УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 153, кн. 4 Физико-математические науки *2011*

УДК 519.6

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

М.Г. Хасанов

Аннотация

Рассматриваются конечно-разностные аппроксимации задачи оптимального управления правой частью линейного эллиптического уравнения при наличии ограничений на функцию состояния системы. Строятся итерационные методы для решения сеточной задачи. Приводятся теоремы об их сходимости. На основе вычислительных экспериментов производится оценка эффективности этих методов.

Ключевые слова: оптимальное управление, седловая задача с ограничениями, итерационные методы.

Введение

Конечно-элементные и конечно-разностные аппроксимации задач оптимального управления в правой части линейного эллиптического уравнения или граничного условия приводят к конечномерным седловым задачам большой размерности с ограничениями. Эти задачи возникают при использовании функции Лагранжа. При наличии ограничений лишь на вектор состояния y седловая задача преобразуется к включению с многозначным оператором относительно y или относительно λ. Для решения этих включений можно использовать различные итерационные методы. Сходимость ряда таких методов обоснована в работе [1]. Однако теоретические оценки скорости сходимости либо отсутствуют, либо не дают точной информации об эффективности метода. Основная цель настоящей статьи – это построение и сравнительный анализ эффективности итерационных методов решения сеточной аппроксимации одной задачи оптимального управления.

Решению задач оптимального управления посвящена обширная литература. Метод решения задач оптимального управления с ограничениями на управление с применением стратегии активного множества прямых и двойственных переменных был рассмотрен в работе [2]. Отметим, что в [3] предложен предобусловленный метод Удзавы, который является эффективным для таких задач. В работе [4] предложен метод расширенного лагранжиана для решения задач оптимального управления с ограничениями как на состояние, так и на управление. Итерационные методы для решения седловых задач с ограничениями большой размерности предложены в [5].

В настоящей работе численно решена модельная сеточная задача – конечно-разностная аппроксимация на равномерной прямоугольной сетке задачи управления в правой части уравнения Пуассона с простыми ограничениями на вектор состояния. Построены итерационные методы для соответствующих включений относительно векторов u, y и λ. Приведены известные результаты о сходимости итерационных методов и оценки скорости сходимости. Предложен новый итерационный метод – двухступенчатый метод решения включения относительно y с предобусловливателем L и неполным обращением оператора $\dfrac{1}{\tau}L + \partial\theta$, где $\partial\theta$ – субдифференциал индикаторной функции ограничений на y, τ – параметр метода.

На основе анализа результатов численных экспериментов проведен сравнительный анализ методов и сделан вывод о наибольшей эффективности данного метода.

1. Постановка и аппроксимация задачи оптимального управления

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим однородную задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$-\Delta y = f + u, \quad x \in \Omega, \quad y(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{1}$$

где f – заданная функция, u – функция управления. Обобщенная постановка этой задачи определяется с помощью интегрального тождества

$$y \in V : \int\limits_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla z \, dx = \int\limits_{\Omega} (f + u) z \, dx \quad \forall z \in V. \tag{2}$$

Здесь $V = H_0^1(\Omega)$ – пространство Соболева функций, имеющих обобщенные первые производные из $L_2(\Omega)$ и равных нулю на границе области, со скалярным произведением $(y, z) = \int\limits_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla z \, dx$ и нормой $\|y\| = (y, y)^{1/2}$. Задача (2) однозначно разрешима при любой правой части $f + u \in L_2(\Omega)$ и справедливо неравенство устойчивости

$$\|y\|_V \leq k \|f + u\|_{L_2(\Omega)}, \quad k = \text{const}. \tag{3}$$

Зададим множество ограничений

$$Y_{ad} = \{y \in V : y(x) \leq 0.5 \quad \forall x \in \Omega\}$$

и целевой функционал

$$J(y, u) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} (y - y_d)^2 \, dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} u^2 \, dx,$$

где $y_d \in L_2(\Omega)$ – заданная функция.

Теорема 1. *Задача оптимального управления*

$$\begin{gathered} \min_{(y,u) \in K} J(y, u), \\ K = \{(y, u) : y \in Y_{ad}, u \in L^2(\Omega) \text{ и выполнено } (2)\}, \end{gathered} \tag{4}$$

имеет единственное решение.

Доказательство. Множество K выпукло и замкнуто в $H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ в силу выпуклости и замкнутости Y_{ad} и линейности уравнения состояния (2). Таким образом, K слабо замкнуто в $H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$. Функционал $J(y, u)$ коэрцитивен по u равномерно по y: $J(y, u) \geq \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} u^2 \, dx$ для каждого $y \in H_0^1(\Omega)$, поэтому $\lim\limits_{||u|| \to \infty} J(y, u) \to \infty$ равномерно относительно y. Пусть $\{y_n, u_n\} \in K$ – минимизирующая последовательность: $J(y_n, u_n) \to J_0 = \inf\limits_{(y,u) \in K} J(y, u)$. Из условия коэрцитивности $J(y, u)$ следует, что $\|u_n\| \leqslant C$ для каждого n. Далее, так как для решения y уравнения (2) справедливо (3), то $\|y_n\| \leqslant C$ для каждого n. Из ограниченной последовательности $\{y_n, u_n\}$ можно выбрать слабо сходящуюся к некоторой паре

y, u подпоследовательность, сохраним за ней обозначение $\{y_n, u_n\}$. В силу непрерывности интегральных операторов в (2) множество K слабо замкнуто, поэтому $\{y, u\} \in K$. Функционал J слабо полунепрерывен снизу на $H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$, поэтому

$$J_0 = \liminf_{n\to\infty} J(y_n, u_n) \geqslant J(y, u),$$

а значит, пара (y, u) является решением задачи оптимального управления (4). □

Рассмотрим конечно-разностную аппроксимацию задачи (2) в случае квадратной области $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. Аппроксимируем краевую задачу (1) конечно-разностной схемой на равномерной сетке с шагом h: $\omega = \{x_{ij} = (ih, jh),\ 0 \le i \le n+1,\ 0 \le j \le n+1\}$. При аппроксимации целевого функционала будем использовать составную квадратурную формулу трапеций. В результате получим конечномерную задачу:

найти минимум функции $J(y,u) = \dfrac{1}{2}||y - y_d||^2 + \dfrac{1}{2}||u||^2$
при ограничениях

$$\frac{1}{h^2}(-y_{i-1j} - y_{i+1j} + 4y_{ij} - y_{ij+1} - y_{ij-1}) = f_{ij} + u_{ij}, \quad i,j = 1,2,\ldots,n,$$
$$y_{0j} = y_{j0} = y_{jn+1} = y_{n+1j} = 0,$$
$$y_{ij} \le 0.5, \quad i,j = 1,2,\ldots,n.$$

Выше использованы обозначения $\|v\|^2 = h^2 \sum\limits_{i,j=1}^{n} v_{ij}^2$, L – матрица сеточного оператора Лапласа с граничными условиями Дирихле, E – единичная матрица, θ – индикаторная функция множества ограничений на y:

$$\theta(y) = \begin{cases} 0, & y_{ij} < 0.5, \\ +\infty, & y_{ij} \ge 0.5. \end{cases}$$

Тогда сеточная задача оптимального управления примет следующий вид:

$$\begin{gathered} \min_{(y,u)\in K_h} J(y,u), \\ K_h = \{(y,u) :\ y_i \le 0.5,\ Ly = f + u\}. \end{gathered} \tag{5}$$

Функция Лагранжа для (5) имеет вид

$$\mathcal{L}(y,u,\lambda) = \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2 + \theta(y) + \frac{1}{2}\|u\|^2 + (\lambda, Ly - u - f), \tag{6}$$

и ее седловая точка (y, u, λ) – решение следующей седловой задачи, которая эквивалентна конечномерной задаче управления [1, с. 81–82]:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & L \\ 0 & E & -E \\ L & -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \\ \lambda \end{pmatrix}) + \begin{pmatrix} \partial\theta(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} y_d \\ 0 \\ f \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Здесь

$$\partial\theta(y) = \{\partial\theta(y)_i, i = 1\ldots n^2\} = \begin{cases} [0, +\infty), & y_i = 0.5, \\ 0, & y_i < 0.5, \end{cases}$$

$\partial\theta$ – субдифференциал функции θ – многозначный монотонный оператор. Напомним, что его резольвента $(E+\partial\theta)^{-1}$ – однозначный липшиц-непрерывный оператор. Задача (7) имеет единственное решение [3].

Исключив векторы y и u из системы (7), получим уравнение для λ:

$$-L(E+\partial\theta)^{-1}(-L\lambda+y_d)+\lambda=-f. \tag{8}$$

Если теперь исключить векторы λ и u из системы (7), то мы придем к включению относительно y:

$$L^2y+y+\partial\theta(y)\ni Lf+y_d. \tag{9}$$

Заменив недифференциируемую функцию θ регуляризированной дифференциируемой функцией

$$\theta_\varepsilon=\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}((y_i-0.5)^+)^2, \tag{10}$$

исключим векторы λ и y из (7) и получим следующее уравнение для u:

$$L^{-1}(E+\nabla\theta_\varepsilon)(L^{-1}(f+u))+u=L^{-1}y_d. \tag{11}$$

Решив одну из приведенных задач (8), (9), (11) относительно λ, y, u соответственно, мы можем определить остальные векторы из соответствующих уравнений системы (7).

2. Итерационные методы решения конечномерной задачи оптимального управления

В данном разделе рассмотрены итерационные методы решения седловой задачи (??) и ее регуляризированного варианта. Приведены формулировки методов, результаты о сходимости и скорости сходимости (при их наличии), а также алгоритмы их реализации. Наряду с известными и ранее используемыми итерационными методами предложен новый алгоритм, основанный на двухступенчатой реализации одношагового итерационного метода для вариационного неравенства с матрицей L^2+E.

2.1. Предобусловленный метод Удзавы. Для решения (8) рассмотрим предобусловленный метод простой итерации:

$$L^2\frac{\lambda^{k+1}-\lambda^k}{\tau}-L(E+\partial\theta)^{-1}(-L\lambda^k+y_d)+\lambda^k=-f. \tag{12}$$

Он совпадает с предобусловленным методом Удзавы для отыскания седловой точки функции Лагранжа (6). Реализация этого метода включает следующие шаги.

1. Вычисляем $\widetilde{f}=L^{-1}f$.

2. Задаем начальное приближение λ^0.

Для $k=0,1,2,\ldots$

3. Для известного вектора λ^k полагаем $u^k=\lambda^k$ и находим y^k, решив включения с диагональным максимально монотонным оператором $(E+\partial\theta)y^k\ni-L\lambda^k$.

4. Вычисляем $p^k=L^{-1}u^k$.

5. Решаем относительно v уравнение

$$L\frac{v}{\tau}=(-y^k+p^k+\widetilde{f}).$$

6. Перевычисляем $\lambda^{k+1}=\lambda^k+\tau v$.

В [3] установлено, что итерационный метод (12) сходится при условии

$$0<\tau<\frac{2}{k_f^2+1}, \tag{13}$$

где $k_f = \dfrac{1}{\lambda_{\min}(L)}$, $\lambda_{\min}(L) = \frac{8}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2}$ – минимальное собственное число двумерного сеточного оператора Лапласа с условиями Дирихле на равномерной сетке. Кроме того, если функцию θ заменить на регуляризированную функцию θ_ε из (10), то метод (12) сходится при условии (13), а при оптимальном значении

$$\tau = \tau_0 = \frac{1}{k_f^2 + 1}$$

справедлива оценка скорости сходимости

$$\|\lambda^{k+1} - \lambda\|_B \le \rho^{1/2}\|\lambda^k - \lambda\|_B, \quad \rho = 1 - \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)(k_f^2+1)}, \quad B = L^2. \tag{14}$$

В случае отсутствия ограничений на состояние ($\theta = 0$) оптимальный параметр τ_0 и множитель ρ в оценке скорости сходимости (14) равны

$$\tau_0 = \frac{1}{k_f^2+1}, \quad \rho = \frac{k_f^2}{k_f^2+1}.$$

2.2. Градиентный метод отыскания вектора управления. Пусть индикаторная функция $\theta(y) = I_{Y_{ad}}(y)$ множества Y_{ad} аппроксимирована дифференцируемой функцией $\theta_\varepsilon(y)$ с градиентом $\nabla\theta_\varepsilon(y) = \dfrac{1}{\varepsilon}(y - 0.5)^+$. Тогда можно исключить векторы y и λ из системы (7) и получить уравнение для вектора u:

$$\begin{gathered} P_\varepsilon u = L^{-1} y_d, \\ P_\varepsilon u = L^{-1}(E + \nabla\theta_\varepsilon)(L^{-1}(u+f)) + u. \end{gathered} \tag{15}$$

Применим для решения (15) двуслойный итерационный метод

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} + P_\varepsilon u^k = L^{-1} y_d. \tag{16}$$

Он состоит состоит из следующих шагов.

1. Задаем начальное приближение u^0.

Для $k = 0, 1, 2, \ldots$

2. Для известного вектора управления u^k находим y^k – решение уравнения состояния $Ly^k = u^k + f$.

3. Находим сопряженное состояние λ^k: $\lambda^k = -L^{-1}(y^k + \nabla\theta_\varepsilon(y^k) - y_d)$.

4. Решаем относительно v уравнение

$$L\frac{v}{\tau} = (-y^k + p^k + \widetilde{f}).$$

5. Перевычисляем

$$u^{k+1} = (1+\tau)u^k + \tau\lambda^k. \tag{17}$$

В [3] установлено, что задача (15) имеет единственное решение, итерационный метод (16) сходится при

$$0 < \tau < \frac{2\varepsilon}{k_f^2(1+\varepsilon) + \varepsilon},$$

где k_f — постоянная из неравенства (13). При

$$\tau = \tau_0 = \frac{\varepsilon}{k_f^2(1+\varepsilon) + \varepsilon}$$

скорость сходимости характеризуется неравенством

$$\|u^{k+1} - u\| \le \rho \|u^k - u\|, \quad \rho = 1 - \frac{\varepsilon}{k_f^2(1+\varepsilon) + \varepsilon}.$$

При отсутствии ограничений на состояние в задаче оптимального управления (2) ($\theta = 0$) оптимальный итерационный параметр τ_0 и множитель сокращения погрешности ρ равны

$$\tau_0 = \frac{r}{k_f^2 + 1}, \quad \rho = \frac{k_f^2}{k_f^2 + 1}.$$

2.3. Метод последовательной верхней релаксации(SOR). Из последнего соотношения (7) имеем $y = L^{-1}(f + \lambda)$. Подставляя полученное выражение в первое соотношение (7), мы получаем задачу:

$$L^2 y + y + \partial\theta(y) \ni Lf + y_d.$$

Таким образом, имеем конечномерное включение с положительно определенной матрицей $L^2 + E$, поэтому мы можем применить метод последовательной верхней релаксации SOR для ее решения [1, с. 34]:

$$\left(\frac{1}{w} D_{L^2+E} + U^T_{L^2+E}\right) y^{k+1} + \gamma^{k+1} = \left(\frac{1}{w} - 1\right) D_{L^2+E} y^k - U_{L^2+E} y^k + Lf + y_d,$$

$$\gamma^{k+1} \in \partial\theta(y^{k+1}).$$

Здесь $U^T_{L^2+E}$, U_{L^2+E}, D_{L^2+E} – нижняя, верхняя треугольная и диагональная части симметричной матрицы $L^2 + E$ соответственно. При реализации этого метода выполняются следующие шаги.

1. Задаем начальное приближение y^0.

Для $k = 0, 1, 2, \ldots$

2. Вычисляем

$$b = \left(\frac{1}{w} - 1\right) D_{L^2+E} y^k - U_{L^2+E} y^k + Lf + y_d.$$

3. Решаем относительно y^{k+1} включение с нижней треугольной матрицей

$$\left(\frac{1}{w} D_{L^2+E} + U^T_{L^2+E}\right) y^{k+1} + \gamma^{k+1} = b, \quad \gamma^{k+1} \in \partial\theta(y^{k+1}).$$

Приближенное значение управления есть $u^k = Ly^k - f$. Данный метод сходится при $w \in (0, 2)$ [1, с. 34].

2.4. Двухступенчатый метод с предобусловливателем L. В данном пункте приводятся описания двухступенчатого метода с предобусловливателем L и полным обращением $\frac{1}{\tau} L + \partial\theta$, а также предлагаемого нового двухступенчатого метода с предобусловливателем L и неполным обращением $\frac{1}{\tau} L + \partial\theta$. Рассмотрим постановку (9). В двухступенчатом методе с предобусловливателем L осуществляется точное либо приближенное решение включения

$$L \frac{y^{k+1} - y^k}{\tau} + \partial\theta(y^{k+1}) \ni Lf + y_d - L^2 y^k - y^k. \tag{18}$$

При реализации этого метода выполняются следующие шаги.

1. Задаем начальное приближение y^0.

Для $k = 0, 1, 2, \ldots$

2. Вычисляем управление $u^k = Ly^k - f$.

3. Точно или приближенно решаем включение относительно y^{k+1}

$L\dfrac{y^{k+1} - y^k}{\tau} + \gamma^{k+1} = y_d - y^k - Lu^k,\ \gamma^{k+1} \in \partial\theta(y^{k+1})$ с помощью метода SOR, который можно представить следующим образом:

3.1. Задаем начальное приближение $y^{k+1,0} = y^k$.

Для $s = 0, 1, \ldots$

3.2. Вычисляем $p^s = -Lu^k + y_d - y^{k+1,s}$.

3.3. $\left(\dfrac{1}{w}D_L + U_L^T\right) y^{k+1,s+1} + \gamma^{k+1,s+1} = \left(\dfrac{1}{w} - 1\right) D_L y^{k+1,s} - U_L y^{k+1,s} + p^s$, где $\gamma^{k+1,s+1} \in \partial\theta(y^{k+1,s+1})$, D_L, U_L^T, U_L – диагональная, нижняя и верхняя треугольная части матрицы L соответственно.

Рассмотрим случай полного обращения (18). В численных экспериментах производится 1000 внутренних итераций SOR (п. 3.1–3.3), такое количество достаточно для нахождения решения с очень большой точностью. Из теоремы, приведенной в [1, с. 30], следует сходимость данного метода.

Пусть λ_* и λ^* – максимальные и минимальные собственные числа матрицы L соответственно. Поскольку $0 \le E \le \dfrac{1}{\lambda_*}L$ и $\lambda_* L \le L^2 \le \lambda^* L$, то $\lambda_* L \le L^2 + E \le \left(\dfrac{1}{\lambda_*} + \lambda^*\right) L$. Поэтому теоретически оптимальный параметр τ_0 и множитель сокращения нормы погрешности ρ равны соответственно [1, с. 30]:

$$\tau_0 = \frac{2}{\lambda_* + \dfrac{1}{\lambda_*} + \lambda^*} = O(h^2), \quad \rho = \frac{\dfrac{1}{\lambda_*} + \lambda^* - \lambda_*}{\dfrac{1}{\lambda_*} + \lambda^* + \lambda_*} = 1 - O(h^2).$$

Предлагаемый новый двухступенчатый метод с предобусловливателем L и неполным обращением $\dfrac{1}{\tau}L + \partial\theta$ включает в себя неточное решение (18). Поскольку двухступенчатый метод с предобусловливателем L и полным обращением $\dfrac{1}{\tau}L + \partial\theta$ сходится при $\tau \in (0; ch^2)$, то при реализации варианта данного метода с неполным обращением $\dfrac{1}{\tau}L + \partial\theta$ необходимо задать параметр $\tau \in (0; \tau_h)$. Параметр τ_h зависит от h и количества внутренних итераций SOR. В численных экспериментах, где $h = 10^{-2}$, производится 10 внутренних итераций SOR, $\tau = 1.2 \cdot 10^{-5}$. Численные эксперименты, приведенные в п. 3, показали, что новый двухступенчатый метод с предобусловливателем L и неполным обращением $\dfrac{1}{\tau}L + \partial\theta$ дал приемлемое приближение за меньшее количество арифметических операций, поэтому он является наиболее эффективным для решения задачи (5) при $n = 100$.

2.5. Метод Дугласа – Рэкфорда. Для решения системы (9) данный метод состоит из следующих шагов.

1. Задаем начальное приближение y^0.

Для $k = 0, 1, 2, \ldots$

2. Решаем включение относительно $y^{k+1/2}$:

$$\frac{y^{k+1/2} - y^k}{\tau} + L^2 y^k + y^k + \partial\theta(y^{k+1/2}) \ni Lf.$$

3. Решаем систему линейных алгебраических уравнений относительно y^{k+1}:

$$\frac{y^{k+1} - y^{k+1/2}}{\tau} + (L^2 + E)(y^{k+1} - y^k) = 0. \tag{19}$$

Матрица системы линейных уравнений в (19) есть $L^2 + \left(1 + \dfrac{1}{\tau}\right) E$. Для обращения указанной матрицы применялся метод сопряженных градиентов с предобусловливателем L^2.

Метод Дугласа–Рэкфорда сходится при любом параметре $\tau > 0$, его оптимальный параметр $\tau_{\text{opt}} = \dfrac{m}{M}$, где m и M – соответственно минимальное и максимальное собственные числа матрицы $L^2 + \left(1 + \frac{1}{\tau}\right) E$ [1, с. 38].

3. Результаты численных экспериментов

В таблицы включены результаты расчетов, проведенных с помощью описанных выше методов. Использованы следующие обозначения: $F = \dfrac{1}{2}\left\|y^k\right\|^2 + \dfrac{1}{2}\left\|u^k\right\|^2$, k – номер итерации, y, u – компоненты точного решения (7).

Численные эксперименты были проведены при $f = 20$, $y_d = 0$. Было найдено точное значение y двухступенчатым методом при достижении нормы невязки, не превосходящей 10^{-3}, где норма невязки есть величина $\left\|L^2 y + y + \gamma - Lf\right\|$, $\gamma \in \partial\theta(y)$. Для всех методов при проведении численных расчетов критерием окончания являлось выполнение неравенства $||u - u^k|| \leq 0.01$. Дополнительным ограничением было максимальное число итераций: 70000 для метода SOR, 40000 для остальных методов.

Для методов Дуглас–Рэкфорда, регуляризации было использовано теоретически оптимальное значение параметра τ, а для методов SOR, Удзавы, двухступенчатого метода с предобусловливателем L и неполным обращением $\dfrac{1}{\tau}L + \theta$ оптимальный параметр был найден на основе численных экспериментов. Для двухступенчатого метода с предобусловливателем L и с полным обращением $\dfrac{1}{\tau}L + \theta$ было использовано то же значение параметра τ, что и в его варианте с неполным обращением $\dfrac{1}{\tau}L + \theta$.

Трудоемкость одной итерации предобусловленного метода Удзавы и метода регуляризации не меньше трудоемкости трех внутренних итераций двухступенчатого метода с предобусловливателем L и неполным обращением $\dfrac{1}{\tau}L + \partial\theta$ в силу того, что предобусловленный метод Удзавы включает в себя решение включений и двух обращений матрицы L.

В случае использовании метода SOR мы решаем вариационное неравенство с матрицей $L^2 + E$, у которой 11 диагоналей. Матрица вариационного неравенства, которое решается на каждой внутренней итерации двухступенчатого метода с предобусловливателем L, пятидиагональная, поэтому в среднем трудоемкость одной внутренней итерации этого метода в 1.8 раза меньше, чем метода SOR.

В случае двухступенчатого метода с предобусловливателем L и полным обращением $\dfrac{1}{\tau}L + \partial\theta$ количество внутренних итераций равно 2000, то есть в 200 раз больше, чем в варианте данного метода с неполным обращением. С помощью численных экспериментов было замечено, что использованное значение параметра τ для варианта данного метода с полным обращением был близок к оптимальному.

Из приведенных выше рассуждений и в силу результатов численных экспериментов, приведенных в табл. 1–3, приемлемое приближение вектора управления u

Табл. 1

$f = 20,\ h = 10^{-2},\ F(y,u) = 44.1789$

Метод SOR, $w = 1.97$				Двухступенчатый метод с предобусловливателем L с неполным обращением $\frac{1}{\tau}L + \partial\theta$, $w = 1.98$			
k	F	$\|\|y^k - y\|\|$	$\|\|u^k - u\|\|$	k	F	$\|\|y^k - y\|\|$	$\|\|u^k - u\|\|$
1	195.98	0.36267	13.9456	1	195.98	0.36273	13.9679
2	194.0434	0.36251	13.8669	2	194.3562	0.36258	13.8793
3	192.9361	0.36238	13.8076	3	193.1083	0.36244	13.8036
4	192.1041	0.36226	13.7581	4	192.0452	0.36229	13.736
5	191.4129	0.36215	13.7149	5	191.1005	0.36215	13.6743
6	190.8097	0.36205	13.676	6	190.2407	0.362	13.6171
7	190.2682	0.36196	13.6403	7	189.4462	0.36186	13.5636
8	189.7731	0.36186	13.6072	8	188.7041	0.36171	13.513
9	189.3148	0.36177	13.5762	9	188.0056	0.36157	13.465
10	188.8867	0.36169	13.547	10	187.344	0.36142	13.4193
200	167.27	0.35288	11.9266	200	146.3481	0.33547	10.1945
52825	44.1789	0.00007	0.0099994	8457	44.1789	8.3173e-005	0.0099954

Табл. 2

$f = 20,\ h = 10^{-2},\ F(y,u) = 44.1789$

Предобусловленный метод Удзавы, $\tau = 1.8$, $\lambda^0 = 0$				Градиентный метод отыскания вектора управления, $\varepsilon = 10^{-5}$, $\tau = 2 \cdot 10^{-5}$		
k	F	$\|\|y^k - y\|\|$	$\|\|u^k - u\|\|$	F	$\|\|y^k - y\|\|$	$\|\|u^k - u\|\|$
1	0	0.36287	9.3929	143.5489	0.38734	7.6928
2	0.10891	0.1552	9.319	143.5467	0.38733	7.6926
3	0.098385	0.10851	9.2813	143.5444	0.38733	7.6925
4	0.10924	0.12288	9.2428	143.5422	0.38732	7.6924
5	0.10903	0.098583	9.2049	143.5399	0.38731	7.6922
6	0.12149	0.11249	9.1667	143.5377	0.38731	7.6921
7	0.12668	0.097066	9.1291	143.5355	0.3873	7.692
8	0.14047	0.1069	9.0913	143.5332	0.38729	7.6918
9	0.14996	0.097002	9.0539	143.531	0.38729	7.6917
10	0.16541	0.10343	9.0165	143.5288	0.38728	7.6916
300	21.1177	0.056767	3.0148	142.8815	0.38534	7.6537
500	31.2662	0.04254	1.7005	142.4368	0.38401	7.6277
40000	43.9695	0.0013957	0.35539	77.0018	0.15788	3.2674

мы получили с помощью предложенного нами двухступенчатого метода с предобусловливателем L и неполным обращением $\frac{1}{\tau}L + \partial\theta$ затратив на это меньшее количество арифметических операций, чем другими методами. Таким образом, предложенный в настоящей статье итерационный метод оказался наиболее эффективным для решения сеточной задачи (5) на сетке с количеством узлов по одному направлению равным 100.

Автор благодарен профессору А.В. Лапину за полезные замечания при работе над статьей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00629).

Табл. 3

$f = 20,\ h = 10^{-2},\ F(y,u) = 44,1789$

Метод Дугласа – Рэкфорда, $\tau = 1.6 \cdot 10^{-4}$				Двухступенчатый метод с предобусловливателем L с полным обращением $\frac{1}{\tau}L + \partial\theta$, $w = 1.98$, $\tau = 1.2 \cdot 10^{-5}$			
k	F	$\|\|y^k - y\|\|$	$\|\|u^k - u\|\|$	k	F	$\|\|y^k - y\|\|$	$\|\|u^k - u\|\|$
1	194.1018	0.36192	13.9522	1	195.98	0.36265	13.9583
2	193.0127	0.36268	13.8563	2	194.2113	0.36244	13.8583
3	191.2617	0.36255	13.7189	3	192.7949	0.36222	13.7734
4	189.1669	0.36162	13.5637	4	191.5971	0.36201	13.6988
5	186.8248	0.35998	13.3976	5	190.5467	0.36179	13.6316
6	184.2797	0.35767	13.2234	6	189.6024	0.36158	13.5699
7	181.5571	0.35473	13.0423	7	188.7386	0.36136	13.5127
8	178.6751	0.3512	12.855	8	187.9383	0.36115	13.4591
9	175.649	0.3471	12.6618	9	187.1899	0.36093	13.4084
10	172.4923	0.34248	12.4632	10	186.4845	0.36072	13.3604
40000	44.1799	0.00047667	0.051959	5729	44.1789	$9 \cdot 10^{-5}$	0.0099906

Summary

M.G. Khasanov. Comparative Analysis of Methods for Solving an Optimal Control Problem.

Approximation of a state-constrained optimal control problem with the right-hand side of a linear elliptic equation by the finite difference method is considered. Iterative methods for solving grid problems are built. Their convergent conditions are given. According to numerical results, analysis of their efficiency is done.

Key words: optimal control, saddle problem with constraints, iterative methods.

Литература

1. *Лапин А.В.* Итерационные методы решения сеточных вараиционных неравенств. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2008. – 132 с.
2. *Bergouniuox M., Ito K., Kunisch K.* Primal-dual strategy for constrained optimal control problems // SIAM J. Contr. Optim. – 1999. – V. 37, No 4. – P. 1176–1194.
3. *Лапин А.В., Хасанов М.Г.* Решение задачи оптимального управления правой частью эллиптического уравнения при наличии ограничений на состояние // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2010. – Т. 152, кн. 4. – С. 40–56.
4. *Bergouniuox M., Kunisch K.* Augmented lagrangian techniques for elliptic state constrained optimal control problems // SIAM J. Contr. Optim. – 1997. – V. 35, No 5. – P. 1524–1543.
5. *Gracer C., Kornhuber R.* Nonsmooth Newton methods for set-valued saddle point problems // SIAM J. Numer. Anal. – 2009. – V. 47, No 2. – P. 1251–1273.

Поступила в редакцию
23.06.11

Хасанов Марат Гумярович – аспирант НИИММ им. Н.Г. Чеботарева Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *maratkhasanov86@gmail.com*