

УДК 517.9

МЕТОД СМЕШАННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ НАСЫЩЕННО-НЕНАСЫЩЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ

А.А. Ахтареев, Р.З. Даутов

Аннотация

Предлагается метод решения задачи насыщенно-ненасыщенной фильтрации, который основан на введении новой неизвестной функции и методе конечных элементов с численным интегрированием. Для однородных сред новая переменная совпадает с насыщенностью в одних зонах и с «нормированным» давлением – в других. Указан алгоритм экономической реализации дискретной задачи. Приводятся результаты тестовых вычислений, иллюстрирующие точность и практическую пригодность метода.

Введение

Математическая модель фильтрации жидкости в насыщенно-ненасыщенных пористых средах формулируется в терминах давления $\psi = \psi(x, t)$ и насыщенности $s = s(x, t)$. Они определяются из дифференциального уравнения Ричардса, представляющего собой комбинацию уравнения баланса массы и закона Дарси. Для замыкания модели используется алгебраическое уравнение, связывающее давление с насыщенностью, называемое капиллярным соотношением. Эти уравнения имеют следующий вид:

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} q = Q, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

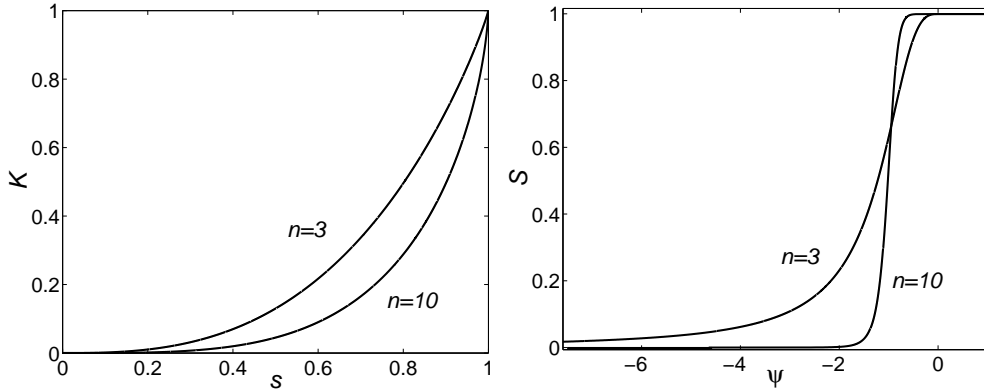
$$s_e = S(\psi). \quad (2)$$

Здесь q – поток жидкости, $q = -K(s_e)K_0(\nabla\psi + e)$, $\Omega \subset R^d$ – область течения, занятая пористой средой, $d = 1, 2, 3$; эффективная насыщенность s_e связана с s соотношением

$$s_e = \frac{s - s_*}{s^* - s_*}.$$

Параметры пористой среды s_* и s^* , $0 \leq s_* < s^* \leq 1$, называются соответственно остаточной и предельной насыщенностями; ϕ – пористость среды ($\phi \in (0, 1)$); $K_0 = K_0(x)$ – тензор проводимости насыщенной среды. Постоянный единичный вектор e равен орту оси, противоположной направлению силы тяжести ($e = 0$, если силой тяжести можно пренебречь), функция Q описывает источники и стоки жидкости. Пористая среда называется насыщенной, если $s_e = 1$; ненасыщенной, если $0 < s_e < 1$; сухой, если $s_e = 0$.

Функции K (относительная проводимость среды) и S также являются параметрами пористой среды и считаются заданными. Функция $S(\psi)$ монотонно возрастает на $(-\infty, \infty)$, $S(\psi) = 1$ при $\psi \geq \psi_a$, $S(\psi) \rightarrow 0$ при $\psi \rightarrow -\infty$; $K(s_e)$ является


 Рис. 1. Аппроксимации Ван-Генухтена функций $K(s_e)$ и $S(\psi)$ при $\alpha = 1$

монотонно возрастающей и выпуклой, $K(0) = 0$, $K(1) = 1$. Наиболее распространены аппроксимации Брукса–Кори [1] и Ван-Генухтена [2] этих функций. Аппроксимации Брукса–Кори (BC) имеют вид

$$K(s_e) = s_e^{3+2/n}, \quad S(\psi) = \begin{cases} 1, & \psi \geq -1/\alpha, \\ (-\alpha\psi)^{-n}, & \psi < -1/\alpha \end{cases}$$

(то есть $\psi_a = -1/\alpha$). Согласно Ван-Генухтену (VG) имеем:

$$K(s_e) = s_e^{1/2} \left(1 - (1 - s_e^{1/m})^m\right)^2, \quad S(\psi) = \begin{cases} 1, & \psi \geq 0, \\ (1 + (-\alpha\psi)^n)^{-m}, & \psi < 0. \end{cases}$$

Здесь $n > 1$, $\alpha > 0$ – параметры среды, $m = 1 - 1/n$. На рис. 1 приведены графики этих функций для аппроксимации VG при двух значениях n . Отметим, что в этом случае $K(s_e)$ ведет себя как $s_e^{0.5+2/m}$ при малых s_e ; $S(\psi) \sim 1/(-\psi)^{n-1}$ при $\psi \rightarrow -\infty$; S близка к ступенчатой функции при больших n .

Пористая среда называется однородной, если все параметры среды не зависят от x области Ω , в противном случае – неоднородной. Далее мы ограничимся рассмотрением только кусочно-однородных пористых сред. А именно, будем предполагать заданным разбиение области Ω на совокупность подобластей Ω_i таких, что параметры среды в них постоянны, кроме, возможно, функции K_0 . Для таких сред к уравнениям (1), (2) присоединяются соотношения непрерывности функции ψ и нормальной составляющей потока q на общих границах областей Ω_i . Отметим, что в случае неоднородной среды в уравнениях (1), (2) необходимо полагать $K(x, s_e)$, $S(x, \psi)$ вместо $K(s_e)$ и $S(\psi)$ соответственно. Однако для краткости мы не будем указывать зависимость от x явно.

Уравнения (1), (2) дополним следующими краевыми и начальными условиями:

$$\psi = \psi_0, \quad x \in \Gamma_0, \quad -q \cdot \nu = q_0, \quad x \in \Gamma_1, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$\psi = \psi^0, \quad x \in \Omega, \quad t = 0. \quad (4)$$

Здесь $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ – граница Ω , ν – единичный вектор внешней нормали к Γ .

Уравнение (1) с учетом (2) представляет собой нелинейное уравнение в частных производных для определения давления. Оно является вырождающимся и имеет переменный тип. Действительно, в тех точках области течения, где $s_e = 0$ ($s = s_*$), то есть в сухой области, оператор $\psi \rightarrow \operatorname{div} q$ является вырождающимся, и,

следовательно, вырождается левая часть уравнения (1). В области $\{0 < s_e < 1\}$ неполного насыщения уравнение (1) относится к параболическому типу, в области $\{s_e = 1\}$ полного насыщения – к эллиптическому.

Отмеченные особенности модели, а также многообразие типов нелинейностей в определяющих соотношениях приводят к разнообразным проблемам при численном решении задачи. Как обычно, часть из этих проблем связана с качеством аппроксимации задачи конечномерной (системой сильно нелинейных алгебраических уравнений), часть – с методами решения конечномерной задачи. Говоря о численных методах, в дальнейшем будем иметь в виду класс неявных сеточных схем и итерационных методов их решения.

1. Известные подходы к построению численных методов решения задачи

Кратко опишем широко распространенные в практике вычислений подходы к аппроксимации уравнений (1), (2), отмечая их основные достоинства и недостатки.

Методы на основе ψ -формы уравнений. Исключая из системы (1), (2) переменную насыщенности, приходим к одному уравнению

$$\phi_s \frac{\partial \mathcal{S}(\psi)}{\partial t} - \operatorname{div} \mathcal{K}(\psi) K_0 (\nabla \psi + e) = Q, \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

где $\mathcal{S}(\psi) = S(\psi)$, $\mathcal{K}(\psi) = K(S(\psi))$, $\phi_s = \phi(s^* - s_*)$. Далее, на основе метода конечных разностей или метода конечных элементов это уравнение аппроксимируется и решается каким-либо итерационным методом (обычно методом Ньютона или его вариантами). По найденному ψ неизвестная s находится из уравнения (2). Для аппроксимации по времени наиболее часто используется неявный метод Эйлера и разностные схемы второго порядка точности, которые могут комбинироваться с соответствующими процедурами автоматического выбора шага интегрирования.

К несомненным достоинствам этого подхода, кроме сокращения числа неизвестных вдвое, следует отнести его универсальность: метод применим к насыщенно-ненасыщенным неоднородным средам произвольной структуры. Основным недостатком метода – плохая определенность поля ψ при наличии в области течения подобластей малой насыщенности (достаточно сухих зон). Поясним сказанное подробнее.

При наличии в среде достаточно сухих зон, где $s_e = 0$ или $s_e \approx 0$, решение задачи имеет ярко выраженный фронтовой характер, причем фронт тем круче, чем ближе функция S к ступенчатой. При этом на фронте $\psi \approx -\infty$, $|\nabla \psi| \approx \infty$, $\mathcal{K}(\psi) \nabla \psi \approx 0$. Таким образом, неизвестная ψ плохо определена в окрестности фронта: она меняется от $-\infty$ до конечных значений в малой окрестности фронта. Это свойство в большей степени является отрицательным для итерационных методов, требующих хорошего начального приближения, поскольку в этом случае решение в момент времени t является плохим приближением к решению при $t + \Delta t$. Например, при использовании итерационных методов типа Ньютона это приводит к достаточно сильному ограничению на шаг сетки по времени Δt . Кроме того, наличие сухих зон приводит к вырождению левой части уравнения (5) в этих зонах, что существенно ухудшает обусловленность сеточных уравнений и замедляет сходимость итерационных методов. Напротив, наличие в области течения зон полного насыщения не вызывает существенных трудностей при данном подходе.

Отметим следующий полезный вариант ψ -формы уравнения Ричардса:

$$\phi_s \frac{\partial \mathcal{S}(\psi)}{\partial t} - \operatorname{div} (K_0 \nabla \mathcal{Q}(\psi) + \mathcal{K}(\psi) K_0 e) = Q, \quad \mathcal{Q}(\psi) = \int_0^\psi K(S(\psi)) d\psi, \quad (6)$$

аппроксимация которой приводит к более простым по структуре сеточным уравнениям. Отметим также, что эта форма позволяет ввести новую неизвестную $u = \mathcal{Q}(\psi)$ – потенциал Кирхгофа, в терминах которой задача приобретает вид

$$\phi_s \frac{\partial \mathbf{S}(u)}{\partial t} - \operatorname{div}(K_0 \nabla u + \mathbf{K}(u) K_0 e) = Q,$$

где $\mathbf{S}(u) = \mathcal{S}(\mathcal{Q}^{-1}(u))$, $\mathbf{K}(u) = \mathcal{K}(\mathcal{Q}^{-1}(u))$, $\mathbf{S}'(u) \rightarrow +\infty$ при $u \rightarrow +0$. Новая неизвестная u является лучше определенной, чем ψ , а уравнение более не является вырождающимся по пространственным переменным. Трудности возникают в тех случаях, когда функция \mathbf{S} близка к ступенчатой. Основным недостатком преобразования Кирхгофа является то, что оно применимо только к однородным средам (в отличие от уравнений (5), (6)).

Методы на основе s-формы уравнений. Если исходные данные таковы, что зоны полного насыщения не реализуются, то есть $s_e(x, t) < 1$ при любых x, t , то в уравнениях (1), (2) можно исключить неизвестную ψ . Придем к уравнению

$$\phi_s \frac{\partial s_e}{\partial t} - \operatorname{div}(K_0 D(s_e) \nabla s_e + K(s_e) K_0 e) = Q, \quad D(s_e) = K(s_e) P'(s_e),$$

или

$$\phi_s \frac{\partial s_e}{\partial t} - \operatorname{div}(K_0 \nabla Q(s_e) + K(s_e) K_0 e) = Q, \quad Q(s_e) = \int_0^{s_e} D(s) ds, \quad (7)$$

где $\psi = P(s_e)$ – обратная функция к $s_e = S(\psi)$. Наличие сухих зон больше не является препятствием, поскольку уравнение вырождается только по пространственным переменным:

$$\text{при } s_e \rightarrow 0: \quad D(s_e) \sim s_e^\alpha, \quad \alpha = \begin{cases} 2 + 1/n, & \text{для BC,} \\ 0.5 + m, & \text{для VG.} \end{cases}$$

Однако возникают трудности при наличии в области течения зон, близких к полному насыщению, что проявляется в поведении функции диффузивности $D: D(s_e) \rightarrow +\infty$ при $s_e \rightarrow 1$. Основной недостаток данного подхода заключается в том, что он применим только к однородным ненасыщенным средам (для неоднородных сред функция s_e является разрывной на общих границах сред). При решении уравнения (7) также можно ввести преобразование Кирхгофа.

Методы на основе смешанной формы уравнений. Методы этого типа основаны на непосредственной аппроксимации уравнений (1), (2) с дальнейшим исключением одной из неизвестных на сеточном уровне на итерационном шаге. К новым схемам решения приходим в том случае, если такое исключение осуществлять динамически (в зависимости от состояния среды). Опишем один такой метод, ограничиваясь случаем однородной среды [4].

Уравнение (1) аппроксимируем неявным методом конечных разностей или конечных элементов. В каждом узле сетки x_l , $l = 1, \dots, n$, определены две неизвестные $s_l = s_e(x_l)$ и $\psi_l = \psi(x_l)$, но только одна из них независима. Какую неизвестную считать первичной, а какую – вторичной (то есть зависимой), определяется нашим желанием и обратимостью соотношения (2). Сеточную аппроксимацию в момент времени $t + \Delta t$ условно запишем в виде $A_l(s, \psi) = 0$, $l = 1, \dots, n$.

Обозначим первичную переменную в узле x_l через u_l . Тогда сеточные уравнения примут вид $A_l(u) \equiv A_l(s, \psi) = 0$, $l = 1, \dots, n$. Эти уравнения решаются при помощи метода Ньютона $J(u^k) \Delta u^{k+1} = -A(u^k)$, $\Delta u^{k+1} = u^{k+1} - u^k$, при

следующим определении первичных переменных на каждой итерации:

$$u_l^{k+1} = \begin{cases} s_l^{k+1}, & \text{если } s_l^k < s_a, \\ \psi_l^{k+1}, & \text{если } s_l^k > s_b, \\ u_l^k, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Последний случай означает, что принятый способ определения первичной переменной сохраняется таким же, как и на k -й итерации. Здесь $0 < s_a < s_b < 1$ – параметры метода (например, $s_a = 0.89$, $s_b = 0.99$). Способ вычисления матрицы Якоби $J(u^k)$ следующий: l -я строка $J(u^k)$ равна l -й строке матрицы $\partial A(s^k, \psi^k)/\partial s$, если u_l^{k+1} есть s переменная, иначе равна l -той строке матрицы $\partial A(s^k, \psi^k)/\partial \psi$.

Описанный выше метод первичных переменных сочетает в себе достоинства методов на основе s - и ψ -форм уравнения Ричардса и является быстро сходящимся. К недостаткам метода можно отнести сложность вычисления матрицы Якоби (например, при применении метода конечных элементов необходимо использовать узловую сборку этой матрицы вместо элементной), а также потерю точности решения в случае неоднородных сред (поле насыщенности приходится считать непрерывным, что снижает точность метода).

2. Новая неизвестная. Эквивалентная переформулировка задачи для однородной среды

Приведем новую формулировку исходной задачи (1), (2), которую в случае однородных сред можно рассматривать как непрерывный аналог описанного выше метода первичных переменных.

Ранее отмечалось, что в зоне малых насыщенностей, например, при $\psi < \psi_\sigma$, хорошо определена неизвестная s_e , а в зоне больших насыщенностей – неизвестная ψ . Поэтому естественно ввести новую неизвестную функцию

$$u = u(\psi) = \begin{cases} S(\psi), & \psi \leq \psi_\sigma, \\ S'(\psi_\sigma)(\psi - \psi_\sigma) + S(\psi_\sigma), & \psi > \psi_\sigma, \end{cases} \quad (8)$$

обратная к которой равна

$$\psi = \mathcal{P}(u) = \begin{cases} P(u), & u \leq S(\psi_\sigma), \\ (u - S(\psi_\sigma))/S'(\psi_\sigma) + \psi_\sigma, & u > S(\psi_\sigma). \end{cases} \quad (9)$$

По определению функция $u = u(x, t)$ является «смешанной» (составной) неизвестной: если $u(x, t) \leq s_\sigma$, $s_\sigma = S(\psi_\sigma)$, то $u(x, t)$ совпадает с эффективной насыщенностью $s_e(x, t)$, в противном случае – с «нормированным» давлением $S'(\psi_\sigma)(\psi - \psi_\sigma) + s_\sigma$. По известной u давление вычисляется по формуле (9), а насыщенность определяется по формуле $s_e = S(\psi)$.

Для аппроксимации Ван-Генухтена точку ψ_σ удобно выбрать как точку перегиба функции $S(\psi)$. В этом случае функции $u = u(\psi)$ и $\psi = \mathcal{P}(u)$ являются дважды непрерывно дифференцируемыми (иначе непрерывно-дифференцируемыми). Нетрудно подсчитать, что $s_\sigma = (1/(1+m))^m$. Для аппроксимации ВС можно взять $s_\sigma \in [0.8, 0.9]$.

Введем следующие функции переменной $u \in [0, \infty)$:

$$\mathcal{S}(u) = \begin{cases} u, & u \leq s_\sigma, \\ S((u - s_\sigma)/S'(\psi_\sigma) + \psi_\sigma), & u > s_\sigma, \end{cases}$$

$$\mathcal{K}(u) = K(\mathcal{S}(u)), \quad \mathcal{D}(u) = K(\mathcal{S}(u))\mathcal{P}'(u), \quad \mathcal{Q}(u) = \int_0^u \mathcal{D}(u) du.$$

Тогда исходные уравнения (1), (2) переписутся в виде системы

$$\begin{aligned} \phi_s \frac{\partial s_e}{\partial t} - \operatorname{div} (K_0 K(s_e) (\nabla \mathcal{P}(u) + e)) &= Q, \\ s_e &= \mathcal{S}(u) \end{aligned}$$

или уравнения

$$\phi_s \frac{\partial \mathcal{S}(u)}{\partial t} - \operatorname{div} (K_0 \mathcal{K}(u) (\nabla \mathcal{P}(u) + e)) = Q.$$

Последнее удобно записать в следующем виде:

$$\phi_s \frac{\partial \mathcal{S}(u)}{\partial t} - \operatorname{div} (K_0 \nabla \mathcal{Q}(u) + \mathcal{K}(u) K_0 e) = Q, \quad x \in \Omega. \quad (10)$$

Это уравнение дополняется краевыми и начальным условиями (см. (3), (4)):

$$\begin{aligned} u &= u_0 \equiv u(\psi_0), \quad x \in \Gamma_0, \quad -q \cdot \nu = q_0, \quad x \in \Gamma_1, \quad t > 0, \\ u &= u^0 \equiv u(\psi^0), \quad x \in \Omega, \quad t = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $q = -K_0(\nabla \mathcal{Q}(u) + \mathcal{K}(u)e)$.

Задача (10), (11) представляет собой искомую переформулировку исходной задачи в терминах смешанной переменной. Отметим, что в тех точках пористой среды, где $u \leq s_\sigma$, уравнение (10) совпадает с s -формой уравнения Ричардса, иначе с масштабированным уравнением в ψ -форме, соединяя тем самым в себе достоинства обеих формулировок. После решения задачи (10), (11) определяем решение исходной задачи по формулам

$$\psi = \mathcal{P}(u), \quad s_e = \mathcal{S}(u).$$

Отметим также формальное тождество уравнений (6) и (10). Поэтому для их аппроксимации и решения полученных сеточных уравнений могут использоваться одни и те же численные методы. Разница между этими уравнениями заключается в свойствах их коэффициентов и самой неизвестной, что существенно влияет на эффективность приближенных методов. Для сравнения графики коэффициентов \mathcal{S} , \mathcal{Q} , \mathcal{K} уравнений (6) и (10) для аппроксимации VG при $n = 10$ представлены на рис. 2. На оси абсцисс отмечены значения ψ_σ , s_σ и $u_a = s_\sigma - S'(\psi_\sigma)\psi_\sigma$, соответствующих точке $\psi = 0$.

Анализ приведенных функциональных зависимостей, а также графиков, позволяет сделать следующие выводы о различии уравнений (6) и (10) в случае ненасыщенной фильтрации.

1. Переменная ψ меняется в неограниченном интервале $(-\infty, \psi_a]$, u – в ограниченном $(0, u_a]$.

2. Уравнение (6) вырождается по всем коэффициентам в сухой зоне, уравнение (10) нет. Главное различие коэффициентов уравнений – в свойствах функций $\mathcal{S}(\psi)$ и $\mathcal{S}(u)$: $\mathcal{S}(u)$ линейна при малых u , тогда как $\mathcal{S}(\psi) \rightarrow 0$ при больших отрицательных ψ .

3. Функция $\mathcal{S}(\psi)$, в отличие от $\mathcal{S}(u)$, может быть близка к ступенчатой функции при определенных параметрах среды.

Отмеченные особенности уравнения (10), сочетающего в себе достоинства s - и ψ -форм уравнения Ричардса, делают его предпочтительным для численного решения и, соответственно, для моделирования насыщенно-ненасыщенных течений в пористых средах.

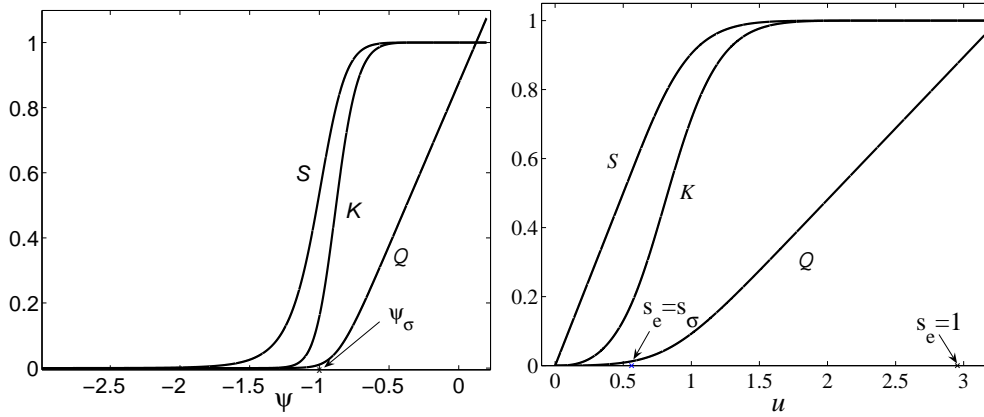


Рис. 2. Коэффициенты S , K , Q уравнения (6) (слева) и (10) (справа) для аппроксимации VG при $n = 10$, $\alpha = K_0 = \phi_s = 1$

3. Случай неоднородной среды. Вычисление коэффициентов уравнения

Описанная выше методика замены неизвестных непосредственно обобщается на случай кусочно неоднородных пористых сред.

Пусть известно разбиение области Ω на совокупность подобластей (сред) Ω_i таких, что параметры среды в них постоянны, кроме, возможно, функции K_0 . Пусть n_i , α_i – параметры VG или BC для i -й среды Ω_i ; $s_e = S_i(\psi)$, $\psi = P_i(s_e)$ – капиллярные зависимости, $K_i(s_e)$ – относительная проводимость i -й среды, определяемые по n_i и α_i согласно аппроксимациям VG или BC. Обозначим

$$n = n_k = \min_i n_i, \quad \alpha = \alpha_k.$$

Неизвестную u определим по формулам (8), (9) для параметров k -й среды, положим

$$\psi = \mathcal{P}_k(u) \equiv \begin{cases} P_k(u), & u \leq s_\sigma^k, \\ (u - s_\sigma^k)/S'_k(\psi_\sigma^k) + \psi_\sigma^k, & u > s_\sigma^k. \end{cases}$$

Определим также функции

$$\begin{aligned} S_i(u) &= S_i(\mathcal{P}_k(u)), \quad \mathcal{K}_i(u) = K_i(\mathcal{S}_k(u)), \\ \mathcal{D}_i(u) &= \mathcal{K}_i(u)\mathcal{P}'_k(u), \quad \mathcal{Q}_i(u) = \int_0^u \mathcal{D}_i(u) du. \end{aligned}$$

В новых переменных задача по-прежнему примет вид уравнений (10), (11), в которых теперь функции S , Q , K равны S_i , Q_i , K_i в i -й области Ω_i , $\phi_s|_{\Omega_i} = \phi_i(s_i^* - s_{*,i})$. Несложный анализ функции $S(u)$ показывает, что уравнение (10) остается вырождающимся в тех подобластях Ω_i , для которых $n_i \neq n$. Например, если $S(\psi) \sim (-\psi)^{-n_i}$ при $\psi \rightarrow -\infty$ в Ω_i , то $S(u) \sim u^{n_i/n}$ при малых u в Ω_i . Таким образом, степень вырождения уравнения (10) по сравнению с (6) по порядку в n раз меньше.

Функции S , K , Q достаточно сложно определяются и требуют немалого числа арифметических операций для вычисления. Особенно это касается функции Q . Сделаем практическое замечание, касающееся способа вычисления как самих этих

функций, так и их производных. Учитывая, что нетривиальное изменение функций имеет место лишь на небольшом отрезке $[0, u_a]$, $u_a = O(1)$, то естественно перейти на этом отрезке от функций \mathcal{S} , \mathcal{K} , \mathcal{Q} к их представлениям сплайнами. Далее, мы используем непрерывную кусочно-линейную интерполяцию на равномерной сетке с шагом $h_u = u_a/(n_u - 1)$. Для полноты изложения приведем следующий хорошо известный алгоритм.

1. В узлах $u_i = (i-1)h_u$ вычисляем значения $\mathcal{S}(u_i)$, $\mathcal{K}(u_i)$, $\mathcal{D}(u_i)$, $i = 1, \dots, n_u$, для каждой зоны Ω_k . Для каждой зоны также вычисляем значения $\mathcal{Q}(u_i) = \mathcal{Q}(u_{i-1}) + 0.5(\mathcal{D}(u_{i-1}) + \mathcal{D}(u_i))h_u$, $i = 2, \dots, n_u$, $\mathcal{Q}(u_1) = 0$. Это приближения интеграла по формуле трапеций.

Пусть теперь f означает любую из функций \mathcal{S} , \mathcal{K} или \mathcal{Q} .

2. Вычисляем $df(u_i) = (f(u_{i+1}) - f(u_i))/h_u$, $i = 1, \dots, n_u - 1$.

Все эти вычисления проводятся один раз до начала решения задачи.

3. Для вычисления $f(u)$ и $f'(u)$ используем следующие операции:

- найдем отрезок $[u_i, u_{i+1}]$, содержащий точку u : $i = \text{floor}(u/h_u + 1)$;
- если $u \leq u_a$ положим $f(u) = f(u_i) + df(u_i)(u - u_i)$, $f'(u) = df(u_i)$;

Вне интервала $[0, u_a]$ функции \mathcal{S} и \mathcal{K} постоянны и равны единице, а функция \mathcal{Q} линейна. Этот метод за минимум арифметических операций обеспечивает точность вычисления функций \mathcal{S} , \mathcal{Q} , \mathcal{K} порядка $10^{-6} \div 10^{-8}$ при n_u порядка $10^3 \div 10^4$. Этого вполне достаточно для практических целей, если учесть, что параметры среды известны также приближенно.

4. Аппроксимация задачи в новых переменных

Пусть $[0, T]$ – интервал изменения переменной t . Введем на нем неравномерную сетку узлов $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$ с шагами $\tau_j = t_j - t_{j-1}$. Для аппроксимации по времени задачи (10), (11) используем неявную схему Эйлера

$$\phi_s \frac{\mathcal{S}(u) - \mathcal{S}(\tilde{u})}{\tau} - \text{div} (K_0 \nabla \mathcal{Q}(u) + \mathcal{K}(u) K_0 e) = Q,$$

$$u = u_0, \quad x \in \Gamma_0, \quad -q \cdot \nu = q_0, \quad x \in \Gamma_1.$$

Здесь все функции вычисляются в текущий момент времени $t = t_j$, кроме $\tilde{u} = u(x, t_{j-1})$, $\tau = \tau_j$, $j = 1, \dots, M$. В начальный момент времени решение известно: $u|_{t=0} = u^0$. Для аппроксимации этой эллиптической краевой задачи используем метод конечных элементов на основе линейных треугольных или билинейных четырехугольных изопараметрических конечных элементов. В дополнение к стандартному методу используем две дополнительные аппроксимации, которые не понижают теоретической точности метода.

1. Аппроксимируем функции \mathcal{S} , \mathcal{Q} , \mathcal{K} в слабой формулировке задачи так же, как и u . Точнее, пусть u_i – значение функции u в узле сетки x_i , $\varphi_i(x)$ – базисная функция, соответствующая этому узлу, $i = 1, \dots, N$. Тогда аппроксимации u и \mathcal{S} определяются как

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i, \quad \mathcal{S}_h(u_h) = \sum_{i=1}^N \mathcal{S}(u_i) \varphi_i.$$

Аналогично определяются $\mathcal{K}_h(u_h)$ и $\mathcal{Q}_h(u_h)$.

2. Для вычисления интегралов по произвольному конечному элементу e используем квадратурную формулу, узлы которой совпадают с вершинами элемента.

Тогда

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \sum_e \int_e f(x) dx \approx \sum_e \frac{1}{m_e} \sum_{i=1}^{m_e} |e| f(x_i^e) \equiv S_{\Omega}(f).$$

Здесь $|e|$ – площадь e ; x_i^e , $i = 1, \dots, m_e$ – координаты вершин элемента e ($m_e = 3$ или $m_e = 4$). Эта квадратура позволяет диагонализировать матрицу масс. Аналогично для вычисления интеграла по границе Γ_1 используем составную формулу трапеций S_{Γ_1} .

Искомая дискретная задача определяется тождеством:

$$\begin{aligned} S_{\Omega}(\phi_s(S_h(u_h) - S_h(\tilde{u}_h))/\tau + (K_0 \nabla \mathcal{Q}_h(u_h) + \mathcal{K}_h(u_h) K_0 e) \cdot \nabla v_h) = \\ = S_{\Omega}(Qv_h) + S_{\Gamma_1}(q_0 v_h), \end{aligned}$$

где пробная функция v_h предполагается равной нулю на Γ_0 .

Использование указанных аппроксимаций функций \mathcal{S} , \mathcal{Q} , \mathcal{K} позволяет существенно упростить как вычисление невязки сеточного уравнения (R), так и его матрицы Якоби (J). Например, в случае однородной среды имеем (посредством элементной сборки):

$$\begin{aligned} R(u) &\equiv D(\mathcal{S}(u) - \mathcal{S}(\tilde{u})) + A\mathcal{Q}(u) + C\mathcal{K}(u) - F = 0, \\ J(u) &\equiv D\mathcal{S}'(u) + A\mathcal{Q}'(u) + C\mathcal{K}'(u). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $u = (u_1, \dots, u_N)^T$ – вектор узловых параметров; $f(u) = (f(u_1), \dots, f(u_N))^T$, $f'(u) = \text{diag}(f'(u_1), \dots, f'(u_N))$ – диагональная матрица, $f = \mathcal{S}$, \mathcal{Q} , \mathcal{K} ; диагональная матрица D и матрицы A , C являются конечно-элементными аппроксимациями (с численным интегрированием) соответственно линейных операторов

$$\frac{\phi_s}{\tau}(\cdot), \quad -\text{div}(K_0 \nabla(\cdot)), \quad -\text{div}(K_0 e(\cdot)).$$

В случае неоднородной среды считаем, что разбиение на элементы согласовано с границами подобластей, а конечный элемент полностью относится к одной подобласти. Используется также элементная сборка R и J . Укажем, например, способ вычисления матрицы $A\mathcal{Q}'(u)$ (слагаемое в $J(u)$). Остальные составляющие $R(u)$ и $J(u)$ вычисляются аналогично. Пусть e – произвольный конечный элемент, $u_1^e, u_2^e, \dots, u_{m_e}^e$ – его узловые параметры (то есть компоненты u , относящиеся к вершинам e), A^e – матрица жесткости элемента e , соответствующая линейному оператору $-\text{div}(K_0 \nabla(\cdot))$, $\mathcal{Q}'(u^e) = \text{diag}(\mathcal{Q}'(u_1^e), \dots, \mathcal{Q}'(u_{m_e}^e))$. Тогда $A\mathcal{Q}'(u)$ получается стандартной процедурой суммирования локальных матриц $A^e \mathcal{Q}'(u^e)$. Отметим, что это совсем дешевая процедура на итерациях, если хранить постоянные матрицы A^e для всех конечных элементов.

5. Решение сеточных уравнений. Управление шагом интегрирования

Хорошо известно, что эффективность метода Ньютона при решении нестационарных сеточных задач критическим образом зависит от выбора шагов интегрирования по времени. Если шаг интегрирования τ велик, то метод Ньютона либо не сходится, либо сходится медленно. Напротив, если шаг τ мал, то достаточно выполнить лишь одну итерацию. Известны различные стратегии автоматического выбора шага, целью которых является достижение максимальной эффективности и точности всего процесса интегрирования. При решении тестовых задач мы использовали алгоритм из [3], хорошо зарекомендовавший себя при моделировании

течений в пористых средах [4, 5]. Этот метод использует единственный параметр δ – допустимую ошибку дискретизации по времени как для контроля сходимости метода Ньютона, так и выбора τ . Решение на слое по времени получается в результате одной итерации по методу Ньютона, начальное приближение выбирается линейной экстраполяцией с двух предыдущих временных слоев. Дадим описание алгоритма.

В каждый момент времени вычисляется решение u и вектор \dot{u} .

0. *Начальный шаг.* При $t = 0$ вектор \dot{u} находится как решение при $u = u^0$ сеточного аналога задачи

$$\begin{aligned} \phi_s \mathcal{S}'(u) \dot{u} &= \operatorname{div} (K_0 \nabla \mathcal{Q}(u) + \mathcal{K}(u) K_0 e) + Q, \\ \dot{u} &= 0, \quad x \in \Gamma_0, \quad q \cdot \nu = q_0, \quad x \in \Gamma_1. \end{aligned}$$

Первый шаг по времени выполняется с достаточно малым заданным шагом τ_1 .

Пусть при $t = t_{j-1}$ решение \tilde{u} , $\dot{\tilde{u}}$ и $\tau = \tau_j$ известны и задан параметр погрешности δ . Для определения решения u при $t = t_j$ выполняются следующие шаги:

1. *Шаг (предиктор).* Определяем $u^p = \tilde{u} + \tau \dot{\tilde{u}}$;
2. *Шаг (корректор).* Делаем один шаг по методу Ньютона с начальным приближением u^p и находим u , норму поправки $d = 0.25 \|u - u^p\|_2 / \|u\|_\infty$, а также $\dot{u} = (u - \tilde{u}) / \tau$. Здесь

$$\|u\|_2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i^2 \right)^{1/2}, \quad \|u\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |u_i|.$$

3. *Выбор шага интегрирования.* Полагаем $\tau_p = \tau(\delta/d)^{0.5}$. Если $\tau_p \geq \tau$, то шаг интегрирования считается выбранным успешно и полагается $\tau_{j+1} = \min\{\tau_{\max}, \theta\tau, \tau_p\}$, $\theta = 2, 3$. Если $\zeta\tau \leq \tau_p \leq \tau$ ($\zeta \in [0.8, 0.9]$), то решение u также принимается, но шаг интегрирования не меняется, то есть полагается $\tau_{j+1} = \tau$. В противном случае, шаг интегрирования считается выбранным неудачно и вычисления повторяются с сокращенным шагом $\tau = \max\{\tau_{\min}, \tau^2 \delta / (d\tau_p)\}$.

Для решения несимметричной разреженной системы линейных алгебраических уравнений (12) на итерации Ньютона

$$J(u^p)(u - u^p) = -R(u^p)$$

нами использовался итерационный метод BiCGstab [6] с неполным модифицированным LU -разложением матрицы в качестве предобуславливателя (MILU(0)) [7]. Выход из итераций осуществлялся при выполнении условия

$$\frac{\text{норма невязки}}{\text{норма правой части}} \leq 10^{-6}.$$

Отметим, что при отсутствии сил гравитации ($e = 0$) система (12) сводится к задаче с симметричной матрицей после введения новой неизвестной $\Delta = \mathcal{Q}'(u^p)(u - u^p)$. В этом случае вместо BiCGstab достаточно использовать метод сопряженных градиентов.

Указанный выбор стратегии управления шагом и метода BiCGstab+MILU(0) объясняется как их достаточной эффективностью, так и желанием сопоставить результаты наших тестовых расчетов и аналогичных результатов из работы [4], в которой использовались те же компоненты. Как отмечалось во введении, схема в [4] строилась на основе аппроксимации методом МКЭ уравнений (1), (2) и динамическом исключении одной из неизвестных на шаге метода Ньютона.

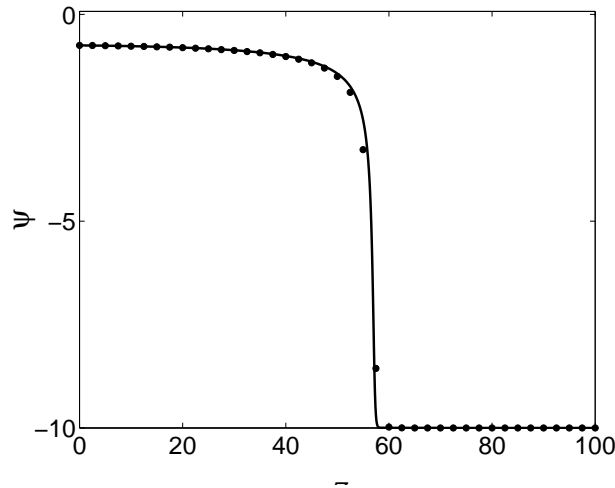


Рис. 3. Решение задачи при $t = 1$ день на разных сетках ($n_z = 41$ и $n_z = 201$)

6. Результаты вычислений

Приведем результаты расчетов четырех тестовых задач (IBM PC, 2.2 GHz, C++) из [4], сопоставляя результаты вычислений там, где это возможно. Данные из [4] будем указывать в фигурных скобках.

Во всех вычислениях полагалось $s^* = 1$, $\theta = 2$, $\zeta = 0.85$, $\delta = 10^{-4}$. Схема МКЭ строилась на основе билинейных конечных элементов на ортогональной сетке из $n_x \times n_z$ узлов (линейных элементов на равномерной сетке из n_z узлов в одномерном случае). В каждой зоне однородности среды сетка выбиралась равномерной по каждому направлению с числом узлов, пропорциональным размеру зоны в данном направлении.

1. Однородная одномерная задача. Рассматривается изначально достаточно сухая одномерная колонна длины $L = 1$ м при следующих параметрах VG:

$$n = 2, \alpha = 3.35 \text{ м}^{-1}, \phi = 0.368, s_* = 0.277,$$

$$K_0 = 0.922 \cdot 10^{-4} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}, \psi|_{z=0} = -0.75 \text{ м}, \psi|_{z=L} = -10 \text{ м}, \psi^0 = -10 \text{ м}.$$

Мы выбрали, как и в [4], $\tau_1 = 1$ с, время вычислений $T = 1$ сут и различное число точек сетки n_z по длине колонны. Число шагов по времени на сетках из $n_z = 41, 201\{201\}, 1001$ точек оказалось равным 251, 468{437}, 624, число итераций Ньютона – 275, 485{443}, 626. Соответственно, число неудачных шагов было равно 24, 17{6}, 2. Среднее число итераций BiCGstab на слой по времени составило 4.8, 5.0, 8.3 итераций.

В данной задаче $\|u\|_\infty = 0.37$, тогда как $s_\sigma = 0.82$. Поэтому переменная u всюду совпадает с s_e , и метод фактически равносителен аналогичному методу решения задачи в s -форме. Это оказывается справедливым и для метода из [4]. На рис. 3 приведены графики поля давления. Решение при $n_z = 1001$ и $n_z = 201$ совпадают с графической точностью. Можно отметить хорошую точность решения на грубых сетках. В данном случае метод из [4] оказался на 10% экономичнее по числу итераций Ньютона. Возможно, это объясняется тем, что в [4] использовался метод прогонки для решения системы. Тем не менее, как нам представляется, экономичность реализации шага Ньютона в целом компенсирует эти потери.

Табл. 1

Параметры пористой среды для задачи 2

среда	K_0 [м/с]	ϕ [1]	s_* [1]	α [1/м]	n [1]
песок	$6.262 \cdot 10^{-5}$	0.3658	0.07818	2.80	2.2390
глина	$1.516 \cdot 10^{-6}$	0.4686	0.2262	1.04	1.3954

Табл. 2

Параметры пористой среды для задачи 3 и 4

зона	K_0 [м/с]	ϕ [1]	s_* [1]	α [1/м]	n [1]
1	$9.153 \cdot 10^{-5}$	0.3680	0.2771	3.34	1.982
2	$5.445 \cdot 10^{-5}$	0.3510	0.2806	3.63	1.632
3	$4.805 \cdot 10^{-5}$	0.3250	0.2643	3.45	1.573
4	$4.805 \cdot 10^{-4}$	0.3250	0.2643	3.45	1.573

2. Рассмотрим задачу, в которой реализуется весь диапазон насыщенности. Геометрия задачи определена на рис. 4, параметры неоднородной пористой среды приведены в табл. 1. Граница области непроницаема, кроме участка, на которой задан достаточно большой поток $q_0 = 0.5$ м/сут.

Задача решалась с учетом симметрии на половине области, время расчета $T = 1$ сут. Было выбрано $\tau_{\max} = 1200$ с, $\tau_1 = 10\{0.9\}$ с. Начальная насыщенность очень мала: $\psi^0 = -500$ м. В момент времени $t = T$ в средней части области течения образуется область полного насыщения. Приведем результаты вычислений на двух сетках.

На сетке из 51×61 $\{51 \times 61\}$ (121×121) узлов для интегрирования по времени потребовалось 526 $\{1211\}$ (775) шагов, при этом 41 $\{345\}$ (54) шагов были отвергнуты. Средний шаг по времени составил 164 (111) с, дисбаланс массы жидкости оказался равным 0.04 $\{O(10^{-2})\}$ $(0.05)\%$. Среднее число итераций BiCGstab на слой по времени составило 5.4 (11.0) итерации. Вычисления потребовали 16 с $(4$ мин 17 с) процессорного времени. Изолинии насыщенности изображены на рис. 6.

В данном расчете наш метод неожиданно оказался существенно экономичнее.

3. Приведем результаты решения другой задачи, область течения которой представлена на рис. 5, а параметры неоднородной пористой среды – в табл. 2. Граница области непроницаема, кроме участка, на которой задан слабый поток $q_0 = 0.02$ м/сут. Параметр нелинейности n слабо меняется в области.

Время расчета $T = 30$ сут, $\tau_{\max} = 20$ мин, $\tau_1 = 10\{86\}$ с. Начальная насыщенность достаточно мала: $\psi^0 = -100$ м. Приведем результаты вычислений на двух сетках.

На сетке из 93×22 $\{90 \times 21\}$ (120×120) узлов для интегрирования по времени потребовалось 263 $\{279\}$ (521) шагов, при этом 1 $\{0\}$ (28) шаг был отвергнут. Средний шаг по времени составил 0.11 (0.058) сут, дисбаланс массы жидкости оказался равным 0.002 $\{O(10^{-3})\}$ $(0.005)\%$. Среднее число итераций BiCGstab на слой по времени составило 3.3 (4.5) итерации. Вычисления потребовали 4 с $(87$ с) процессорного времени. Изолинии насыщенности изображены на рис. 6.

В данном тесте, как и в предыдущем, поле насыщенности терпит разрыв на границах зон. Из анализа рис. 6. можно сделать вывод о хорошей сходимости схемы по шагу пространственной сетки. Для данной задачи оба метода показали примерно одинаковые результаты по числу итераций Ньютона.

4. Рассмотрим предыдущую задачу, но с одним изменением: показатель n в зонах 3 и 4 равен 5. Это приводит к достаточно сильному изменению n в области

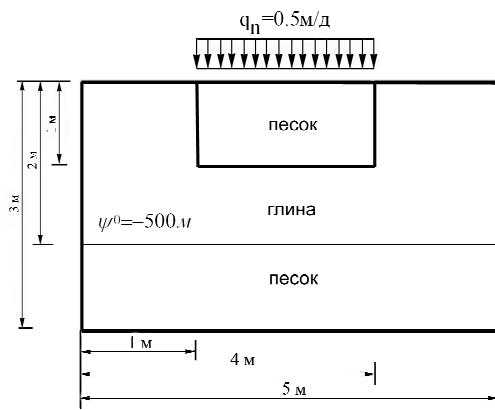


Рис. 4. Область течения в задаче 2

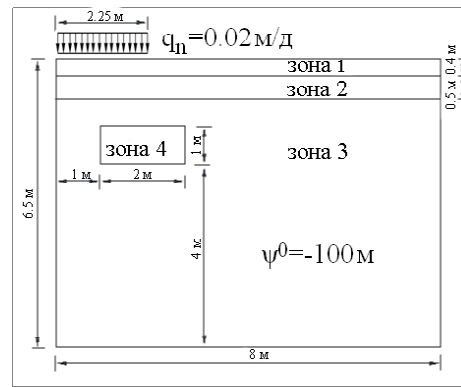
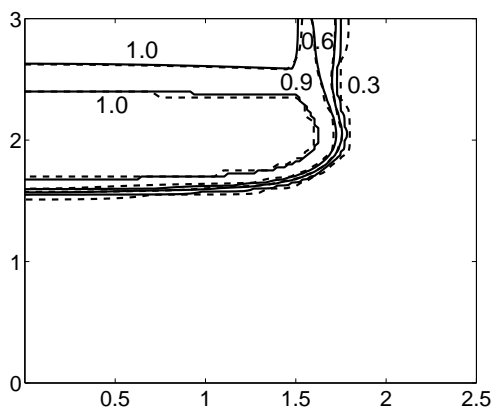
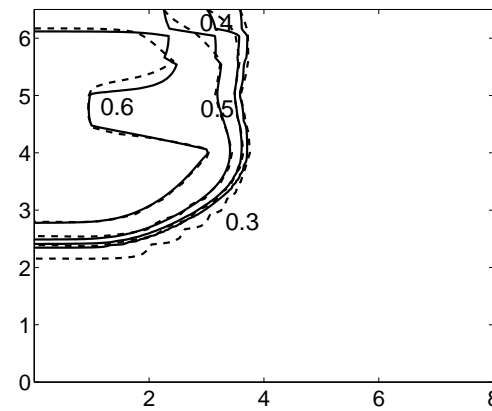


Рис. 5. Область течения в задачах 3, 4

Рис. 6. Изолинии насыщенности при $t = 1$ сут на разных сетках (51×61 – точки, 121×121 – сплошные)Рис. 7. Изолинии насыщенности. Точки – сетка из 90×21 узлов, сплошная – сетка из 120×120 узлов

течения. Как следствие, в момент времени $t = 30$ сут в нижней части области образуется «язык» зоны полного насыщения.

Для интегрирования по времени на сетке из 93×22 { 90×21 } 120×120 узлов потребовалось 2191 {1202} 2647 шагов, при этом 0 {13} 30 шагов были отвергнуты. Средний шаг по времени составил 1183–1065 с, дисбаланс массы жидкости оказался равным 0.02 { $O(10^{-3})$ } 0.03%, среднее число итераций BiCGstab на слой по времени составило 2.4 (3.8) итерации. Вычисления потребовали 34 с (6 мин 56 с) процессорного времени. Изолинии насыщенности представлены на рис. 8. В данном тесте наш метод потребовал на 80% больше итераций Ньютона, чем метод из [4]. Мы объясняем это достаточно большим перепадом показателя n в зонах.

Заключение

В данной работе был представлен новый метод решения задачи насыщенно-ненасыщенной фильтрации. Он основан на новой форме определяющих уравнений и методе конечных элементов с численным интегрированием. Уравнения записываются в терминах смешанной переменной, которая для однородных сред совпадает с насыщенностью в одних зонах и с «нормированным» давлением – в других.

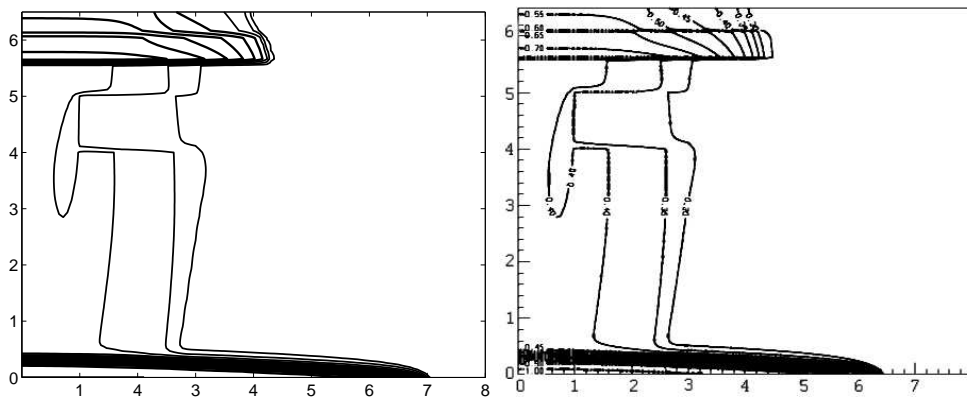


Рис. 8. Линии равной насыщенности при $T = 30$ сут. Слева – наши вычисления ($120 \times 120 = 14400$ узлов сетки), справа – из [4] (28917 узлов сетки)

Возникающие после дискретизации сеточные уравнения допускают экономичную реализацию. Результаты проведенных тестовых вычислений показали, что метод эффективен для однородных сред и пригоден для моделирования течений в неоднородных пористых средах во всем диапазоне насыщенностей.

Авторы выражают благодарность А.Г. Егорову и М.Ф. Павловой за плодотворные дискуссии, способствовавшие появлению работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 07-07-00183).

Summary

A.A. Akhtareev, R.Z. Dautov. Mixed variable technique for simulating unsaturated-saturated flows.

Mixed variable technique for simulating unsaturated-saturated flows is proposed. It based on a new form of governing equation in term of mixed variable and finite elements method with numerical integration. For homogeneous medium new variable coincides with saturation in one regions and with “normalized” pressure head otherwise. Efficient algorithm for solving discrete problem is proposed. Computational accuracy and robustness of the method are demonstrated by solving four test problems.

Список литературы

1. *Brooks R.H., Corey A.T.* Properties of porous media affecting fluid flow // J. Irrig. Drain. Div. Am. Soc. Civil Eng. – 1966. – V. 92. – P. 61–88.
2. *Van Genuchten M.T.* A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils // Soil Sci. Soc. Am. J. – 1980. – V. 44. – P. 892–898.
3. *Bixler N.E.* An improved time integrator for finite element analysis // Comm. Appl. Num. Meths. – 1989. – V. 5. – P. 69–78.
4. *Diersch H.-J.G., Perrochet P.* On the primary variable switching technique for simulating unsaturated-saturated flows // Adv. Water Res. 1999. – No 23. – P. 271–301.
5. *Diersch H.-J.* Finite element modelling of recirculating density driven saltwater intrusion processes in groundwater // Adv. Water Res. – 1988. – No 11. – P. 25–43.

6. *Van der Vorst H.A.* Bi-CGSTAB: A fast and smoothly convergent variant of BiCG for the solution of nonsymmetric linear systems // SIAM J. Sci. Stat. Comp. – 1992. – No 13. – P. 631–644.
7. *Meijerink J., Van der Vorst H.A.* Guidelines for the usage of incomplete decompositions in solving sets of linear equations as they occur in practical problems // J. Comput. Phys. – 1981. – No 44. – P. 134–155.

Поступила в редакцию
16.10.07

Ахтареев Айдар А. – младший научный сотрудник НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

Даутов Рафаил Замилович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета.

E-mail: *E-mail Rafail.Dautov@ksu.ru*