УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2020, Т. 162, кн. 3 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 300–310 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 519.71 doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.300-310

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ФУНКЦИЙ ШЕННОНОВСКОГО ТИПА, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ СЛОЖНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ СИСТЕМ МОНОМОВ

С.А. Корнеев

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, 119991, Россия
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, г. Москва, 125047, Россия

Аннотация

В работе исследована сложность реализации систем мономов для некоторых моделей, допускающих многократное использование промежуточных результатов, в частности, для схем композиции и схем умножения.

Для указанных моделей изучены функции шенноновского типа, характеризующие максимальную сложность вычисления систем мономов, показатели степеней которых не превосходят соответствующих элементов заданной матрицы A. Установлено, что для схем композиции при условии неограниченного роста максимума элементов матрицы такая функция асимптотически растет как двоичный логарифм максимального по модулю (без учёта знака) элемента определителя матрицы A. Используя обобщённые схемы в качестве вспомогательной модели, удалось (при некоторых слабых ограничениях) перенести этот результат на модель схем умножения.

Ключевые слова: система мономов, сложность вычисления, схемная сложность, функция Шеннона

В работе исследуются вопросы схемной сложности реализации систем мономов в моделях схем умножения, обобщённых схем и схем композиции. Дадим определения в рамках общего подхода к изучению сложности в этих трёх моделях.

Пусть задан набор операций над мономами. *Схемой над системой мономов* M_0 будем называть такую последовательность мономов, которая удовлетворяет следующим условиям:

– последовательность начинается с системы мономов M_0 (расположенных в произвольном порядке);

– каждый из мономов последовательности, не принадлежащий системе M_0, получается применением допустимых для данной модели операций к некоторым предшествующим ему мономам (запись этой операции будем называть *правилом вычисления* данного монома в данной схеме).

Дадим набор определений, связанных с понятием схемы.

1. *Схема S реализует моном U*, если $U \in S$.

2. *Схема S реализует систему мономов M*, если она реализует каждый моном из системы M.

3. *Сложность схемы S* – это количество используемых в ней операций, то есть разность между количеством мономов в схеме S и количеством мономов в системе M_0.

4. *Сложность реализации системы мономов* M – это минимальная сложность схемы, реализующей систему мономов M над системой всех её переменных.

5. *Сложность реализации системы мономов* M *над системой мономов* M_0 – это минимальная сложность схемы, реализующей систему мономов M над системой мономов M_0.

6. Так как система мономов

$$M_A = \{{x_1}^{a_{11}}{x_2}^{a_{12}}\dots{x_q}^{a_{1q}}, {x_1}^{a_{21}}{x_2}^{a_{22}}\dots{x_q}^{a_{2q}}, \dots, {x_1}^{a_{p1}}{x_2}^{a_{p2}}\dots{x_q}^{a_{pq}}\}.$$

однозначно определяется целочисленной неотрицательной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix},$$

то можно говорить о *сложности реализации матрицы* A, понимая под этим сложность реализации системы мономов M_A. В дальнейшем во всех обозначениях сложности будем допускать замену системы мономов на соответствующую матрицу и наоборот.

Таким образом, в зависимости от заданного набора операций мы получаем разные модели вычисления систем мономов. Операции умножения соответствует классическая модель (схемы умножения). Набору из двух операций – операции умножения и операции возведения в любую рациональную степень $r \in (1, 2]$ – соответствуют обобщённые схемы [1]. Операции композиции соответствуют схемы композиции [2–5].

Будем использовать обозначение $l(S)$ для сложности схемы умножения S, обозначение $l(M)$ для сложности реализации системы мономов M схемами умножения и обозначение $l(M/M_0)$ для сложности реализации системы мономов M схемами умножения над системой мономов M_0. Аналогично, для обобщённых схем будем использовать обозначения $\lambda(S)$, $\lambda(M)$ и $\lambda(M/M_0)$, а для схем композиции – обозначения $l_{\mathrm{sh}}(S)$, $l_{\mathrm{sh}}(M)$ и $l_{\mathrm{sh}}(M/M_0)$.

Для произвольных матриц A и B одинакового размера $p \times q$ будем использовать обозначение $B \le A$, если $b_{ij} \le a_{ij}$, $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$. Пусть A – целочисленная неотрицательная матрица без нулевых строк и столбцов. Рассмотрим функции шенноновского типа

$$L(A) = \max l(B), \quad L_\lambda(A) = \max \lambda(B), \quad L_{\mathrm{sh}}(A) = \max l_{\mathrm{sh}}(B),$$

где максимум берётся по всем целочисленным неотрицательным матрицам B, для которых выполнено условие $B \le A$. Эти функции характеризуют сложность реализации самой сложной матрицы, «не превосходящей» данной матрицы A, для соответствующих моделей вычислений.

Для произвольной квадратной матрицы $B = (b_{ij})$ порядка n положим

$$d_{MT}(B) = \max_{\sigma \in S_n} (b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \dots b_{n\sigma(n)}).$$

Таким образом, величина $d_{MT}(B)$ равна значению максимального слагаемого (без учёта знака) определителя матрицы B. Далее, для произвольной матрицы A положим $D_{MT}(A) = \max d_{MT}(B)$, где максимум берётся по всем квадратным подматрицам B матрицы A.

Для произвольной целочисленной неотрицательной матрицы $A = (a_{ij})$ введём также обозначения

$$H(A) = |\{a_{ij} \mid a_{ij} \ne 0\}|, \quad {a^+}_{ij} = \max(a_{ij}, 1), \quad A^+ = (a^+_{ij}).$$

Легко видеть, что если в матрице A есть ненулевые элементы, то $D_{MT}(A^+) = D_{MT}(A)$.

Лемма 1. *Если существуют схемы умножения (обобщённые схемы, схемы композиции), реализующие систему мономов M_1 над системой мономов M_0 и систему мономов M над системой мономов M_1, то*

$$l(M/M_0) \le l(M_1/M_0) + l(M/M_1)$$

$$\Big(\lambda(M/M_0) \le \lambda(M_1/M_0) + \lambda(M/M_1),$$

$$l_{\rm sh}(M/M_0) \le l_{\rm sh}(M_1/M_0) + l_{\rm sh}(M/M_1)\Big).$$

Лемма 2. *Пусть мономы $U = {x_1}^{a_1}{x_2}^{a_2}\ldots{x_q}^{a_q}$ и $V = {x_1}^{b_1}{x_2}^{b_2}\ldots{x_q}^{b_q}$ удовлетворяют условиям $a_k \ge b_k > 0$, $k = 1,\ldots,q$. Тогда*[1]

$$l_{\rm sh}(U/V) = \left\lceil \log \max_{k:1\le k\le q} \frac{a_k}{b_k} \right\rceil.$$

Лемма 3. *Для монома $U = {x_1}^{a_1}\ldots{x_q}^{a_q}$ справедливо равенство*

$$l_{\rm sh}(U) = \left\lceil \log \max_{k:1\le k\le q} a_k \right\rceil + q - 1.$$

Доказательства лемм 2 и 3 можно найти в работе [5].

Лемма 4. *Пусть для монома $U = {x_1}^{a_1}{x_2}^{a_2}\ldots{x_q}^{a_q}$ и системы мономов $M = \{{x_1}^{b_1}, {x_2}^{b_2}, \ldots, {x_q}^{b_q}\}$ выполнены условия $a_k \ge b_k > 0$, $k = 1,\ldots,q$. Тогда*

$$\lambda(U/M) \le \left\lfloor \log \max_{k:1\le k\le q} \frac{a_k}{b_k} \right\rfloor + 2q - 1.$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что

$$\frac{a_1}{b_1} \ge \frac{a_2}{b_2} \ge \ldots \ge \frac{a_{q-1}}{b_{q-1}} \ge \frac{a_q}{b_q}.$$

Положим

$$b'_k = a_k \cdot 2^{-\lfloor \log a_k/b_k \rfloor}, \quad k = 1,\ldots,q,$$

$$M' = \{{x_k}^{b'_k}, k = 1,\ldots,q\}.$$

Тогда для любого $k = 1,\ldots,q$ выполнено условие

$$\lambda({x_k}^{b'_k}/{x_k}^{b_k}) = \left\lceil \log \frac{b'_k}{b_k} \right\rceil = \left\lceil \log \frac{b_k}{a_k} \right\rceil + \left\lfloor \log \frac{a_k}{b_k} \right\rfloor \le 1. \qquad (1)$$

Обобщённую схему, реализующую моном U над системой мономов M', можно построить индуктивно по следующему алгоритму.

Схема начинается с системы мономов M'. Сначала рассматривается моном ${x_1}^{b'_1}$. В дальнейшем рассматривается последний добавленный моном.

Пусть рассматриваемый моном схемы имеет вид ${x_1}^{c_1}, {x_2}^{c_2}, \ldots, {x_m}^{c_m}$.

Если $m = q$ и $c_q = a_q$, то на этом построение схемы заканчивается.

---

[1] Здесь и далее $\log$ обозначает логарифм по основанию 2.

Если $m = q$ и $c_q < a_q$ или $m < q$ и $a_m/c_m = a_{m+1}/c_{m+1}$, то сделаем шаг типа I: добавим в схему моном ${x_1}^{c_1}, {x_2}^{c_2}, \ldots, {x_m}^{c_m}{x_{m+1}}^{c_{m+1}}$.

Если $m < q$ и $a_m/c_m > a_{m+1}/c_{m+1}$, то сделаем шаг типа II: добавим в схему моном ${x_1}^{2c_1}, {x_2}^{2c_2}, \ldots, {x_m}^{2c_m}$.

В такой схеме количество шагов типа I будет равно $\log a_1/b'_1$, а количество шагов типа II будет равно $q-1$, поэтому

$$\lambda(M/M') \le \log\frac{a_1}{b'_1} + q - 1 = \left\lfloor \log\frac{a_1}{b_1} \right\rfloor + q - 1 = \left\lfloor \log \max_{k:1\le k\le q} \frac{a_k}{b_k} \right\rfloor + q - 1. \quad (2)$$

Используя (1) и (2), а также лемму 1, получаем

$$\lambda(U/M) \le \lambda(U/M') + \lambda(M'/M) \le \lambda(U/M') + \sum_{k=1}^{q} \lambda({x_k}^{a_k}/{x_k}^{b'_k}) =$$
$$= \left\lfloor \log \max_{k:1\le k\le q} \frac{a_k}{b_k} \right\rfloor + q - 1 + q = \left\lfloor \log \max_{k:1\le k\le q} \frac{a_k}{b_k} \right\rfloor + 2q - 1,$$

что и требовалось. □

Пусть задана квадратная матрица $B = (b_{ij})$ порядка n, у которой самое большое слагаемое определителя (без учёта знака) расположено на главной диагонали. Тогда

$$d_{MT}(B^+) = \prod_{i=1}^{n} {b^+}_{ii}. \quad (3)$$

Положим

$$c_i(B) = \min_{\substack{(i_1,\ldots,i_l)\in S_l \\ 1\le l\le n,\ i_1=i}} \left({b^+}_{i_1 i_1} \cdot \frac{{b^+}_{i_2 i_2}}{{b^+}_{i_1 i_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{{b^+}_{i_l i_l}}{{b^+}_{i_{l-1} i_l}} \right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

В дальнейшем, если ясно, о какой матрице идёт речь, будем вместо $c_i(B)$ писать просто c_i. Введённые величины c_i обладают следующими свойствами:

1) $c_i \ge 1$, $i = 1, \ldots, n$;

2) Для любых i и j, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$, выполнено неравенство $c_i \le \dfrac{{b^+}_{ii}}{{b^+}_{ij}} c_j$.

Докажем эти свойства. Пусть $(i_1, \ldots, i_l)$ – произвольный элемент группы S_l. Тогда

$$\max_{(j_1,\ldots,j_n)\in S_n} \prod_{k=1}^{n} {b^+}_{k j_k} \ge {b^+}_{i_1 i_2} {b^+}_{i_2 i_3} \cdots {b^+}_{i_{l-1} i_l} {b^+}_{i_l i_1} \prod_{k\notin\{i_1,\ldots,i_l\}} {b^+}_{kk}. \quad (4)$$

Из (3) и (4) получаем

$$\prod_{k\in\{i_1,\ldots,i_l\}} {b^+}_{kk} \ge {b^+}_{i_1 i_2} {b^+}_{i_2 i_3} \cdots {b^+}_{i_{l-1} i_l} {b^+}_{i_l i_1},$$

поэтому

$${b^+}_{i_1 i_1} \cdot \frac{{b^+}_{i_2 i_2}}{{b^+}_{i_1 i_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{{b^+}_{i_l i_l}}{{b^+}_{i_{l-1} i_l}} \ge {b^+}_{i_l i_1}, \quad (5)$$

откуда

$$c_i \ge \min_{1\le i_l\le n} {b^+}_{i_l i} \ge 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Свойство 1 доказано. Перейдём к доказательству свойства 2.

Без ограничения общности будем считать, что

$$c_j = {b^+}_{j_1 j_1} \cdot \frac{{b^+}_{j_2 j_2}}{{b^+}_{j_1 j_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{{b^+}_{j_m j_m}}{{b^+}_{j_{m-1} j_m}},$$

где $(j_1, \ldots j_m) \in S_n$ и $j_1 = j$. Пусть $i \notin \{j_1, \ldots\ j_m\}$. Тогда

$$\frac{{b^+}_{ii}}{{b^+}_{ij}} \cdot c_j = {b^+}_{ii} \cdot \frac{{b^+}_{j_1 j_1}}{{b^+}_{ij_1}} \cdot \frac{{b^+}_{j_2 j_2}}{{b^+}_{j_1 j_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{{b^+}_{j_m j_m}}{{b^+}_{j_{m-1} j_m}} \geq c_i,$$

что и требовалось. Пусть теперь $i \in \{j_1, \ldots\ j_m\}$, то есть для некоторого k, $1 \leq k \leq m$, выполнено условие $i = j_k$. Тогда, используя (5), получаем

$$\frac{{b^+}_{ii}}{{b^+}_{ij}} \cdot c_j = {b^+}_{j_k j_k} \cdot \frac{{b^+}_{j_1 j_1}}{{b^+}_{j_k j_1}} \cdot \frac{{b^+}_{j_2 j_2}}{{b^+}_{j_1 j_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{{b^+}_{j_{k-1} j_{k-1}}}{{b^+}_{j_{k-2} j_{k-1}}} \cdot \frac{{b^+}_{j_k j_k}}{{b^+}_{j_{k-1} j_k}} \cdot \frac{{b^+}_{j_{k+1} j_{k+1}}}{{b^+}_{j_k j_{k+1}}} \cdot \ldots \cdot \frac{{b^+}_{j_m j_m}}{{b^+}_{j_{m-1} j_m}} \geq$$
$$\geq {b^+}_{j_k j_k} \cdot \frac{{b^+}_{j_{k+1} j_{k+1}}}{{b^+}_{j_k j_{k+1}}} \cdot \ldots \cdot \frac{{b^+}_{j_m j_m}}{{b^+}_{j_{m-1} j_m}} = {b^+}_{ii} \cdot \frac{{b^+}_{j_{k+1} j_{k+1}}}{{b^+}_{ij_{k+1}}} \cdot \ldots \cdot \frac{{b^+}_{j_m j_m}}{{b^+}_{j_{m-1} j_m}} \geq c_i,$$

что и требовалось. Свойство 2 доказано.

Лемма 5. *Пусть в матрице A без нулевых строк и столбцов все элементы – целые неотрицательные числа. Тогда*

$$l_{\mathrm{sh}}(A) \leq \log D_{MT}(A) + H(A).$$

Доказательство. Пусть матрица $A = (a_{ij})$ имеет размер $p \times q$ и $n = \max(p, q)$. Если матрица A не квадратная, то дополним её до квадратной, а именно: для всех i, j, $1 \leq i, j \leq n$, положим $a_{ij} = 0$, если выполнено одно из условий $p < i \leq n$ или $q < j \leq n$. Легко видеть, что при этом величины $l_{sh}(A)$, $\log D_{MT}(A)$ и $H(A)$ не изменятся.

Рассмотрим квадратную матрицу $B = (b_{ij})$ порядка n, где

$$b_{ij} = \begin{cases} 2^{\lfloor \log a_{ij} \rfloor}, & \text{если } a_{ij} \neq 0; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда из леммы 2 следует, что

$$l_{sh}(A) \leq l_{\mathrm{sh}}(B) + p. \tag{6}$$

Так как при перестановке строк и столбцов сложность матрицы не изменяется, без ограничения общности можно считать, что для матрицы B^+ выполнено условие (3). С другой стороны, легко видеть, что

$$D_{MT}(A) \geq D_{MT}(B) = D_{MT}(B^+) = d_{MT}(B^+),$$

поэтому

$$D_{MT}(A) \geq \prod_{i=1}^{n} {b^+}_{ii}. \tag{7}$$

Введём обозначения:

$$U_i = {x_1}^{b_{i1}} {x_2}^{b_{i2}} \ldots {x_q}^{b_{iq}}, \quad i = 1, \ldots, p, \quad M_U = \{U_i | \, i = 1, \ldots, p\},$$

$$e_{ij} = \min(c_j(B), b_{ij}), \quad i = 1, \ldots, p, \quad j = 1, \ldots, q,$$

$$V_i = {x_1}^{e_{i1}} {x_2}^{e_{i2}} \dots {x_q}^{e_{iq}}, \quad i = 1, \dots, p, \quad M_V = \{V_i | \, i = 1, \dots, p\},$$

$$M_i = \{x_j^{e_{ij}} : e_{ij} \neq 0\}, \quad i = 1, \dots, p, \quad M_0 = \bigcup_{i=1}^{p} M_i.$$

Легко видеть, что $|M_0| \le H(A)$. Кроме того, из леммы 1 следует, что

$$l_{\rm sh}(B) = l_{\rm sh}(M_U) \le l_{\rm sh}(M_V) + l_{\rm sh}(M_U/M_V) \le l_{\rm sh}(M_V) + \sum_{i=1}^{p} l_{\rm sh}(U_i/V_i). \qquad (8)$$

Используя леммы 1–3 и свойство 1 чисел c_i и учитывая, что все эти числа – степени двойки, получаем

$$l_{\rm sh}(M_V) \le l_{\rm sh}(M_0) + l_{\rm sh}(M_V/M_0) \le \\ \le \sum_{i=1}^{q} \log c_i + \sum_{i=1}^{p} l_{\rm sh}(V_i/M_i) \le \sum_{i=1}^{q} \log c_i + H(A) - p. \qquad (9)$$

С другой стороны, используя лемму 2 и учитывая, что все числа b_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$, – нули или степени двойки, получаем

$$l_{\rm sh}(U_i/V_i) = \log \max_{\substack{j: 1 \le j \le q \\ b_{ij} \neq 0}} \frac{b_{ij}}{e_{ij}} = \log \max_{j: 1 \le j \le q} \frac{{b^+}_{ij}}{{e^+}_{ij}}. \qquad (10)$$

Используя свойство 2, для всех i, j, $1 \le i, j \le n$, также получаем

$$c_i \frac{{b^+}_{ij}}{{e^+}_{ij}} = \max\left(\frac{c_i}{c_j} {b^+}_{ij}, c_i\right) \le \max({b^+}_{ii}, c_i) = {b^+}_{ii}. \qquad (11)$$

Подставляя (9) и (10) в (8) и используя (11), имеем

$$l_{\rm sh}(B) \le \sum_{i=1}^{q} \log c_i + \sum_{i=1}^{p} \log \max_{j: 1 \le j \le q} \frac{{b^+}_{ij}}{{e^+}_{ij}} + H(A) - p = \\ = \sum_{i=1}^{n} \log c_i + \sum_{i=1}^{n} \log \max_{j: 1 \le j \le q} \frac{{b^+}_{ij}}{{e^+}_{ij}} + H(A) - p = \\ = \sum_{i=1}^{n} \log\left(c_i \max_{j: 1 \le j \le q} \frac{{b^+}_{ij}}{{e^+}_{ij}}\right) + H(A) - p \le \sum_{i=1}^{n} \log {b^+}_{ii} + H(A) - p. \qquad (12)$$

Применяя (4) к (12), получаем

$$l_{\rm sh}(B) \le \sum_{i=1}^{n} \log {b^+}_{ii} + H(A) - p = \log \prod_{i=1}^{n} {b^+}_{ii} + H(A) - p \le \\ \le \log D_{MT}(A) + H(A) - p. \qquad (13)$$

Наконец, подставляя (13) в (6), получаем

$$l_{\rm sh}(A) \le \log D_{MT}(A) + H(A),$$

что и требовалось. □

Лемма 6. *Пусть в матрице* $A = (a_{ij})$ *размера* $p \times q$ *без нулевых строк и столбцов все элементы – целые неотрицательные числа. Тогда*

$$\lambda(A) \le \log D_{MT}(A) + 2H(A) + p.$$

Доказательство. Пусть $n = \max(p, q)$. Для всех i и j, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$, положим $a_{ij} = 0$, если выполнено одно из условий $p < i \le n$ или $q < j \le n$. Рассмотрим матрицу $B = (b_{ij})$ размера $n \times n$, где

$$b_{ij} = a_{ij}, \quad 1 \le i \le n, \quad 1 \le j \le n.$$

Очевидно, тогда $\lambda(A) = \lambda(B)$. Как и в доказательстве леммы 5, без ограничения общности будем считать, что для матрицы B^+ выполнено условие (3), откуда сразу следует, что

$$D_{MT}(A) = \prod_{i=1}^{n} {b^+}_{ii}. \tag{14}$$

Введём обозначения

$$e_{ij} = \begin{cases} \min(c_j, 2^{\lfloor \log b_{ij} \rfloor}), & \text{если } b_{ij} \ne 0, \\ 0, & \text{если } b_{ij} = 0; \end{cases} \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q,$$

$$M_i = \{{x_j}^{e_{ij}} \mid e_{ij} \ne 0, \quad j = 1, \dots, q\}, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$M'_j = \{{x_j}^{e_{ij}} \mid e_{ij} \ne 0, \quad i = 1, \dots, p\}, \quad j = 1, \dots, q,$$

$$M_0 = \bigcup_{i=1}^{p} M_i = \bigcup_{j=1}^{q} M'_j.$$

Из леммы 1 следует, что

$$\lambda(A) \le \lambda(M_0) + \lambda(A/M_0) \le \sum_{j=1}^{q} \lambda(M'_j) + \sum_{i=1}^{p} \lambda(U_i/M_i). \tag{15}$$

Пусть $M_A = \{U_1, \dots, U_p\}$ – система мономов, соответствующая матрице A, и пусть q_i – количество ненулевых элементов в i-й строке матрицы A, $i = 1, \dots, p$. Тогда, используя лемму 5, получаем

$$\lambda(U_i/M_i) \le \left\lfloor \log \max_{\substack{j:1 \le j \le q \\ b_{ij} \ne 0}} \frac{b_{ij}}{e_{ij}} \right\rfloor + 2q_i - 1 = \left\lfloor \log \max_{j:1 \le j \le q} \frac{b^+_{ij}}{e^+_{ij}} \right\rfloor + 2q_i - 1,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda(U_i/M_i) \le \sum_{i=1}^{p} \left\lfloor \log \max_{j:1 \le j \le q} \frac{b^+_{ij}}{e^+_{ij}} \right\rfloor + 2H(A) - p. \tag{16}$$

С другой стороны, так как любой коэффициент e_{ij} равен либо c_j, либо степени двойки, не превосходящей c_j, то

$$\lambda(M'_j) \le \lceil \log c_j \rceil. \tag{17}$$

Заметим также, что для любых $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$ выполнено

$$\frac{{b^+}_{ij}}{{e^+}_{ij}} = \max\left(\frac{{b^+}_{ij}}{c_j}, \frac{{b^+}_{ij}}{2^{\lfloor \log {b^+}_{ij} \rfloor}}\right) < \max\left(\frac{{b^+}_{ij}}{c_j}, 2\right) \le \frac{2{b^+}_{ij}}{c_j}. \tag{18}$$

Подставляя (16) и (17) в (15) и используя (18) и свойство 2 величин c_i, имеем

$$\lambda(A) \le \sum_{i=1}^{q} \lceil \log c_i \rceil + \sum_{i=1}^{p} \left\lfloor \log \max_{j:1\le j\le q} \frac{b^+{}_{ij}}{e^+{}_{ij}} \right\rfloor + 2H(A) - p \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{q} \lceil \log c_i \rceil + \sum_{i=1}^{p} \left\lfloor \log \max_{j:1\le j\le q} \frac{2b^+{}_{ij}}{c_j} \right\rfloor + 2H(A) - p =$$
$$= \sum_{i=1}^{q} \lceil \log c_i \rceil + \sum_{i=1}^{p} \left\lfloor \log \max_{j:1\le j\le q} \frac{b^+{}_{ij}}{c_j} \right\rfloor + 2H(A) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lceil \log c_i \rceil + \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \log \max_{j:1\le j\le q} \frac{b^+{}_{ij}}{c_j} \right\rfloor + 2H(A) \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{n} \left\lceil \log \left(c_i \max_{j:1\le j\le q} \frac{b^+{}_{ij}}{c_j} \right) \right\rceil + 2H(A) \le \sum_{i=1}^{n} \lceil \log b^+{}_{ii} \rceil + 2H(A).$$

Отсюда, используя (14), получаем

$$\lambda(A) = \lambda(B) \le \sum_{i=1}^{n} \lceil \log b^+{}_{ii} \rceil + 2H(A) \le \sum_{i=1}^{n} \log b^+{}_{ii} + 2H(A) + p =$$
$$= \log \prod_{i=1}^{n} b^+{}_{ii} + 2H(A) + p = \log D_{MT}(A) + 2H(A) + p,$$

что и требовалось. □

Объединяя результат леммы 6 с результатом теоремы 3.2 из [6] (подробнее об используемом методе см. также [1]), получаем следующий результат.

Лемма 7. *Пусть* $A_n = (a_{ij}^{(n)})$ *– последовательность целочисленных неотрицательных матриц размера* $p_n \times q_n$ *без нулевых строк и столбцов, причём последовательность* $\{p_n + q_n\}$ *ограничена и при* $n \to \infty$ *выполнено условие*

$$\sum_{\substack{1\le i\le p_n \\ 1\le j\le q_n}} a_{ij} \to \infty.$$

Тогда

$$L(A_n) \le (1 + o(1)) \log D_{MT}(A_n).$$

Лемма 8. *Для любой целочисленной неотрицательной матрицы* A *справедливы неравенства*

$$L(A) \ge D_{MT}(A), \quad L_\lambda(A) \ge D_{MT}(A), \quad L_{\mathrm{sh}}(A) \ge D_{MT}(A).$$

Доказательство. Так как при перестановке строк и столбцов сложность матрицы не изменяется, без ограничения общности можно считать, что

$$D_{MT}(A) = \prod_{i=1}^{m} a^+{}_{ii}, \tag{19}$$

где $m = \min(p, q)$. Рассмотрим матрицу $G = (g_{ij})$ размера $p \times q$, где

$$g_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } i = j; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда, используя (19), получаем

$$L(A) \geq l(G) = \sum_{i=1}^{m} l(x_i{}^{g_{ii}}) \geq \sum_{i=1}^{m} \log g_{ii} = \sum_{i=1}^{m} \log a^{+}{}_{ii} = D_{MT}(A),$$

что и требовалось. Очевидно, такая же оценка справедлива и для функций $L_\lambda(A)$ и $L_{\mathrm{sh}}(A)$. □

Объединяя результаты лемм 5–8, получаем следующие выводы.

Теорема 1. *Пусть* $A_n = (a_{ij}^{(n)})$ *– последовательность целочисленных неотрицательных матриц размера* $p_n \times q_n$ *без нулевых строк и столбцов, и при* $n \to \infty$ *выполнено условие*

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq p_n \\ 1 \leq j \leq q_n}} a_{ij} \to \infty.$$

Тогда

$$0 \leq L_{sh}(A_n) - \log D_{MT}(A_n) = O(p_n q_n),$$
$$0 \leq L_\lambda(A_n) - \log D_{MT}(A_n) = O(p_n q_n).$$

Теорема 2. *Пусть* $A_n = (a_{ij}^{(n)})$ *– последовательность целочисленных неотрицательных матриц размера* $p_n \times q_n$ *без нулевых строк и столбцов, причём последовательность* $\{p_n + q_n\}$ *ограничена и при* $n \to \infty$ *выполнено условие*

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq p_n \\ 1 \leq j \leq q_n}} a_{ij} \to \infty.$$

Тогда

$$0 \leq L(A_n) - \log D_{MT}(A_n) = o(\log D_{MT}(A_n)).$$

Литература

1. *Кочергин В.В.* О сложности совместного вычисления трех одночленов от трех переменных // Математические вопросы кибернетики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – Вып. 15. – С. 79–154.
2. *Ширшов А.И.* Некоторые алгоритмические проблемы для алгебр Ли // Сиб. матем. журн. – 1962. – Т. 3. – С. 292–296.
3. *Мерекин Ю.В.* О порождении слов с использованием операции композиции // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1 – 2003. – Т. 10, № 4. – С. 70–78.
4. *Трусевич Е.Н.* О сложности вычисления некоторых систем одночленов схемами композиции // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 2014. – № 5. – С. 18–22.
5. *Корнеев С.А.* О сложности реализации системы из двух мономов схемами композиции // Дискрет. матем. – 2020. – Т. 32, Вып. 2 – С. 15–31. – doi: 10.4213/dm1604.
6. *Кочергин В.В.* Задачи Р. Беллмана и Д. Кнута и их обобщения (Сложность аддитивных вычислений). – Saarbrucken: Palmarium Acad. Publ., 2012. – 396 с.

Поступила в редакцию
15.07.2020

Корнеев Сергей Александрович, аспирант кафедры дискретной математики; инженер-исследователь

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук
Миусская пл., д. 4, г. Москва, 125047, Россия

E-mail: *korneev.sa.42@gmail.com*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2020, vol. 162, no. 3, pp. 300–310

doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.300-310

On the Asymptotic Behavior of Shannon-Type Functions Characterizing the Computing Complexity of Systems of Monomials

S.A. Korneev

Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia
Keldysh Institute of Applied Mathematics,
Russian Academy of Sciences, Moscow, 125047 Russia
E-mail: *korneev.sa.42@gmail.com*

Received July 15, 2020

Abstract

In this paper, we examined the computational complexity of systems of monomials for some models that allow multiple use of intermediate results, such as composition circuits and multiplication circuits.

For these models, we studied Shannon-type functions that characterize the maximum computational complexity of systems of monomials with exponents not exceeding the corresponding elements of a given matrix A. We found that for composition circuits, under the condition of unlimited growth of the maximum of matrix elements, this function grows asymptotically as the binary logarithm of the maximum absolute value (without regard to the sign) of the term from the determinant of the matrix A. Using generalized circuits as an auxiliary model, we transferred this result (under some restrictions) to the model of multiplication circuits.

Keywords: set of monomials, computation complexity, circuit complexity, Shannon function

References

1. Kochergin V.V. On the complexity of joint calculation of three monomials of three variables. *Mat. Vopr. Kibern.*, 2006, no. 15, pp. 79–154. (In Russian)
2. Shirshov A.I. Some algorithmic problems for Lie algebras. *Sib. Mat. Zh.*, 1962, vol. 3, no. 2, pp. 292–296. (In Russian)
3. Merekin Yu.V. On the generation of words using the composition operation. *Diskretn. Anal. Issled. Oper. Ser. 1*, 2003, vol. 10, no. 4, pp. 70–78. (In Russian)

4. Trusevich E.N. Complexity of certain systems of monomials in calculation by composition circuits. *Moscow Univ. Math. Bull.*, 2014, vol. 69, no. 5, pp. 193–197. doi: 10.3103/S0027132214050039.
5. Korneev S.A. On the complexity of system of two monomials realization by composition circuits. *Diskretn. Mat.*, 2020, vol. 32, no. 2, pp. 15–31. (In Russian)
6. Kochergin V.V. *Zadachi R. Bellmana i D. Knuta i ikh obobshcheniya (Slozhnost' additivnykh vychislenii)* [R. Bellman and D. Knuth's Problems and Their Generalizations (Complexity of Additive Calculations)]. Saarbrucken, Palmarium Acad. Publ., 2012. 396 p. (In Russian)

⟨ ***Для цитирования*:** *Корнеев С.А.* Об асимптотическом поведении функций шенноновского типа, характеризующих сложность вычисления систем мономов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2020. – Т. 162, кн. 3. – С. 300–310. – doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.300-310. ⟩

⟨ ***For citation*:** Korneev S.A. On the asymptotic behavior of Shannon-type functions characterizing the computing complexity of systems of monomials. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 3, pp. 300–310. doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.300-310. (In Russian) ⟩