Экспериментальное определение элементов матрицы преобразования параметров луча центрированной оптической системы

Цель работы:

Освоить методику определения элементов матрицы преобразования луча *M* центрированной оптической системы (ЦОС) и кардинальных элементов ЦОС.

Решаемые задачи:

- приобрести навыки юстировки ЦОС;
- определить элементы матрицы *M* сложной ЦОС - объектива проектора;
- определить положение главных плоскостей объектива;
- определить положение фокальных плоскостей объектива.

Оптические элементы и аппаратура:

- осветитель с транспарантом в виде стрелки:
- объектив проектора;
- экран;
- линейка или измерительная рулетка.

Матричный метод описания центрированных оптических систем.

Оптическая система представляет собой совокупность преломляющих и отражающих поверхностей, разделяющих пространство, в котором распространяется свет, на последовательность однородных сред (материал линз и промежутки между ними). Соответственно, траектория светового луча состоит из отрезков прямых линий. Будем рассматривать только меридиональные лучи, т.е. лучи, лежащие в одной плоскости с главной оптической осью (ось *z* и, соответственно, плоскость *yz*) (рис. 1).

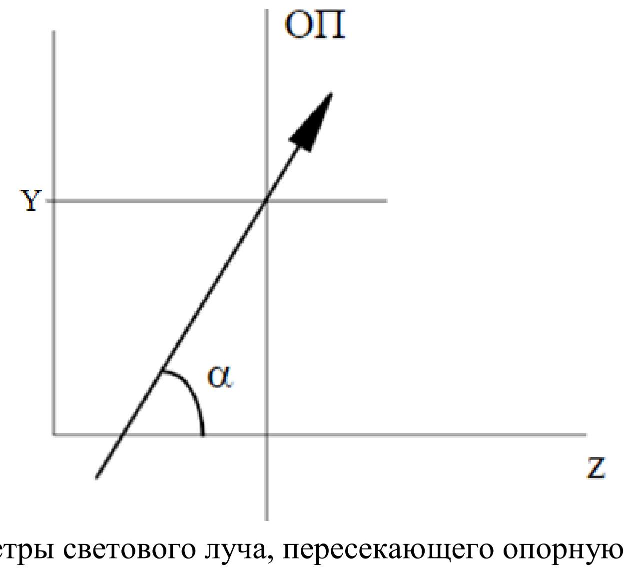

Рис. 1. Параметры светового луча, пересекающего опорную плоскость ОП

Выберем некоторую плоскость Z = const, перпендикулярную оптической оси и назовем ее опорной плоскостью (ОП). Опорные плоскости можно выбирать произвольно, в разных местах оптической системы.

Любой меридиональный луч можно определить заданием двух параметров: координаты Y точки пересечения луча с опорной плоскостью и углаα наклона луча к оптической оси. Удобнее, однако, в качестве второго параметра V использовать произведение показателя преломления среды n на угол α: V = nα.

Преобразование параметров луча *при переходе* от одной опорной плоскости $ОП_1$ к другой, $ОП_2$, в параксиальном приближении будет линейным, т.е. для любой пары опорных плоскостей оно имеет вид:

$$\begin{cases} Y_2 = AY_1 + BV_1 \\ V_2 = CY_1 + DV_1 \end{cases}$$

Это преобразование можно записать в матричной форме так:

$$\begin{pmatrix} Y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}.$$

Для определенной пары плоскостей $ОП_1$ и $ОП_2$ преобразование параметров любого параксиального луча будет описываться одной и той же матрицей, элементы которой определяются оптическими свойствами пространства между $ОП_1$ и $ОП_2$: расположением и радиусами преломляющих и отражающих поверхностей, а также показателями преломления сред, находящихся между ними.

Для полного описания поведения луча в центрированной оптической системе необходимо знать матрицы преобразования для трех основных элементов: оптически однородного промежутка, преломляющей и отражающей поверхностей.

Матрица T преобразования параметров светового луча для оптически *однородного промежутка* толщиной l имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где L - приведенная длина, $L = l/n$.

Матрица преобразования P параметров светового луча *для сферической преломляющей поверхности* имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix},$$

где Φ - оптическая сила преломляющей поверхности, $\Phi = \frac{n_2 - n_1}{R}$.

Чтобы одни и те же формулы были справедливы для выпуклой и вогнутой поверхностей, значение R считают положительным, если центр кривизны лежит на оси z справа от границы (поверхность выпуклая), и отрицательным - в противном случае.

Это правило является одним из положений правила знаков, которое используется в геометрической оптике: расстояния, отсчитываемые слева направо положительны, справа налево - отрицательны; расстояния, отсчитываемые от оси z вверх, положительны, вниз - отрицательны; углы, отсчитываемые от оси z против часовой стрелки, положительны, а по часовой стрелке - отрицательны.

Матрица преобразования P параметров светового луча *для сферической отражающей поверхности* имеет такой же вид, как и матрица преломления, если в выражении для оптической силы n_2 заменить на -n_1: $\Phi = -\frac{2n_1}{R}$. Для выпуклого зеркала (R > 0) оптическая сила отрицательна (Φ < 0), для вогнутого зеркала (R > 0) Φ > 0.

Получим в качестве примера матрицу преобразования параметров луча, прошедшего через толстую линзу. Толстая линза - это оптически однородная среда с показателем преломления n, ограниченная сферическими поверхностями с радиусами кривизны R_1 и R_2. Расстояние между поверхностями вдоль оптической оси равно l (толщина линзы). Считаем, что линза находится в воздухе (n_0 = 1). Поскольку мы имеем две преломляющие поверхности и оптический промежуток между ними, выбираем опорные плоскости в непосредственной близости от преломляющих поверхностей (рис.2).

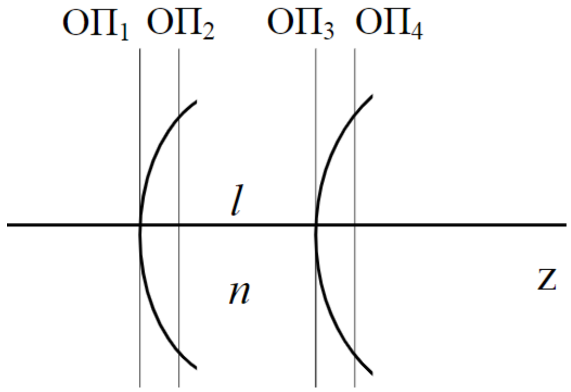

Рис. 2. Выбор опорных плоскостей для толстой линзы

Пусть P_1 и P_2 - матрицы преломления для первой и второй поверхности, соответственно, а T - матрица оптического промежутка.

Обозначим: $\begin{pmatrix} Y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$ - параметры некоторого луча на опорной плоскости ОП$_1$ (перед входом в линзу), $\begin{pmatrix} Y_2 \\ V_2 \end{pmatrix}$ - параметры луча на ОП$_2$ (после преломления на первой сферической поверхности), $\begin{pmatrix} Y_3 \\ V_3 \end{pmatrix}$ - параметры луча на ОП$_3$ (после прохождения оптического промежутка с приведенной толщиной $L = l/n$), $\begin{pmatrix} Y_4 \\ V_4 \end{pmatrix}$ - параметры луча на ОП$_4$ (после преломления на второй сферической поверхности).

Очевидно, что $\begin{pmatrix} Y_4 \\ V_4 \end{pmatrix} = P_2 \begin{pmatrix} Y_3 \\ V_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} Y_3 \\ V_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} Y_2 \\ V_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} Y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = P_1 \begin{pmatrix} Y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$.

Из последних уравнений получим связь параметров луча на первой и последней опорных плоскостях:

$$\begin{pmatrix} Y_4 \\ V_4 \end{pmatrix} = P_2 T P_1 \begin{pmatrix} Y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$$

Матрица преобразования луча в толстой линзе М равна произведению матриц для ее отдельных элементов, взятых в обратном порядке:

$$M = P_2 T P_1 .$$

Подставляя в это выражение конкретный вид матриц P и T, получим:

$$M = \begin{pmatrix} 1 - L\Phi_1 & L \\ -(\Phi_1 + \Phi_2 - L\Phi_1\Phi_2) & 1 - L\Phi_2 \end{pmatrix}.$$

Аналогичным способом, т.е. путем последовательного применения преобразования параметров луча отдельными элементами оптической системы, можно получить матрицу преобразования для произвольной ЦОС, если известны кривизна и взаимное расположение ее преломляющих и отражающих поверхностей, а также значения показателей преломления.

Выберем в качестве опорных плоскостей плоскости ОП$_1$ и ОП$_2$, проходящие через переднюю (О$_1$) и заднюю О$_2$ преломляющие поверхности (рис.3). Обозначим через M матрицу преобразования параметров луча между этими плоскостями, а её элементы - A, B, C, D:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Рассмотрим экспериментальный метод определения элементов матрицы M.

Будем помещать предмет высоты y_1 на различных расстояниях от опорной плоскости ОП$_1$ и регистрировать размер y_2 и положение получающегося действительного изображения.

Обозначим через S расстояние от предмета MN до ОП$_1$ а расстояние от ОП$_2$ до действительного изображения M'N' через S'. Так как отсчёт ведётся вдоль оси Z, величины $S > 0$ и $S' > 0$. Предмет будем смещать так, чтобы эти величины оставались положительными.

Возьмём две ***сопряжённые*** опорные плоскости ОП$_3$ и ОП$_4$ и построим матрицу преобразования M' параметров луча между этими плоскостями:

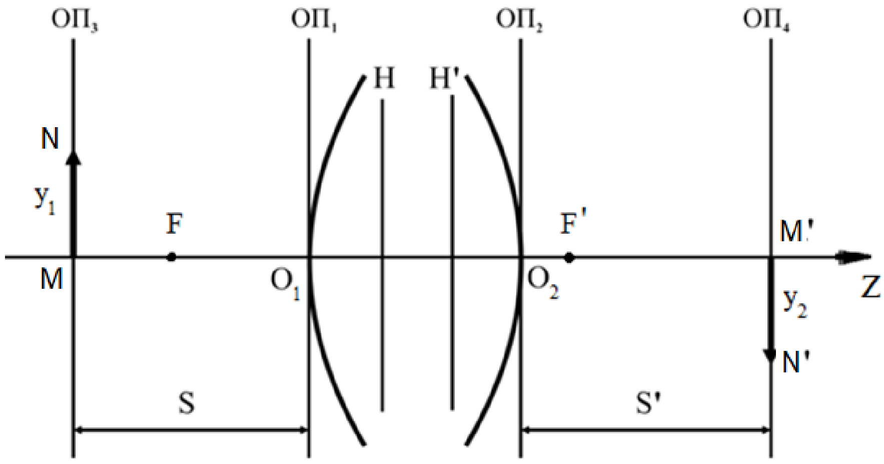

Рис. 3. К выводу основных соотношений

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & S' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M' = \begin{pmatrix} A + S' \cdot C & A \cdot S + B + S' \cdot (C \cdot S + D) \\ C & C \cdot S + D \end{pmatrix}$$

Поскольку плоскости ОП$_3$ и ОП$_4$ *сопряжённые,* то (см. [3], стр.22):

- верхний правый элемент матрицы M' равен нулю:

$$A \cdot S + B + S' \cdot (C \cdot S + D) = 0; \qquad (1)$$

- верхний левый элемент матрицы даёт увеличение системы Г:

$$A + S' \cdot C = \Gamma$$

(если изображение перевёрнутое, то $\Gamma < 0$); (2)

- нижний правый элемент матрицы (обозначим его α) является обратным - верхнему левому элементу матрицы:

$$\alpha = C \cdot S + D = \frac{1}{A + S' \cdot C} = \frac{1}{\Gamma}. \qquad (3)$$

Определение элементов C и D.

Если построить график зависимости α от расстояния до предмета S, то получится прямая, тангенс угла наклона которой равен элементу C, а отрезок, отсекаемый на оси ординат равен элементу D (Рис.4).

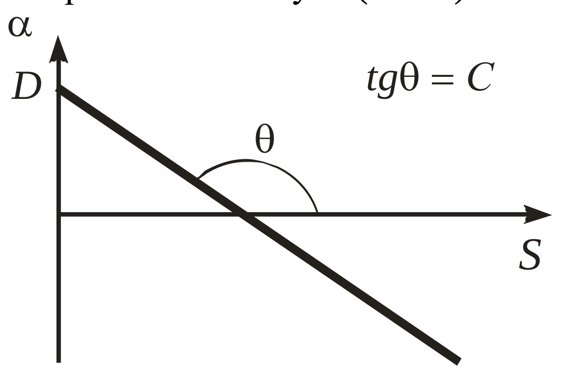

Рис.4. Зависимость α от S

Определение элементов A и B.

Из уравнения (1) следует:

$$A \cdot S + B + S' \cdot \alpha = 0$$

$$A \cdot S + B = -S' \cdot \alpha = \beta,$$

где $\beta = -S' \cdot \alpha$ - величина, которую можно измерить.

Если построить график зависимости β от расстояния до предмета *S*, то получится прямая, тангенс угла наклона которой равен элементу *A*, а отрезок, отсекаемый на оси ординат равен элементу *B* (Рис.5).

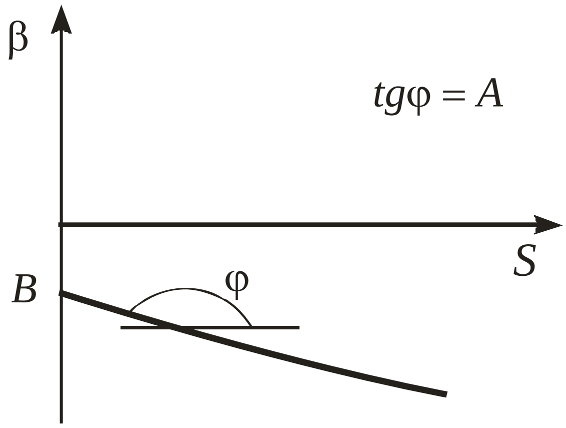

Рис.5. Зависимость β от *S*

Порядок выполнения работы:

Упражнение 1. Сборка экспериментальной установки.

Соберите установку в соответствии с Рис. 6.

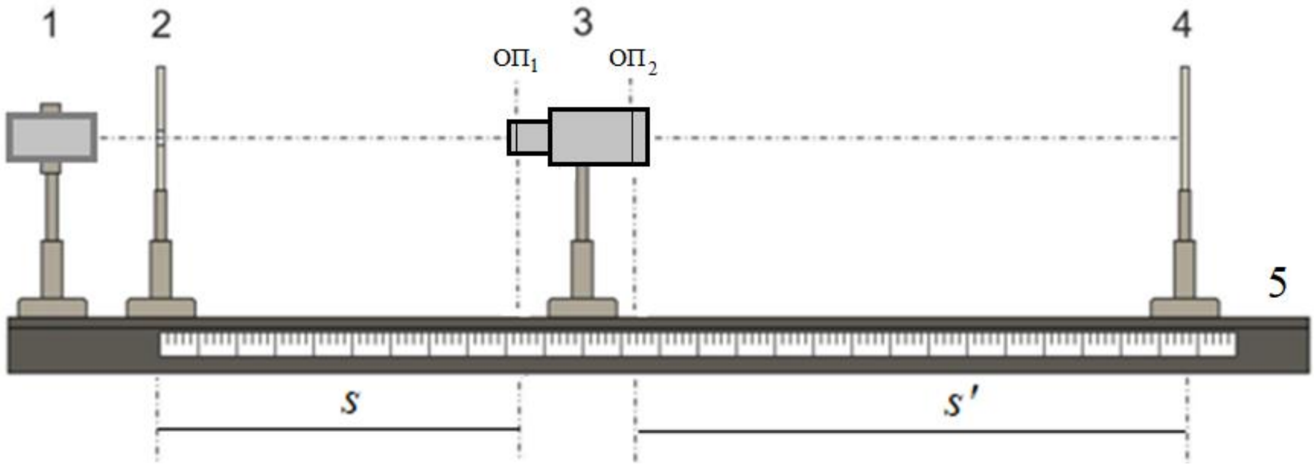

Рис. 6. Схема экспериментальной установки.
1 - осветитель, 2 – предмет (транспарант со стрелкой), 3 - исследуемый объектив (ЦОС), 4 - матовый экран, 5 - оптический рельс с линейкой

В качестве предмета MN используется прозрачный транспарант 2 в виде стрелки, освещаемый лампой 1.

Отъюстируйте экспериментальную установку, выставив все элементы, схемы на одну оптическую ось. Экран 4 должен быть обращён матовой (шершавой) поверхностью к источнику света.

Положения вершин передней и задней сферических преломляющих поверхностей отмечены на объективе (положения $ОП_1$ и $ОП_2$).

<u>Упражнение 2. Определение элементов A, B, C, D матрицы преобразования луча сложной ЦОС.</u>

1. Расположите объектив узкой частью к предмету на расстоянии
S = 70 - 80 мм. Перемещая экран, получите резкое изображение предмета.

2. Измерьте расстояние S от предмета до $ОП_1$ и расстояние S' от $ОП_2$ до экрана.

3. Измерьте размер предмета y_1 и его изображения y_2 и определите увеличение системы $\Gamma = y_2/y_1$. (Изображение перевёрнутое, $y_2 < 0$!).

4. Определите $\alpha = 1/\Gamma$ и $\beta = -S'/\Gamma$. Измерение повторите 3 раза и вычислите средние величины.

5. Сдвиньте объектив на 5 - 6 мм ближе к экрану и, перемещая экран, вновь получите резкое изображение предмета. Повторите измерения (пп. 2-4).

6. Повторите п.5 не менее 8 раз и внесите результаты в таблицу:

N	S, см	S', см	Γ	α	β, см	$A \pm \Delta A$	$B \pm \Delta B$, см	$C \pm \Delta C$, см$^{-1}$	$D \pm \Delta D$

Рекомендация: Для повышения точности измерения расстояний перемещение объектива и экрана удобно фиксировать по шкале оптического рельса.

7. Постройте график зависимости α от S. Используя метод наименьших квадратов (МНК), определите по этому графику элементы C и D. Результаты с указанием доверительного интервала внесите в таблицу. Программа, позволяющая аппроксимировать экспериментальные данные линейной функцией и оценивать доверительный интервал, приведена на сайте:

https://shelly.kpfu.ru/e-ksu/docs/F829841697/MNK_ABSD_.xlsx

8. Постройте график зависимости β от S. Определите по этому графику элементы A и B. Результаты с указанием доверительного интервала внесите в таблицу.

9. Убедитесь, что определитель матрицы $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ в пределах ошибок измерений равен единице.

10. Определите положения главных и фокальных плоскостей. Для этого воспользуйтесь таблицей.

Таблица. Расстояния между плоскостями

$\text{ОП}_1 - H = \dfrac{D-1}{C}$	$\text{ОП}_2 - H' = \dfrac{1-A}{C}$
$H - F = \dfrac{1}{C}$	$\text{H}' - F' = -\dfrac{1}{C}$

11. Изобразите на отдельной схеме в масштабе 1:1 положения опорных плоскостей ОП_1 и ОП_2, главных и фокальных плоскостей. Определите на каком расстоянии от края объектива находится фокальная плоскость объектива. Пронаблюдайте, образуется ли изображение удалённого объекта в этой плоскости.

Вопросы к обсуждению с преподавателем.

1. Центрированная оптическая система. Кардинальные элементы ЦОС (главные и фокальные точки и поверхности).
2. Суть матричного метода описания ЦОС. Матрица преобразования параметров луча для однородного оптического промежутка, преломляющей сферической поверхности и для отражающей сферической поверхности.
3. Опишите метод определения элементов матрицы M, используемый в работе.
4. Докажите справедливость соотношений (1) - (3).
5. Опишите суть метода наименьших квадратов.
6. Представьте результаты, полученные в работе. Обоснуйте их достоверность.

Рекомендуемая литература.

1. Бутиков Е.И. Оптика. Изд.2, С-Пб., Невский диалект, 2003. §7.2
2. Ландсберг Г.С. Оптика, Изд.7, М., Физматлит, 2017.
3. Геометрическая оптика. Центрированные оптические системы/ И.Н.Грачева, Е.А.Филиппова, А.И.Фишман. - Казань, 2017. - 31 с.