовершенной скважины с тремя интервалами вскрытия

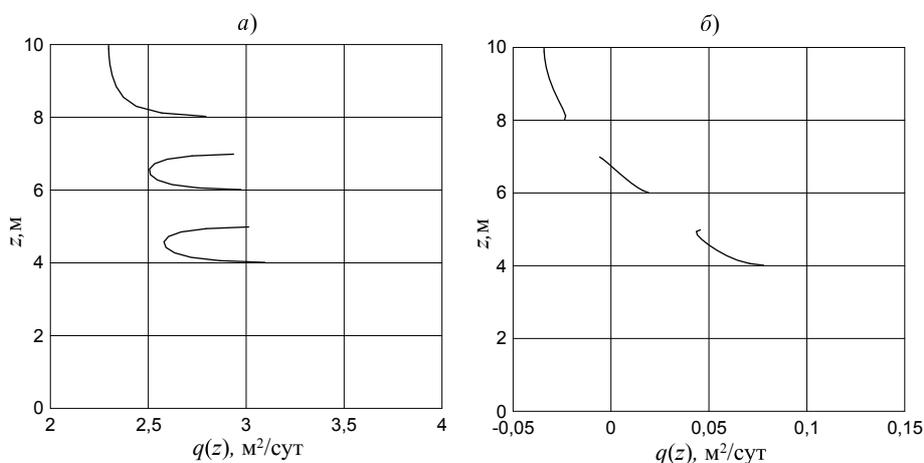


Рис. 6. Распределение притока жидкости по длине интервалов вскрытия после пуска (а) и остановки (б) несовершенной скважины

жидкости. Эффект «перетока» объясняется тем, что ствол несовершенной скважины представляет собой высокопроводящий канал в пористой среде и участвует в процессе перераспределения давления в пласте после остановки скважины.

Полученное решение задачи можно обобщить на тот случай, если несовершенная скважина имеет более чем один интервал вскрытия. Для этого достаточно в выражениях (11), (13)–(15) заменить интегралы суммой интегралов, взятых по соответствующим интервалам вскрытия пласта. На рис. 5 приводится поле давления в окрестности несовершенной скважины с тремя интервалами вскрытия. На рис. 6, а показан график распределения притока жидкости в интервалах вскрытия на момент времени  $t = 100$  ч после пуска скважины, а на рис. 6, б – на момент времени  $t = 0.1$  ч после ее остановки.

Рассмотрим вертикальную скважину, вскрывающую пласт на всю толщину, с линейным распределением скин-фактора по стволу  $S(z_d) = 10z_d$ ,  $0 \leq z_d \leq 1$ . На рис. 7, а представлено поле давления в окрестности ствола скважины в случае изотропного пласта, а на рис. 7, б – в случае анизотропного пласта с параметром анизотропии  $k_z/k_r = 0.1$ . Видно, что неравномерное распределение скин-фактора по стволу скважины и анизотропия проницаемости пласта приводят к нарушению радиальности течения в окрестности скважины.

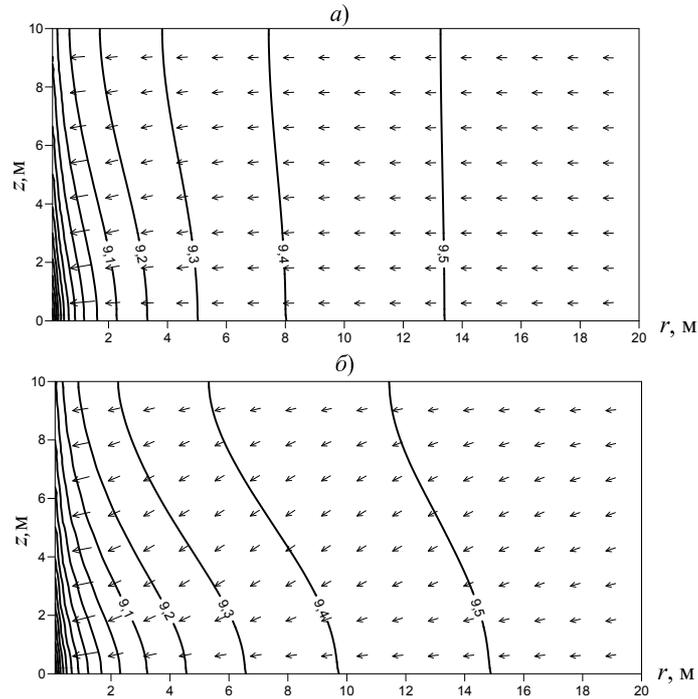


Рис. 7. Поле давления в окрестности вертикальной скважины в изотропном (а) и анизотропном (б) пласте при линейном распределении скин-фактора

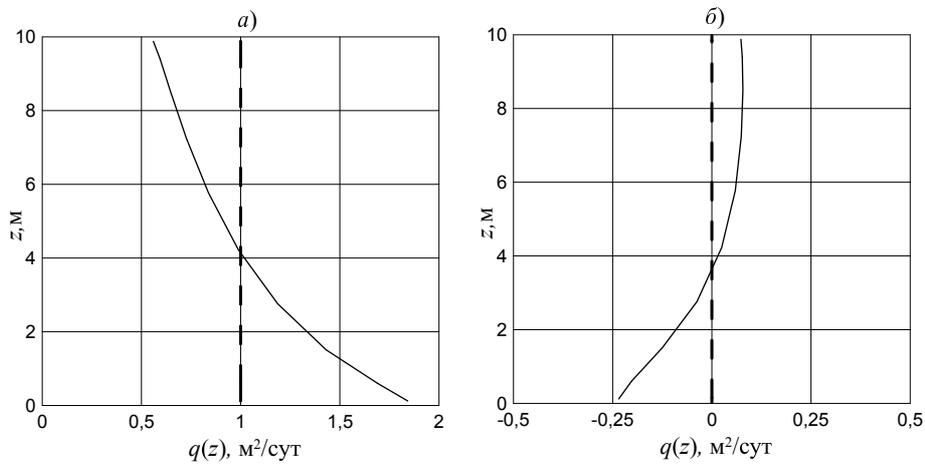


Рис. 8. Распределение притока жидкости по длине ствола вертикальной скважины после пуска (а) и остановки (б) скважины

На рис. 8, а приведены графики распределения притока жидкости по длине ствола скважины при линейном (сплошная линия) и равномерном (пунктирная линия) распределениях скин-фактора. В вертикальной скважине с неравномерным распределением скин-фактора также наблюдается эффект «перетока» жидкости через ствол скважины после ее закрытия на забое (рис. 8, б, сплошная линия). Для вертикальной скважины с равномерным распределением скин-фактора по длине ствола эффект «перетока» не наблюдается (рис. 8, б, пунктирная линия). В этом

случае течение жидкости в пласте является плоскорадиальным и продуктивность скважины не будет зависеть от анизотропии проницаемости пласта.

### Заключение

В работе получено полуаналитическое решение задачи нестационарного притока жидкости к вертикальной скважине с двойным видом несовершенства. Учитывается произвольное число и положение интервалов вскрытия относительно кровли и подошвы пласта, а также влияние объема ствола скважины и неравномерного распределения скин-фактора. Рассмотрены случаи неполного вскрытия вертикальной скважиной бесконечного по простиранию пласта, открытого и замкнутого кругового пласта, полубесконечного пласта с прямолинейной непроницаемой границей и прямолинейным контуром питания.

Расчеты показали, что после остановки несовершенной скважины с закрытием на забое через интервалы вскрытия происходит переток жидкости. Аналогичный эффект «перетока» жидкости наблюдается в стволе горизонтальной скважины после ее остановки [28].

Полученные в работе решения задачи нестационарного притока жидкости к несовершенной скважине могут быть использованы для определения фильтрационно-емкостных параметров пластов по результатам гидродинамических исследований скважин.

### Литература

1. Хейн А.Л. Неустановившаяся фильтрация жидкости и газа к скважине с открытым забоем, неполностью вскрывающей пласт // Докл. АН СССР. – 1953. – Т. 91, № 3. – С. 467–470.
2. Yeh H.D., Chang Y.C. Recent advances in modeling of well hydraulics // Adv. Water Resour. – 2013. – V. 51. – P. 27–51. – doi: 10.1016/j.advwatres.2012.03.006.
3. Hantush M.S. Hydraulics of wells // Advances in Hydroscience / Ed. by V.T. Chow. – N. Y.: Acad. Press, 1964. – P. 281–432.
4. Nisle R.O. The effect of partial penetration on pressure buildup in oil wells // Trans., AIME. – 1958. – V. 213. – P. 85–90.
5. Seth M.S. Unsteady state pressure distribution in a finite reservoir with partial wellbore opening // J. Can. Pet. Technol. – 1968. – V. 7, No 4. – P. 153–168. – doi: 10.2118/68-04-02.
6. Gringarten A.C., Ramey H.J. Jr. An approximate infinite conductivity solution for a partially penetrating line-source well // Soc. Pet. Eng. J. – 1975. – V. 15, No 2. – P. 140–148. – doi: 10.2118/4733-PA.
7. Бочевер Ф.М., Веригин Н.Н. Методическое пособие по расчетам эксплуатационных запасов подземных вод для водоснабжения – М.: Госстройиздат, 1961. – 200 с.
8. Streltsova-Adams T.D. Pressure drawdown in a well with limited flow entry // J. Pet. Technol. – 1979. – V. 31, No 11. – P. 1469–1476. – doi: 10.2118/7486-PA.
9. Райченко Л.М. О притоке жидкости к несовершенной скважине в слое трещиновато-пористых пород // Прикл. механика. – 1976. – Т. 12, № 2. – С. 133–137.
10. Dougherty D., Babu D. Flow to a partially penetrating well in a double-porosity reservoir // Water Resour. Res. – 1984. – V. 20, No 8. – P. 1116–1122. – doi: 10.1029/WR020i008p01116.

11. *Kuchuk F.J., Kirwan P.A.* New skin and wellbore storage type curves for partially penetrated wells // SPE Form. Eval. – 1987. – V. 2, No 4. – P. 546–554. – doi: 10.2118/11676-PA.
12. *Yildiz T., Bassiouni Z.A.* Transient pressure analysis in partially-penetrating wells // CIM/SPE Int. Techn. Meeting. – 1990. – Art. SPE-21551-MS. – doi: 10.2118/21551-MS.
13. *Yang S.Y., Yeh H.D.* A general semi-analytical solution for three types of well tests in confined aquifers with a partially penetrating well // Terr. Atmos. Ocean Sci. – 2012. – V. 23, No 5. – P. 577–584. – doi: 10.3319/TAO.2012.05.22.02(WMH).
14. *Chang C.C., Chen C.S.* An integral transform approach for a mixed boundary problem involving a flowing partially penetrating well with infinitesimal well skin // Water Resour. Res. – 2002. – V. 38, No 6. – P. 1071–1077. – doi: 10.1029/2001WR001091.
15. *Perina T.* General well function for soil vapor extraction // Adv. Water Resour. – 2014. – V. 66. – P. 1–7. – doi: 10.1016/j.advwatres.2014.01.005.
16. *Feng Q., Zhan H.* Integrated aquitard-aquifer flow with a mixed-type well-face boundary and skin effect // Adv. Water Resour. – 2016. – V. 89. – P. 42–52. – doi: 10.1016/j.advwatres.2016.01.003.
17. *Wang Q., Zhan H.* The effect of intra-wellbore head losses in a vertical well // J. Hydrol. – 2017. – V. 548. – P. 333–341. – doi: 10.1016/j.jhydrol.2017.02.042.
18. *Biryukov D., Kuchuk F.J.* Pressure transient solutions to mixed boundary value problems for partially open wellbore geometries in porous media // J. Pet. Sci. Eng. – 2012. – V. 96–97. – P. 162–175. – doi: 10.1016/j.petrol.2012.08.001.
19. *Bilhartz H.L. Jr., Ramey H.J. Jr.* The combined effects of storage, skin, and partial penetration on well test analysis // SPE Annual Fall Technical Conference and Exhibition. – 1977. – Art. SPE-6753-MS. – doi: 10.2118/6753-MS.
20. *Larsen L.* The pressure-transient behavior of vertical wells with multiple flow entries // SPE Annual Technical Conference and Exhibition. – 1993. – Art. SPE-26480-MS. – doi: 10.2118/26480-MS.
21. *Yildiz T., Cinar Y.* Inflow performance and transient pressure behavior of selectively completed vertical wells // SPE Res. Eval. Eng. – 1998. – V. 1, No 5. – P. 467–475. – doi: 10.2118/51334-PA.
22. *Vashisht A.K., Shakya S.K.* Hydraulics of a drainage well fully penetrating a leaky aquifer through a multisection screen // J. Hydraul. Eng. – 2013. – V. 139, No 12. – P. 1258–1264. – doi: 10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0000794.
23. *Chen C.S., Chang C.C.* Theoretical evaluation of non-uniform skin effect on aquifer response under constant rate pumping // J. Hydrol. – 2006. – V. 317, No 3–4. – P. 190–201. – doi: 10.1016/j.jhydrol.2005.05.017.
24. *Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М.* Подземная гидромеханика – М.: Недра, 1993. – 416 с.
25. *Saad Y.* Iterative methods for sparse linear systems – Boston: PWS Publishing Company, 1996. – 447 с.
26. *van Everdingen A.F., Hurst W.* The application of the Laplace transformation to flow problems in reservoirs // J. Pet. Technol. – 1949. – V. 1, No 12. – P. 305–324. – doi: 10.2118/949305-G.
27. *Agarwal R.G., Al-Hussainy R., Ramey H.J. Jr.* An investigation of wellbore storage and skin effect in unsteady liquid flow: I. Analytical treatment // SPE J. – 1970. – V. 10, No 3. – P. 279–290. – doi: 10.2118/2466-PA.

28. Морозов П.Е. Математическое моделирование притока жидкости к горизонтальной скважине в анизотропном трещиновато-пористом пласте // Материалы XIII Всероссий. конф. «Современные проблемы математического моделирования». – Ростов н/Д, 2009. – С. 368–376. – doi: 10.13140/RG.2.1.4436.5924.

Поступила в редакцию  
03.07.17

**Морозов Петр Евгеньевич**, кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории подземной гидродинамики

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН  
ул. Лобачевского, д. 2/31, г. Казань, 420111, Россия  
E-mail: morozov@imm.knc.ru

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.  
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI  
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2017, vol. 159, no. 3, pp. 340–353

## Semi-Analytical Solution for Unsteady Fluid Flow to a Partially Penetrating Well

*P.E. Morozov*

*Institute of Mechanics and Engineering,  
Kazan Science Center, Russian Academy of Sciences, Kazan, 420111 Russia  
E-mail: morozov@imm.knc.ru*

Received July 3, 2017

### Abstract

An analytical solution of the problem of unsteady fluid flow to a partially penetrating well flowing at constant rate in an anisotropic reservoir with the impermeable top and bottom boundaries has been obtained. The problem reduces to a system of integral equations in the Laplace transform domain that connects the pressure drop and flux distribution along the open interval. The arbitrary number and position of the opening intervals relative to the top and bottom boundaries have been taken into account, as well as the wellbore storage effect and non-uniform skin effect. By using the superposition method, the solution for unsteady fluid flow to a partially penetrating well after its shut down has been obtained. Simulations have showed that the fluid overflow takes place through the opening intervals after a well is shut down at the bottomhole.

**Keywords:** semi-analytical solution, unsteady fluid flow, partially penetrating well, anisotropic reservoir, non-uniform skin effect, wellbore storage effect, “overflow” effect

### Figure Captions

Fig. 1. The scheme of a layer that is partially penetrated by a vertical well.

Fig. 2. The comparison of the semi-analytical and approximate analytical solutions with the numerical solution from [19]: 1 –  $h_d = 100$ ,  $S = 0$ ,  $C_d = 50$ ,  $z_{2d} - z_{1d} = 0.5$ ; 2 –  $h_d = 100$ ,

$S = 2.5$ ,  $C_d = 50$ ,  $z_{2d} - z_{1d} = 0.5$ ; 3 –  $h_d = 500$ ,  $S = 0$ ,  $C_d = 250$ ,  $z_{2d} - z_{1d} = 0.25$ ; 4 –  $h_d = 500$ ,  $S = 5$ ,  $C_d = 250$ ,  $z_{2d} - z_{1d} = 0.25$ .

Fig. 3. The pressure field near the partially penetrating well at the uniform (a) and linear (b) distributions of the skin effect along the length of the penetration interval.

Fig. 4. The distribution of the fluid inflow along the length of the penetration interval after the start-up (a) and shut-down (b) of the well (1 – at the uniform distribution of the skin effect, 2 – at the linear distribution of the skin effect).

Fig. 5. The pressure field near the partially penetrating well with three penetration intervals.

Fig. 6. The distribution of the fluid inflow along the penetration intervals after the start-up (a) and shut-down (b) of the the partially penetrating well.

Fig. 7. The pressure field near the vertical well in the isotropic (a) and anisotropic (b) layer at the linear distribution of the skin effect.

Fig. 8. The distribution of the fluid inflow along the wellbore after the start-up (a) and shut-down (b) of the well.

#### References

1. Hein A.L. Unsteady filtration of liquid and gas to a partially penetrating well with an open bottom hole. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1953, vol. 91, no. 3, pp. 467–470. (in Russian)
2. Yeh H.D., Chang Y.C. Recent advances in modeling of well hydraulics. *Adv. Water Resour.*, 2013, vol. 51, pp. 27–51. doi: 10.1016/j.advwatres.2012.03.006.
3. Hantush M.S. Advances in Hydroscience. *Hydraulics of Wells*. Chow V.T. (Ed.). New York, Acad. Press, 1964. pp. 281–432.
4. Nisle R.O. The effect of partial penetration on pressure buildup in oil wells. *Pet. Trans., AIME*, 1958, vol. 213, pp. 85–90.
5. Seth M.S. Unsteady state pressure distribution in a finite reservoir with partial wellbore opening. *J. Can. Pet. Technol.*, 1968, vol. 7, no. 4, pp. 153–168. doi: 10.2118/68-04-02.
6. Gringarten A.C., Ramey H.J.Jr. An approximate infinite conductivity solution for a partially penetrating line-source well. *Soc. Pet. Eng. J.*, 1975, vol. 15, no. 2, pp. 140–148. doi: 10.2118/4733-PA.
7. Bochever F.M., Verigin N.N. Methodical Manual for the Accounts of Operational Stocks of Ground Waters. Moscow, Gosstroizdat, 1961. 200 p. (in Russian)
8. Streltsova-Adams T.D. Pressure drawdown in a well with limited flow entry. *J. Pet. Technol.*, 1979, vol. 31, no. 11, pp. 1469–1476. doi: 10.2118/7486-PA.
9. Raichenko L.M. Flow of liquid to an incomplete well in a bed of fissile-porous rocks. *Sov. Appl. Mech.*, 1976, vol. 12, no. 2, pp. 1996–2000. doi: 10.1007/BF00883491.
10. Dougherty D., Babu D. Flow to a partially penetrating well in a double-porosity reservoir. *Water Resour. Res.*, 1984, vol. 20, no. 8, pp. 1116–1122. doi: 10.1029/WR020i008p01116.
11. Kuchuk F.J., Kirwan P.A. New skin and wellbore storage type curves for partially penetrated wells. *SPE Form. Eval.*, 1987, vol. 2, no. 4, pp. 546–554. doi: 10.2118/11676-PA
12. Yildiz T., Bassiouni Z.A. Transient pressure analysis in partially-penetrating wells. *CIM/SPE Int. Tech. Meet.*, SPE pap. 21551. doi: 10.2118/21551-MS.
13. Yang S.Y., Yeh H.D. A general semi-analytical solution for three types of well tests in confined aquifers with a partially penetrating well. *Terr. Atmos. Ocean Sci.*, 2012, vol. 23, no. 5, pp. 577–584. doi: 10.3319/TAO.2012.05.22.02(WMH).
14. Chang C.C., Chen C.S. An integral transform approach for a mixed boundary problem involving a flowing partially penetrating well with infinitesimal well skin. *Water Resour. Res.*, 2002, vol. 38, no. 6. pp. 1071–1077. doi: 10.1029/2001WR001091.

15. Perina T. General well function for soil vapor extraction. *Adv. Water Resour.*, 2014, vol. 66, pp. 1–7. doi: 10.1016/j.advwatres.2014.01.005.
16. Feng Q., Zhan H. Integrated aquitard-aquifer flow with a mixed-type well-face boundary and skin effect. *Adv. Water Resour.*, 2016, vol. 89, pp. 42–52. doi: 10.1016/j.advwatres.2016.01.003.
17. Wang Q., Zhan H. The effect of intra-wellbore head losses in a vertical well. *J. Hydrol.*, 2017, vol. 548, pp. 333–341. doi: 10.1016/j.jhydrol.2017.02.042.
18. Biryukov D., Kuchuk F.J. Pressure transient solutions to mixed boundary value problems for partially open wellbore geometries in porous media. *J. Pet. Sci. Eng.*, 2012, vols. 96–97. pp. 162–175. doi: 10.1016/j.petrol.2012.08.001/.
19. Bilhartz H.L.Jr., Ramey H.J.Jr. The combined effects of storage, skin, and partial penetration on well test analysis. *SPE Annu. Fall Tech. Conf. Exhib.* SPE pap. 6753. doi: 10.2118/6753-MS.
20. Larsen L. The pressure-transient behavior of vertical wells with multiple flow entries. *SPE Annu. Tech. Conf. Exhib.* SPE pap. 26480. doi: 10.2118/26480-MS.
21. Yildiz T., Cinar Y. Inflow performance and transient pressure behavior of selectively completed vertical wells. *SPE Reservoir Eval. Eng.*, 1998, vol. 1, no. 5. pp. 467–475. doi: 10.2118/51334-PA.
22. Vashisht A.K., Shakya S.K. Hydraulics of a drainage well fully penetrating a leaky aquifer through a multisection screen. *J. Hydraul. Eng.*, 2013, vol. 139, no. 12. pp. 1258–1264. doi: 10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0000794.
23. Chen C.S., Chang C.C. Theoretical evaluation of non-uniform skin effect on aquifer response under constant rate pumping. *J. Hydrol.*, 2006, vol. 317, nos. 3–4. pp. 190–201. doi: 10.1016/j.jhydrol.2005.05.017.
24. Basniev K.S., Kochina I.N., Maximov V.M. *Underground Hydrodynamics*. Moscow, Nedra, 1993. 416 p. (In Russian)
25. Saad Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Boston, PWS Publ. Co., 1996. 447 p.
26. van Everdingen A.F., Hurst W. The application of the Laplace transformation to flow problems in reservoirs. *J. Pet. Technol.*, 1949, vol. 1, no. 12. pp. 305–324. doi: 10.2118/949305-G
27. Agarwal R.G., Al-Hussainy R., Ramey H.J. Jr. An investigation of wellbore storage and skin effect in unsteady liquid flow: I. Analytical treatment. *Soc. Pet. Eng. J.*, 1970, vol. 10, no. 3. pp. 279–290. doi: 10.2118/2466-PA.
28. Morozov P.E. Mathematical modeling of fluid flow to horizontal well in an anisotropic naturally fractured reservoir. *Sovremennyye problemy matematicheskogo modelirovaniya. Materialy XIII Vseros. Konf.* [Modern Problems of Mathematical Modeling. Proc. XIII All-Russ. Sci. Conf.] Rostov-on-Don, 2009, pp. 368–376. (In Russian) doi: 10.13140/RG.2.1.4436.5924.

---

⟨ **Для цитирования:** Морозов П.Е. Полуаналитическое решение задачи нестационарного притока жидкости к несовершенной скважине // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 3. – С. 340–353. ⟩

⟨ **For citation:** Morozov P.E. Semi-analytical solution for unsteady fluid flow to a partially penetrating well. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 3, pp. 340–353. (In Russian) ⟩