Казанский (Приволжский) федеральный университет
СУНЦ IT-лицей КФУ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Методическая библиотека

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Специализированный учебный научный центр –
общеобразовательная школа-интернат IT-лицей

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

КАЗАНЬ

2021

УДК 51(075)
ББК 22.1я7
Э45

Печатается по рекомендации педагогического совета
Специализированного учебного научного центра –
общеобразовательная школа-интернат «IT-лицей»
Казанского (Приволжского) федерального университета
(протокол № 2 от 15.10.2021)

Авторы:
Р.Ф. Ахвердиев, кандидат технических наук, учитель математики
СУНЦ IT-лицей КФУ, доцент кафедры высшей математики КНИТУ
Е.А. Турилова, доктор физико-математических наук, доцент,
директор Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского КФУ
А.А. Евсеева, учитель математики высшей квалификационной категории
СУНЦ IT-лицей КФУ
Ф.И. Гизатуллин, директор гимназии № 10
Авиастроительного района г. Казани

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры специальной математики
ФГБОУ ВПО «Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева – КАИ» **А.Ю. Погодина;**
кандидат технических наук, доцент кафедры математики
УВО «Университет управления «ТИСБИ» **Л.Р. Пантелеева**

Элементарная математика: общие методы решения уравнений и неравенств
Э45 [Электронный ресурс] / Р.Ф. Ахвердиев, Е.А. Турилова, А.А. Евсеева и др. – Электрон. текстовые дан. (1 файл: 778 Кб). – Казань: Издательство Казанского университета, 2021. – 61 с. –Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: https://kpfu.ru/portal/docs/F_360608299/Elementarnaya.matematikaobshhie.metody.resheniya.uravnenij.i.neravenstv.pdf. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-00130-537-8

В пособии представлена тема «Общие методы решения уравнений и неравенств», раздела «Элементарная математика». В нем содержатся основные теоретические положения о типах, методах и приемах решения иррациональных, показательных, логарифмических уравнений и неравенств, приведен список задач для индивидуальной работы, примерная контрольная работа.

Предназначено для учащихся общеобразовательных школ, профильных лицеев и гимназий.

УДК 51(075)
ББК 22.1я7

ISBN 978-5-00130-537-8

Содержание

Введение

Цель данного учебно-методического пособия – оказание помощи учащимся курса элементарной математики, в частности раздела «Общие методы решения уравнений и неравенств». Разработка данного пособия была вызвана отсутствием единого учебника, доступного учащимся, в котором содержались бы все необходимые сведения по данному разделу. Пособие содержит систематизированный материал по теории и по типам, методам, способам и приемам решения иррациональных, показательных, логарифмических уравнений и неравенств.

Пособие включает в себя:

- примерный тематический план изучения тем;
- требования к знаниям и умениям учащихся по темам;
- содержание тем;
- упражнения для индивидуальной работы по темам;
- вариант примерной контрольной работы;
- список рекомендуемой литературы.

Содержательные части всех тем, включенных в данное методическое пособие, построены одинаково, а именно сначала рассматриваются простейшие уравнения и неравенства того или иного типа и основные теоретические положения, на основе которых решаются такие уравнения и неравенства. Далее уравнения и неравенства решаются с использованием общих методов (разложение на множители, введение нового неизвестного, сведение к однородным уравнениям (неравенствам), использование свойств функций), суть этих методов была изложена в первой части пособия. Затем решаются более сложные уравнения и неравенства. Типы, методы, способы и приемы решения уравнений (неравенств) того или иного типа выделены и иллюстрируются примерами.

К каждой теме приведен список задач для индивидуальной работы. Задачи частично заимствованы из литературы, частично составлены авторами. Ответы к задачам прилагаются.

Теоретический и задачный материал представлен в пособии в избыточном количестве. Это объясняется необходимостью организации индивидуальной работы учащихся на различных уровнях.

Примерный тематический план изучения тем

№ п/п	Темы занятий	Число часов	
		лекции	практич. занятия
1–2.	Тема III. Иррациональные уравнения и неравенства	2	2
3.	Тема IV. Показательные уравнения и неравенства	1	1
4–5.	Тема V. Логарифмические уравнения и неравенства	2	2
6.	Контрольная работа		2
Всего: 12 ч.			

Тема III. Иррациональные уравнения и неравенства

Требования к знаниям и умениям учащихся

Цель изучения темы – систематизировать и обобщить знания учащихся о способах решения иррациональных уравнений и неравенств.

В результате изучения темы учащийся ***знает***:

– понятие иррационального уравнения (неравенства);

– понятие области определения (ОДЗ) иррационального уравнения (неравенства);

– понятие и свойства корней различных степеней;

– понятие и свойства степенной функции;

– о преобразованиях, используемых при решении иррациональных уравнений и неравенств; какие из них приводят к равносильному уравнению (неравенству), а какие к уравнению (неравенству) – следствию;

– о преобразованиях, приводящих к потере корней уравнения (решений неравенства);

– какие иррациональные уравнения и неравенства относятся к простейшим, способы их решения;

– общий подход к решению иррациональных уравнений и неравенств: сведение их к рациональному возведению в степень;

– о возможностях использования общих методов при решении иррациональных уравнений и неравенств: разложение на множители, введение нового неизвестного, рассмотрение выражения как однородного, метод интервалов, использование свойств функций;

– о специальных приемах решения иррациональных уравнений: сведение к системе рациональных уравнений, умножение на сопряженное выражение, замена суммы (разности) радикалов, тригонометрические подстановки.

В результате изучения темы учащийся ***умеет***:

– решать простейшие иррациональные уравнения и неравенства;

– применять общие методы для решения иррациональных уравнений и неравенств;

– использовать специальные приемы для решения иррациональных уравнений и неравенств.

Содержание темы

1. Простейшие иррациональные уравнения и неравенства

1.1. Основные понятия и предварительные замечания

Иррациональные уравнения (неравенства) являются одним из видов алгебраических уравнений (неравенств) (см. [12, с. 5–6]). От других алгебраических уравнений (неравенств) их отличает присутствие степени с рациональным дробным показателем. Например, уравнение $\sqrt{2+x}-3=x+\pi$ является иррациональным, а неравенство $\sqrt{2}|x|-3x^{4}<7$ рационально, поскольку в нем переменная x не находится под знаком корня.

Нахождение *области определения* (ОДЗ) иррационального уравнения (неравенства) обычно связано с определением тех значений неизвестного, при которых неотрицательны все выражения, находящиеся под знаками корней четных степеней.

Ключевая идея решения большинства иррациональных уравнений и неравенств состоит в сведении их к рациональным алгебраическим уравнениям и неравенствам путем некоторых преобразований. Для решения иррациональных уравнений и неравенств, наряду с общими для любого класса уравнений преобразованиями, используются определения и свойства корней различных степеней, степенной функции (см. [1–3, 7–9]). Отметим следующие свойства, которые постоянно используются при решении иррациональных уравнений (неравенств):

1. Все корни четной степени являются арифметическими, т. е. если подкоренное выражение отрицательно, то корень лишен смысла; если подкоренное выражение равно нулю, то корень также равен нулю; если подкоренное выражение положительно, то значение корня положительно.

2. Все корни нечетной степени определены при любом значении подкоренного выражения; при этом корень отрицателен, если подкоренное выражение отрицательно; равен нулю, если подкоренное выражение равно нулю; положителен, если подкоренное выражение положительно.

3. Функции $y=\sqrt[2n]{x}$ и $y=\sqrt[2n+1]{x}$, где $n\in N$, монотонно возрастают на своей области определения.

Тождества, описывающие свойства корней:

для любых $n,m\in N, n\geq 2, m\geq 2, k\in R, a\geq 0, b\geq 0$

1) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$; 2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}, b\neq 0$; 3) $(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}, a\neq 0$; 4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$;

5) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$; 6) $\sqrt[mn]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^k}, a\neq 0$.

В частности, для любых $n\in N, a\in R$ $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|$; $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}}=a$.

1.2. Простейшие иррациональные уравнения

Решение большинства иррациональных уравнений сводится к решению одного из двух простейших иррациональных уравнений.

А. ***Уравнение вида*** $\sqrt[n]{f(x)}=g(x), n\in N, n\geq 2$. (1)

Если n – нечетно, то осуществляем равносильный переход от уравнения (1) к уравнению $f(x)=g^n(x)$ (2), решая которое, находим корни исходного уравнения.

Если n – четно, то уравнения вида (1) можно решить с помощью равносильных преобразований или заменить его уравнением-следствием с необходимостью проверки найденных решений. Рассмотрим оба способа решения.

Способ 1. *Переход к уравнению-следствию* (2) осуществляется путем возведения обеих частей уравнения (1) в степень n. Решая получившееся уравнение, находим корни не только уравнения (1), но и «теневого» уравнения $\sqrt[n]{f(x)}=-g(x)$ (3), для которого уравнение (2) также является следствием (см. [12, с. 17–21]). Тогда корни уравнения (3) (если они имеются) являются посторонними корнями исходного уравнения. Их следует отсеять при окончательной проверке всех найденных корней уравнения (2) подстановкой в уравнение (1).

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt{-3x+3}=x-1$.

Решение. Возведем обе части уравнения в квадрат и решим получившееся уравнение:

$$-3x+3=(x-1)^2 \Leftrightarrow -3x+3=x^2-2x+1 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x_1=1 \text{ и } x_2=-2.$$

Осуществим проверку, подставляя найденные корни в исходное уравнение. Пусть $x=1$, тогда левая часть уравнения: $\sqrt{-3\cdot 1+3}=\sqrt{0}=0$; правая часть: 1 – 1 = 0; в итоге $0=0$ – верное равенство, значит, $x=1$ – корень исходного уравнения. Пусть $x=-2$, тогда левая часть уравнения: $\sqrt{-3\cdot(-2)+3}=\sqrt{9}=3$; правая часть: –2 – 1= –3; в итоге 3 = –3 – неверное равенство, поэтому $x=-2$ не является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x=1$.

Способ 2. *При равносильных преобразованиях* уравнение (1) заменяется системой: $\begin{cases} f(x)=g^n(x), \\ g(x)\geq 0. \end{cases}$

Условие неотрицательности $f(x)$ учитывается в силу равенства $f(x)=g^{n}(x)$ и условия $g(x)\ge 0$. Этот способ очень удобен, если корни – большие числа или иррациональны.

Пример 1'. Решите уравнение $\sqrt{-3x+3}=x-1$.

Решение. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} -3x+3=(x-1)^{2}, \\ x-1\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2}+x-2=0, \\ x\ge 1. \end{cases}$$

Уравнение системы имеет корни $x_1=1$ и $x_2=-2$. Второй корень не удовлетворяет неравенству, поэтому является посторонним для исходного уравнения. Первый корень является решением системы и, следовательно, корнем данного уравнения.

Ответ: $x=1$.

Рассмотренный пример хорошо иллюстрирует тот факт, что посторонние корни могут появиться не только вследствие расширения области определения исходного уравнения (в примере ОДЗ: $-3x+3\ge 0 \Leftrightarrow x\le 1$, т. е. оба корня входят в ОДЗ), но и в результате самого действия возведения в четную степень. Таким образом, учет ОДЗ исходного уравнения не избавляет от появления посторонних корней, поэтому не может использоваться как способ решения иррациональных уравнений.

B. *Уравнение вида* $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)}, n\in N, n\ge 2$. (4)

Если n – нечетно, то осуществляем равносильный переход от уравнения (4) к уравнению $f(x)=g(x)$ (5), решая которое находим корни исходного уравнения (см. [12, с. 21]).

Если n – четно, то возможны два способа решения: возведение уравнения в степень с последующей проверкой корней подстановкой в исходное уравнение и равносильные преобразования данного уравнения. Первый способ не имеет отличий, зависящих от вида уравнения, поэтому мы рассмотрим только второй способ. Равносильные преобразования данного уравнения приводят к составлению и решению системы:

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\ge 0, \\ g(x)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\ge 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$$

Пример 2. Решите уравнение $\sqrt[4]{x^{3}+x^{2}+2x}=\sqrt[4]{x^{3}+8}$.

Решение. Возведем уравнение в четвертую степень и дополним полученное уравнение областью определения правой части (более простой по сравнению с левой). Получим равносильную исходному уравнению систему:

$$\begin{cases} x^{3}+x^{2}+2x=x^{3}+8, \\ x^{3}+8\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2}+2x-8=0, \\ x^{3}\ge -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-4, \\ x=2, \end{array}\right. \\ x\ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: $x = 2$.

Если решаемое уравнение не относится ни к одному из рассмотренных видов, то нужно постараться с помощью различных алгебраических преобразований привести его к виду (1) или (4). Обычно для этих целей используют метод «уединения» радикалов и возведение в степень. Следует помнить, что при этих преобразованиях могут быть получены неравносильные переходы. Поэтому в процессе решения необходимо следить за равносильностью проводимых преобразований или, если проведение равносильных преобразований затруднительно, в конце решения делать проверку подстановкой полученных корней в исходное уравнение.

Пример 3. Решите уравнение $2x + 4 - \sqrt{x+2} = 15$.

Решение. Прежде чем возводить данное уравнение в квадрат, «уединим» радикал: $\sqrt{x+2} = 2x - 11$. Тогда переходим к равносильной системе:

$$\begin{cases} x + 2 = (2x-11)^2, \\ 2x - 11 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 45x + 119 = 0, \\ x \ge 5{,}5. \end{cases}$$

Уравнение системы имеет корни $x_1 = 4{,}25$ и $x_2 = 7$. Первый корень не удовлетворяет неравенству, поэтому является посторонним для исходного уравнения. Второй корень является решением системы и, следовательно, корнем данного уравнения.

Ответ: $x = 7$.

Пример 4. Решите уравнение $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} - 1 = 0$.

Решение. Уединить радикалы не удается, так как переменная содержится в двух подкоренных выражениях. Однако преобразование уравнения к виду $\sqrt{2x-4} = \sqrt{x+5} + 1$ позволяет отнести его к типу (1) и перейти от уравнения не к системе, а равносильному уравнению (очевидно, что выражение $\sqrt{x+5} + 1 > 0$): $2x - 4 = x + 6 + 2\sqrt{x+5}$. Однократное возведение в квадрат не привело к рациональному уравнению. Поэтому возведем в квадрат еще раз, предварительно уединив радикал:

$$x - 10 = 2\sqrt{x+5} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-10)^2 = 4(x+5), \\ x - 10 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 24x + 80 = 0, \\ x \ge 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 20, x_2 = 4, \\ x \ge 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; x = 20.$$

Ответ: $x = 20$.

Итак, общим подходом к решению иррациональных уравнений является *возведение обеих частей уравнения в некоторую степень*. При этом для отсева посторонних корней уравнения при возведении в четную степень, необходимо либо накладывать ограничения на соответствующие функции; либо проводить проверку найденных корней непосредственной подстановкой в исходное уравнение (проверки корней по ОДЗ недостаточно).

1.3. Простейшие иррациональные неравенства

Решение иррациональных неравенств осложняется тем обстоятельством, что здесь, как правило, исключена возможность проверки, поэтому все преобразования должны быть равносильными. Основным методом решения иррациональных неравенств является метод сведения исходного неравенства к равносильной системе или совокупности систем рациональных неравенств. Наибольший интерес представляют следующие неравенства, соответствующие простейшим иррациональным уравнениям.

А. *Неравенство вида* $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$ или $\sqrt[n]{f(x)} \le g(x), n \in N, n \ge 2$.

Если n – нечетно, то данное неравенство равносильно неравенству $f(x) < g^n(x)$ или $f(x) \le g^n(x)$, решая которое, находим решения исходного неравенства (см. [12, с. 24]).

Если n – четно, то в силу неотрицательности выражения $\sqrt[n]{f(x)}$ неравенства такого вида решают, переходя к системе трех неравенств:

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^n(x), \\ f(x) \ge 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \sqrt[n]{f(x)} \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g^n(x), \\ f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Первое неравенство в системе (5) является результатом возведения исходного неравенства в четную степень, второе неравенство представляет собой условие существования корня в исходном неравенстве, а третье неравенство обеспечивает возможность возведения в четную степень (напомним, что неравенство нельзя возводить в четную степень, если хотя бы одна из его частей отрицательна, поскольку при этом знак неравенства может измениться).

Пример 5. Решите неравенство $\sqrt[6]{2x-3} < 1$.

Решение. В соответствии со схемой (5) запишем систему рациональных неравенств, равносильную данному неравенству $\begin{cases} 2x-3 < 1^6, \\ 2x-3 \ge 0 \end{cases}$ (условие $g(x) = 1 > 0$, очевидно, выполняется при всех x). Решаем полученную систему неравенств: $\begin{cases} 2x < 4, \\ 2x \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x \ge \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} \le x < 2$.

Ответ: $\dfrac{3}{2} \le x < 2$.

Пример 6. Решите неравенство $\sqrt{x+18} \le 2 - x$.

Решение. По схеме (5) система, равносильная исходному неравенству, имеет вид:

$$\begin{cases} x+18 \ge 0, \\ 2-x \ge 0, \\ x+18 \le (2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -18, \\ x \le 2, \\ x^2 - 5x - 14 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18 \le x \le 2, \\ x \le -2, x \ge 7 \end{cases} \Leftrightarrow -18 \le x \le -2.$$

Ответ: $-18 \le x \le -2$.

В. *Неравенство вида* $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$ или $\sqrt[n]{f(x)} \ge g(x), n \in N, n \ge 2$.

Если n – нечетно, то данное неравенство равносильно неравенству $f(x) > g^n(x)$ или $f(x) \ge g^n(x)$, решая которое, находим решения исходного неравенства (см. [12, с. 24]).

Если n – четно, то в силу неотрицательности выражения $\sqrt[n]{f(x)}$ неравенства такого вида решают, переходя к совокупности двух систем неравенств:

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) > g^n(x), \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0 \end{cases} \end{array} \right. \text{ или } \sqrt[n]{f(x)} \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \ge g^n(x), \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0. \end{cases} \end{array} \right. \quad (6)$$

Обратимся к первой системе схемы (6). Первое неравенство этой системы является условием, «позволяющим» осуществить возведение в четную степень исходного неравенства, а второе – результатом этого возведения. Вторая система схемы (6) получается следующим образом: первое неравенство означает, что правая часть исходного неравенства отрицательна, и возводить в четную степень нельзя. Но левая часть исходного неравенства – арифметический корень четной степени – неотрицательна при всех значениях x, при которых она определена. Поэтому исходное неравенство выполняется при всех x, при которых существует его левая часть. Второе неравенство описывает условие существования левой части.

Пример 7. Решите неравенство $\sqrt[8]{2x-5} \ge 1$.

Решение. Применим схему (6) при условии, что в данном неравенстве $g(x) = 1 \ge 0$. Приходим к равносильному неравенству $2x - 5 \ge 1^8$, т. е. $x \ge 3$.

Ответ: $x \ge 3$.

Пример 8. Решите неравенство $\sqrt{x^2 + x - 2} > x$.

Решение. Использование схемы (6) приводит к замене неравенства равносильной ему совокупностью двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ x^2+x-2>x^2,\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ x^2+x-2\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ x-2>0,\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ (x+2)(x-1)\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ x>2,\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ \left[\begin{array}{l}x\le -2,\\ x\ge 1\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le -2,\\ x>2.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\le -2$, $x>2$.

C. ***Неравенство вида*** $\sqrt[n]{f(x)}<\sqrt[n]{g(x)}$ или $\sqrt[n]{f(x)}\le\sqrt[n]{g(x)}, n\in N, n\ge 2$**.**

Если n – нечетно, то данное неравенство равносильно неравенству $f(x)<g(x)$ или $f(x)\le g(x)$, решая которое, находим решения исходного неравенства (см. [12, с. 24]).

Если n – четно, то нужно переходить к системе:

$$\sqrt[n]{f(x)}<\sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases}f(x)<g(x),\\ f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}f(x)<g(x),\\ f(x)\ge 0\end{cases} \text{ или}$$

$$\sqrt[n]{f(x)}\le\sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases}f(x)\le g(x),\\ f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}f(x)\le g(x),\\ f(x)\ge 0.\end{cases}$$

Пример 9. Решите неравенство $\sqrt[4]{x-1}<\sqrt[4]{2-x}$.

Решение. Заменяем неравенство равносильной ему системой двух неравенств: $\begin{cases}x-1<2-x,\\ x-1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<\dfrac{3}{2},\\ x\ge 1\end{cases} \Leftrightarrow 1\le x<1{,}5.$

Ответ: $1\le x<1{,}5$.

D. ***Неравенство вида*** $\sqrt[n]{f(x)}>\sqrt[n]{g(x)}$ или $\sqrt[n]{f(x)}\ge\sqrt[n]{g(x)}, n\in N, n\ge 2$**.**

Если n – нечетно, то данное неравенство равносильно неравенству $f(x)>g(x)$ или $f(x)\ge g(x)$, решая которое, находим решения исходного неравенства (см. [12, с. 24]).

Если n – четно, то нужно переходить к системе:

$$\sqrt[n]{f(x)}>\sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases}f(x)>g(x),\\ f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}f(x)>g(x),\\ g(x)\ge 0\end{cases} \text{ или}$$

$$\sqrt[n]{f(x)}\ge\sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases}f(x)\ge g(x),\\ f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}f(x)\ge g(x),\\ g(x)\ge 0.\end{cases}$$

Пример 10. Решите неравенство $\sqrt[6]{x-1}\ge\sqrt[6]{2-x}$.

Решение. Заменяем неравенство равносильной ему системой двух неравенств: $\begin{cases} x-1 \ge 2-x, \\ 2-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{3}{2}, \\ x \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1{,}5 \le x \le 2.$

Ответ: $1{,}5 \le x \le 2$.

2. Использование общих методов при решении иррациональных уравнений и неравенств

2.1. Разложение на множители. Метод интервалов

Метод разложения на множители является одним из общих методов решения уравнений и неравенств. Естественно предположить, что он может использоваться и для решения иррациональных уравнений и неравенств. Для применения этого метода необходимо все слагаемые перенести в одну часть уравнения (чаще всего в левую), в другой оставить нуль. После переноса слагаемых левую часть уравнения раскладывают на множители. Напомним, что для разложения выражений на множители обычно применяются: способ вынесения общего множителя, способ группировки, формулы сокращенного умножения. Далее при решении уравнений можно использовать общий вывод, сделанный в [12, с. 26], что $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots f_n(x)=0 \overset{ОДЗ(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0, \\ \ldots \\ f_n(x)=0. \end{array}\right.$

Проиллюстрируем сказанное на примере.

Пример 11. Решите уравнение $16\sqrt[4]{3-x}=x^2\sqrt[4]{3-x}$.

Решение. Сгруппируем все члены уравнения в левой части и вынесем общий множитель за скобки. Тогда данное уравнение равносильно уравнению $(16-x^2)\sqrt[4]{3-x}=0$, которое, в свою очередь, равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 16-x^2=0, \\ 3-x\ge 0; \end{cases} \\ 3-x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (4-x)(4+x)=0, \\ x\le 3; \end{cases} \\ x=3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\pm 4, \\ x\le 3; \end{cases} \\ x=3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Условие $3-x\ge 0$ в системе появилось как условие существования корня $\sqrt[4]{3-x}$.

Ответ: $x_1=-4$; $x_2=3$.

Рассмотрим пример решения иррационального неравенства методом разложения на множители.

Пример 12. Решите неравенство $(x+1)\sqrt{x^2-x-6} \ge 6x+6$.

Решение. Перенесем слагаемые в левую часть неравенства: $(x+1)\sqrt{x^2-x-6}-(6x+6) \ge 0$. Разложим на множители: $(x+1)(\sqrt{x^2-x-6}-6) \ge 0$.

Перейдем к решению совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1 \ge 0, \\ \sqrt{x^2-x-6}-6 \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x+1 \le 0, \\ \sqrt{x^2-x-6}-6 \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge -1, \\ \sqrt{x^2-x-6} \ge 6; \end{cases} \\ \begin{cases} x \le -1, \\ \sqrt{x^2-x-6} \le 6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge -1, \\ x^2-x-6 \ge 36, \end{cases} \\ \begin{cases} x \le -1, \\ x^2-x-6 \ge 0, \\ x^2-x-6 \le 36 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge -1, \\ x^2-x-42 \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x \le -1, \\ \left[\begin{array}{l} x \le -2, \\ x \ge 3, \end{array}\right. \\ x^2-x-42 \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge -1, \\ \left[\begin{array}{l} x \le -6, \\ x \ge 7, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x \le -2, \\ -6 \le x \le 7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 7, \\ -6 \le x \le -2. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \ge 7,\ -6 \le x \le -2$.

Иногда левая часть иррационального неравенства уже представлена в виде произведения двух функций. Особо следует рассмотреть случай, когда неравенство имеет вид $\sqrt[2n]{f(x)} \cdot g(x) \ge 0, n \in N$. Решение такого неравенства с помощью совокупности систем часто производится с ошибками. Поэтому остановимся на этом подробнее.

Нестрогий знак в данном неравенстве позволяет заменить неравенство равносильной ему совокупностью:

$$\left[\begin{array}{ll} \sqrt[2n]{f(x)} \cdot g(x) = 0, & (7) \\ \sqrt[2n]{f(x)} \cdot g(x) > 0. & (8) \end{array}\right.$$

Решение уравнения (7) производим по правилу расщепления:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x)\ \textit{определена}; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) = 0, \\ f(x) > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Учитывая неотрицательность значений первого множителя при любом значении x из области его определения, неравенство (8) заменим равносильной ему системой $\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Вторая система в решении уравнения (7) и система, равносильная неравенству (8), могут быть объединены в систему $\begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Поэтому исходное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\sqrt[2n]{f(x)} \cdot g(x) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \ \textit{определена}; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Пример 13. Решите неравенство $(x^2 - 3x - 40) \cdot \sqrt[8]{2x-3} \ge 0$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} 2x - 3 = 0, \\ \begin{cases} x^2 - 3x - 40 \ge 0, \\ 2x - 3 > 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2}, \\ \begin{cases} (x-8)(x+5) \ge 0, \\ x > \dfrac{3}{2}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2}, \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le -5, \\ x \ge 8, \end{array}\right. \\ x > \dfrac{3}{2}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2}, \\ x \ge 8. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \ge 8,\ x = \dfrac{3}{2}$.

При решении методом разложения на множители иррациональных неравенств приходится сравнивать с нулем произведение нескольких множителей. Наиболее рациональным способом решения неравенства в этом случае является *метод интервалов*. Напомним его основную идею. Пусть задана функция $f(x)$, тогда числовая прямая разбивается на четыре множества:

A – множество точек, для которых $f(x) > 0$;

B – множество точек, для которых $f(x) = 0$;

C – множество точек, для которых $f(x) < 0$;

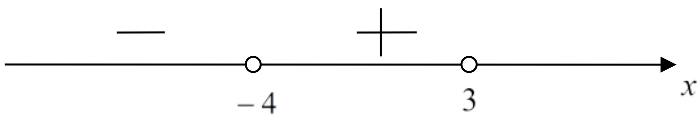
D – множество точек, для которых $f(x)$ не определена.

Решение неравенства разбивается на следующие этапы. Сначала находят граничные точки множеств A, B, C и D. Найденные точки разбивают числовую прямую на интервалы. Для каждого интервала определяют, к какому из четырех множеств относятся принадлежащие ему точки. Наконец, выбирают множества, соответствующие смыслу решаемого неравенства.

Отличительной особенностью иррациональных неравенств является ограниченность их области определения, поэтому обычно начинают решать неравенство с отыскания ОДЗ, затем находят корни уравнения $f(x) = 0$ и, наконец, определяют знаки функции на каждом интервале числовой оси, где функция определена.

Пример 14. Решите неравенство $(16 - x^2)\sqrt[4]{3-x} > 0$.

Решение. Прежде чем решать неравенство, найдем его ОДЗ: $3-x\ge 0 \Leftrightarrow x\le 3$. Найдем корни уравнения $(16-x^2)\sqrt[4]{3-x}=0$ (см. пример 11): $x_1=-4, x_2=3$. Отметим их на части числовой оси, входящей в ОДЗ неравенства, выколотыми точками, так как неравенство строгое. Определим знаки выражения, стоящего в левой части неравенства, в каждом из получившихся промежутков:



Выделим промежутки, на которых выражение принимает положительные значения: $-4<x<3$.

Ответ: $-4<x<3$.

Пример 15. Решите неравенство $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{13-x^2}}\ge x-1$.

Решение. Воспользуемся методом интервалов. Перепишем неравенство в виде $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{13-x^2}}-(x-1)\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)((x+1)-\sqrt{13-x^2})}{\sqrt{13-x^2}}\ge 0$.

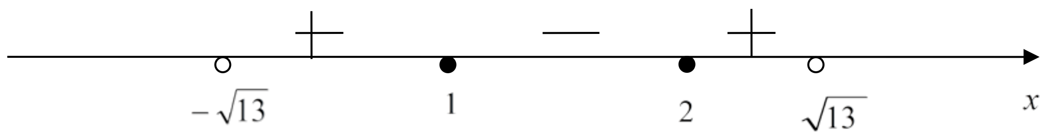
Найдем область определения неравенства: $13-x^2>0 \Leftrightarrow D_f=(-\sqrt{13};\sqrt{13})$.

Находим нули функции, стоящей в левой части преобразованного неравенства, принадлежащие найденной области D_f. Для этого достаточно найти нули числителя дроби, т. е. решить систему:

$$\begin{cases}-\sqrt{13}<x<\sqrt{13},\\ \left[\begin{array}{l}x-1=0,\\ x+1-\sqrt{13-x^2}=0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\sqrt{13}<x<\sqrt{13},\\ \left[\begin{array}{l}x=1,\\ \sqrt{13-x^2}=x+1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\sqrt{13}<x,\sqrt{13},\\ \left[\begin{array}{l}x=1,\\ \begin{cases}13-x^2=(x+1)^2,\\ x+1\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\sqrt{13}<x<\sqrt{13},\\ \left[\begin{array}{l}x=1,\\ \begin{cases}x^2+x-6=0,\\ x\ge -1\end{cases}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-\sqrt{13}<x<\sqrt{13},\\ \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=2.\end{array}\right.$$

Нули функции разбивают множество D_f на три промежутка. Установим знак функции на каждом интервале:



Итак, дробь принимает неотрицательные значения при $-\sqrt{13}<x\le 1$ и $2\le x<\sqrt{13}$.

Ответ: $-\sqrt{13}<x\le 1$, $2\le x<\sqrt{13}$.

2.2. Введение нового неизвестного. Однородные уравнения

Мощным средством решения иррациональных уравнений и неравенств является метод введения вспомогательного неизвестного. Введение новой переменной применяется в том случае, если в уравнении (неравенстве) неоднократно встречается некоторое выражение, зависящее от неизвестной величины. Тогда имеет смысл обозначить это выражение какой-нибудь буквой и попытаться решить уравнение (неравенство) сначала относительно введенной неизвестной, а потом уже найти значения исходной неизвестной. В ряде случаев удачная замена неизвестной облегчает преобразования и упрощает решение задачи; иногда без замены решить уравнение (неравенство) вообще невозможно.

Замена переменной особенно полезна, если в ее результате достигается новое качество уравнения (неравенства), например, иррациональное уравнение (неравенство) превращается в рациональное. Подобные подстановки часто называют *рационализирующими*.

Пример 16. Решите уравнение $2x^2+3x+\sqrt{2x^2+3x+9}=33$.

Решение. Введем новую переменную $y=\sqrt{2x^2+3x+9}$, $y\ge 0$. Для новой переменной уравнение перепишется в виде $y^2+y-9=33$. Решая его, находим корни $y_1=6, y_2=-7$. Корень y_2 является посторонним, так как не удовлетворяет условию $y\ge 0$. Осталось решить уравнение

$$\sqrt{2x^2+3x+9}=6 \Leftrightarrow 2x^2+3x+9=36 \Leftrightarrow 2x^2+3x-27=0 \Leftrightarrow x_1=3,\ x_2=-\frac{9}{2}.$$

Ответ: $x_1=3,\ x_2=-\frac{9}{2}$.

Пример 17. Решите уравнение $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}-2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}}=1$.

Решение. Введем новую переменную $y=\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$, $y>0$, относительно которой исходное уравнение принимает вид $y-\frac{2}{y}=1$. Путем равносильных преобразований (при условии положительности y) оно приводится к квадратному уравнению $y^2-y-2=0$, имеющему единственный положительный корень $y=2$.

Возвращаясь к исходной неизвестной, получим уравнение $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}=2$. Его решение представим цепочкой равносильных преобразований:

$$\frac{2x+1}{x-1}=4 \Leftrightarrow \frac{2x+1-4(x-1)}{x-1}=0 \Leftrightarrow \frac{-2x+5}{x-1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}-2x+5=0,\\ x-1\ne 0;\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}.$$

Ответ: $x=\frac{5}{2}$.

Рационализирующие подстановки эффективны также для решения иррациональных неравенств (примеры неравенств можно сконструировать на основе рассмотренных уравнений), при этом «подсказкой» к использованию замены также служит повторение одного и того же выражения относительно неизвестной. Рассмотрим пример, в котором такой «подсказки» нет, но рационализирующая замена возможна.

Пример 18. Решите неравенство $\frac{3-x}{\sqrt{15-x}}<1$.

Решение. Введем новую переменную t с помощью рационализирующей подстановки $\sqrt{15-x}=t, t>0$. Тогда $x=15-t^2$. Получаем неравенство:

$$\frac{3-\left(15-t^2\right)}{t}<1 \Leftrightarrow \frac{t^2-t-12}{t}<0 \Leftrightarrow \frac{(t+3)(t-4)}{t}<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-3, \\ 0<t<4. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $t>0$, получаем $0<t<4$. Далее решаем систему иррациональных неравенств относительно переменной x:

$$\begin{cases} \sqrt{15-x}>0, \\ \sqrt{15-x}<4 \end{cases} \Leftrightarrow 0<15-x<16 \Leftrightarrow -15<-x<1 \Leftrightarrow -1<x<15.$$

Ответ: $-1<x<15$.

Рассмотрим уравнения, в которых кроме метода введения нового неизвестного используется и метод выделения полного квадрата. Обычно так решаются уравнения, которые имеют радикалы в подкоренных выражениях, причем для выделения полного квадрата степени многочленов, стоящих под «внутренним» и «внешним» радикалами, должны совпадать.

Пример 19. Решите уравнение $\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}=2$.

Решение. Введем новую переменную $y=\sqrt{x-2}$, $y\geq 0$. Тогда $x=y^2+2$ и исходное уравнение перепишется в виде: $\sqrt{y^2-2y+1}+\sqrt{y^2-6y+9}=2 \Leftrightarrow$ $\sqrt{(y-1)^2}+\sqrt{(y-3)^2}=2 \Leftrightarrow |y-1|+|y-3|=2$ (использовалось тождество $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|, n\in N, a\in R$). Решив полученное уравнение с модулями, последовательно раскрывая модули на промежутках $0\leq y\leq 1; 1<y\leq 3; y>3$, найдем, что $1\leq y\leq 3$.

На последнем этапе решаем систему иррациональных неравенств:

$$\begin{cases} \sqrt{x-2}\geq 1, \\ \sqrt{x-2}\leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1\leq x-2\leq 9 \Leftrightarrow 3\leq x\leq 11.$$

Ответ: $3\leq x\leq 11$.

Особым типом уравнений, решаемых с помощью замены переменных, являются *однородные уравнения* (см. [12, с. 39–40]). Чаще всего встречаются однородные уравнения второй степени. Напомним, что *однородным уравнением второй степени относительно выражений p(x)* и *q(x)* называют уравнение вида $ap^2+bpq+cq^2=0, a\neq 0, c\neq 0$. Решение однородного уравнения разбивается на два этапа:

1. Проверить, имеет ли решения система $\begin{cases} p(x)=0, \\ q(x)=0. \end{cases}$

2. При ограничениях $p(x)\neq 0,\ q(x)\neq 0$ выполнить деление уравнения на старшую степень одного из выражений $p(x)$ или $q(x)$ и свести уравнение к рациональному введением новой переменной $y=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ или $y=\dfrac{q(x)}{p(x)}$.

Любое однородное уравнение второй степени приводится к квадратному уравнению.

Пример 20. Решите уравнение: $6x^2+7x\sqrt{1+x}=24(1+x)$.

Решение. Перенесем слагаемое $24(1+x)$ в левую часть уравнения, получим однородное уравнение второй степени относительно выражений x и $\sqrt{1+x}$: $6x^2+7x\sqrt{1+x}-24\left(\sqrt{1+x}\right)^2=0$. Выражения x и $\sqrt{1+x}$ одновременно не равны нулю, поэтому можно производить деление уравнения на вторую степень одного из выражений. Выполним почленное деление на $(1+x)$, получим: $6\dfrac{x^2}{1+x}+7\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}-24=0$. Введем новую переменную $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$, относительно которой получаем квадратное уравнение $6y^2+7y-24=0$, имеющее два корня: $y_1=\dfrac{3}{2}; y_2=-\dfrac{8}{3}.$

Решим иррациональные уравнения при условии, что $x\neq 0, \sqrt{1+x}\neq 0$:

1. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 3\sqrt{1+x}=2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\geq 0, \\ 9(1+x)=4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0, \\ 4x^2-9x-9=0; \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$

2. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}=-\dfrac{8}{3} \Leftrightarrow 8\sqrt{1+x}=-3x \Leftrightarrow \begin{cases} -3x\geq 0, \\ 64(1+x)=9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 0, \\ 9x^2-64x-64=0; \end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{8}{9}$

.

Ответ: $x_1=3,\ x_2=-\dfrac{8}{9}$.

2.3. Использование свойств функций

Ограниченность области определения

Пример 21. Решите уравнение $\sqrt[6]{5-x}-\sqrt[8]{7-x}+\sqrt[4]{2x-15}=2$.

Решение. Найдем область определения уравнения: $\begin{cases} 5-x\ge 0, \\ 7-x\ge 0, \\ 2x-15\ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 5, \\ x\ge 7{,}5. \end{cases}$

Последняя система не имеет решения. Значит, и исходное уравнение не имеет корней.

Ответ: корней нет.

Конечно, нахождения ОДЗ уравнения (неравенства) не всегда достаточно для получения ответа, но знание ОДЗ помогает при дальнейшем решении уравнения (неравенства) избавляться от накладывания дополнительных ограничений на неизвестную. Иллюстрацией этого является следующий пример.

Пример 22. Решите неравенство $\dfrac{1}{3+\sqrt{9-x^2}}+\dfrac{1}{3-\sqrt{9-x^2}}>\dfrac{1}{x}$.

Решение. ОДЗ данного неравенства определяется системой ограничений:

$$\begin{cases} 3+\sqrt{9-x^2}\ne 0, \\ 3-\sqrt{9-x^2}\ne 0, \\ 9-x^2\ge 0, \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9-x^2\ne 9, \\ (3-x)(3+x)\ge 0, \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 0, \\ -3\le x\le 3. \end{cases}$$

Производим преобразования неравенства, не заботясь об их равносильности:

$$\frac{x(3-\sqrt{9-x^2}+3+\sqrt{9-x^2})-(3-\sqrt{9-x^2})(3+\sqrt{9-x^2})}{x(9-9+x^2)}>0 \Leftrightarrow \frac{6x-x^2}{x^3}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6-x}{x^2}>0.$$

Находим решение последнего неравенства $x<6, x\ne 0$. С учетом ОДЗ множеством решений исходного неравенства будет $[-3;0)\cup(0;3]$.

Ответ: $-3\le x\le 3, x\ne 0$.

Ограниченность множества значений

Пример 23. Решите неравенство $\sqrt[8]{x^3+3x^2-16x+\sqrt{2}-1}\le -1-2x^2$.

Решение. Исследуем множества значений функций, стоящих в левой и правой частях неравенства. Левая часть неравенства представляет собой неотрицательную функцию. Правая же часть – отрицательна, так как для любого x имеет место неравенство $x^2\ge 0$, тогда $-2x^2\le 0$, а $-1-2x^2\le -1$. Таким образом, неравенство решений не имеет.

Ответ: решений нет.

Пример 24. Решите уравнение $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+1}=3-5x^2$.

Решение. Исследуем множества значений функций, стоящих в левой и правой частях уравнения. Левая часть: $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+1}\geq\sqrt{4}+\sqrt{1}\geq 3$; причем равенство достигается только при x = 0. Правая часть: $3-5x^2\leq 3$; причем равенство достигается только при x = 0. Следовательно, равенство функций возможно, только если обе они принимают значение 3, которое достигается при $x=0$. При всех других значениях x функция, стоящая в левой части уравнения, принимает значения, большие 3; функция, стоящая в правой части уравнения, – меньшие 3, следовательно, $x=0$ – единственный корень уравнения.

Ответ: $x=0$.

Проводить исследование множеств значений функций, входящих в уравнение (неравенство), имеет смысл, если они каким-либо образом ограничены. В рассмотренных примерах исследование множеств значений было эффективным, так как функции вида $y=\sqrt[2n]{t}, n\in N$ в левых частях уравнений ограничены снизу, а квадратные трехчлены, стоящие справа, ограничены сверху. Заметим, что исследование множеств значений позволяет обосновать единственность корня в последнем примере. Другим способом доказательства единственности найденного корня является *использование свойства монотонности функций,* входящих в уравнение. Приведем пример.

Пример 25. Решите уравнение $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$.

Решение. Корень $x=1$ уравнения можно найти подбором. Действительно, $\sqrt[3]{2\cdot 1-1}+\sqrt[3]{1-1}=1+0=1$. Докажем, что других корней уравнение не имеет. Левая часть уравнения представляет собою сумму двух функций $y_1=\sqrt[3]{2x-1}$ и $y_2=\sqrt[3]{x-1}$, определенных на всей числовой оси. Функция $y_1=\sqrt[3]{2x-1}$ представляет собой композицию двух функций: $y_1=\sqrt[3]{t_1}, t_1=2x-1$. Каждая из указанных функций возрастает, поэтому и функция $y_1=\sqrt[3]{2x-1}$ также возрастает на всей числовой оси. Аналогично функция $y_2=\sqrt[3]{x-1}$ возрастает на всей числовой оси. Следовательно, возрастает функция $y_1+y_2=\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}$, т. е. в левой части уравнения находится возрастающая функция. Любая монотонная функция (возрастающая или убывающая) на всей области определения принимает каждое свое значение только один раз (при одном и только одном значении x), т. е. корень $x=1$ является единственным для данного уравнения.

Ответ: $x=1$.

В подобных случаях решение уравнения состоит из двух этапов: 1) угадывание корня; 2) доказательство его единственности. Свойство монотонности функции может также использоваться для сокращения самого процесса решения уравнения. Основанием для этого в большинстве случаев является использование свойства строго монотонной (монотонно возрастающей / монотонно убывающей) функции принимать каждое из своих возможных значений только один раз (при одном значении аргумента).

Пример 26. Решите уравнение $(2x+1)\sqrt{7+(2x+1)^2}+x\sqrt{x^2+7}=0$.

Решение. Данное уравнение определено для всех действительных x. Рассмотрим функцию $f(y)=y\sqrt{y^2+7}$, определенную для всех действительных y. Тогда исходное уравнение можно представить в виде $f(2x+1)+f(x)=0$ или $f(2x+1)=-f(x)$. Заметим, что функция $f(y)$ является нечетной, т. е. $f(-y)=-f(x)$. Тогда уравнение примет вид $f(2x+1)=f(-x)$.

Докажем, что функция $f(y)$ возрастает. Для этого найдем ее производную $f'(y)=\sqrt{y^2+7}+\dfrac{y\cdot 2y}{2\sqrt{y^2+7}}=\dfrac{y^2+7+y^2}{\sqrt{y^2+7}}=\dfrac{2y^2+7}{\sqrt{y^2+7}}$. При любом действительном значении y производная $f'(y)>0$, значит, функция $f(y)$ возрастает на множестве действительных чисел. Каждое свое значение монотонная функция принимает только один раз, поэтому значения функции могут совпадать только при совпадении значений аргументов, значит, уравнение $f(2x+1)=f(-x)$ равносильно уравнению $2x+1=-x$, корнем которого является $x=-\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $x=-\dfrac{1}{3}$.

Рассмотрим еще один прием, значительно сокращающий решение уравнения и основанный на использовании монотонности функции. Его дает следующее утверждение.

Теорема. Если $f(x)$ – строго монотонная функция, то уравнения $f(f(x))=x$ и $f(x)=x$ равносильны.

Доказательство. Пусть x_0 – корень уравнения $f(x)=x$, т. е. верно равенство $f(x_0)=x_0$. Используем его для подстановки в первое уравнение $f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$, т. е. получили верное равенство $f(f(x_0))=x_0$, значит, x_0 является корнем уравнения $f(f(x))=x$. Обратно, пусть x_0 – корень уравнения $f(f(x))=x$, т. е. верно равенство $f(f(x_0))=x_0$. В силу строгой монотонности функция $f(x)$ имеет обратную $f^{-1}(x)$, также строго монотонную. Подействуем функцией $f^{-1}(x)$ на полученное верное равенство, получим новое верное равенство $f(x_0)=f^{-1}(x_0)$. Две взаимно обратные функции принимают равные значения только при $x=f(x)=f^{-1}(x)$, т. е. верно равенство $x_0=f(x_0)$, означающее, что x_0 является корнем уравнения $f(x)=x$.

Пример 27. Решите уравнение $\sqrt{1+\sqrt{x}}=x-1$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $1+\sqrt{1+\sqrt{x}}=x$. Введем в рассмотрение функцию $f(x)=1+\sqrt{x}$, которая монотонно возрастает на множестве $[0;+\infty)$ как сумма постоянной и возрастающей функций. Тогда уравнение принимает вид $f(f(x))=x$ и для решения можно использовать теорему. Переходим к равносильному уравнению $f(x)=x$ или $1+\sqrt{x}=x$. Последнее уравнение с помощью замены $y=\sqrt{x}, y\geq 0$ сводим к квадратному уравнению $y^2-y-1=0$. Находим его корни $y_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, один из которых ($y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$) не удовлетворяет условию $y\geq 0$.

Получаем: $\sqrt{x}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow x=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\Leftrightarrow x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

3. Специальные приемы решения иррациональных уравнений

3.1. Сведение к системе рациональных уравнений

Для решения иррациональных уравнений методом замены может использоваться не одна, а несколько новых переменных. При этом для однозначности определения значения исходной неизвестной данное уравнение заменяют системой рациональных уравнений.

Пример 28. Решите уравнение $\sqrt{x^2-\dfrac{7}{x^2}}+\sqrt{x-\dfrac{7}{x^2}}=x.$

Решение. Введем новые переменные $u=\sqrt{x^2-\dfrac{7}{x^2}}, u\geq 0,\ \ v=\sqrt{x-\dfrac{7}{x^2}}, v\geq 0.$

Тогда исходное уравнение примет вид $u+v=x$. Взаимосвязь квадратов новых переменных выражается равенством $u^2-v^2=x^2-x$. Итак, получили систему уравнений: $\begin{cases}u+v=x,\\ u^2-v^2=x^2-x.\end{cases}$

Преобразуем второе уравнение системы: $(u+v)(u-v)=x(x-1)$. Тогда, учитывая условие $u+v=x$, имеем $x(u-v)=x(x-1)$. Так как одно из условий ОДЗ исходного уравнения $x\neq 0$, то u и v должны удовлетворять системе $\begin{cases}u+v=x,\\ u-v=x-1.\end{cases}$

Решая ее методом сложения, получаем систему: $\begin{cases}u=x-0{,}5,\\ v=0{,}5.\end{cases}$

Тогда имеем уравнение $\sqrt{x-\frac{7}{x^2}}=0{,}5 \Leftrightarrow x-\frac{7}{x^2}=0{,}25$.

Сводим получившееся уравнение к кубическому $4x^3-x^2-28=0$, имеющему единственный корень $x=2$. Проверкой убеждаемся, что $x=2$ – корень исходного уравнения.

Ответ: $x=2$.

Заметим, что при таком способе решения происходит переход от исходного уравнения к системе уравнений-следствий, поэтому возможно появление посторонних корней. Для их отбора на последнем этапе решения производится проверка.

3.2. Умножение на сопряженное выражение

Если в уравнение входит сумма или разность радикалов со схожими подкоренными выражениями, можно попытаться использовать прием умножения на сопряженное выражение. Напомним, что выражение, сопряженное данному иррациональному выражению, отличается от исходного лишь знаком между радикалами, т. е. сумма корней и их разность – взаимно сопряженные выражения.

Пример 29. Решите уравнение $\sqrt{x^2+5x+3}-\sqrt{x^2+3x+2}=2x+1$.

Решение. В левой части уравнения находится разность радикалов, поэтому умножим обе части уравнения на сумму корней (выражение, не равное нулю). Получаем:

$$x^2+5x+3-(x^2+3x+2)=(\sqrt{x^2+5x+3}+\sqrt{x^2+3x+2})(2x+1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x+1=(\sqrt{x^2+5x+3}+\sqrt{x^2+3x+2})(2x+1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x+1)(\sqrt{x^2+5x+3}+\sqrt{x^2+3x+2}-1)=0.$$

По правилу расщепления рассмотрим два возможных варианта:

1. $2x+1=0$, откуда $x=-0{,}5$.

2. $\sqrt{x^2+5x+3}+\sqrt{x^2+3x+2}=1$. Это уравнение можно решить возведением в квадрат, но в данном случае более рационально будет рассмотреть его в системе с исходным: $\begin{cases}\sqrt{x^2+5x+3}+\sqrt{x^2+3x+2}=1,\\ \sqrt{x^2+5x+3}-\sqrt{x^2+3x+2}=2x+1.\end{cases}$

Сумма уравнений системы является следствием исходного уравнения, но имеет более простой вид $\sqrt{x^2+5x+3}=x+1$. Решение полученного уравнения дает еще один корень $x=-\frac{2}{3}$.

Проверка найденных корней подстановкой в исходное уравнение показывает, что оба найденных значения являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = -0{,}5$; $x_2 = -\dfrac{2}{3}$.

Умножение на сопряженное выражение эффективно в тех случаях, когда подкоренные выражения отличаются либо на постоянную, либо на выражение, также входящее в уравнение (как в рассмотренном примере). Отметим, что в процессе решения происходит переход к уравнению-следствию, поэтому на заключительном этапе производится проверка.

3.3. Замена суммы (разности) радикалов

Указанный прием чаще всего используется при решении иррациональных уравнений третьей степени, имеющих вид $\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{g(x)} = h(x)$. Суть его заключается в том, что на определенном этапе решения сумма (разность) радикалов $\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{g(x)}$ заменяется более простым выражением $h(x)$. Такая подстановка избавляет от необходимости повторного возведения в степень и приводит к решению более простого уравнения.

Пример 30. Решите уравнение $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}$.

Решение. Возведем обе части уравнения в куб. Получаем равносильное уравнение:

$$x + 1 + 3\sqrt[3]{(x+1)^2} \cdot \sqrt[3]{3x+1} + 3\sqrt[3]{(3x+1)^2} \cdot \sqrt[3]{x+1} + 3x + 1 = x - 1.$$

Последовательно произведем преобразования уравнения: перенесем рациональные слагаемые в правую часть уравнения; приведем в ней подобные слагаемые; поделим уравнение на 3; разложим выражение, стоящее в левой части, на множители. Получим следующее равносильное уравнение: $\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)}(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1}) = -x - 1$.

Исходя из исходного уравнения, сумму радикалов $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1}$ заменим выражением $\sqrt[3]{x-1}$.

При этом получим уравнение-следствие $\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)(x-1)} = -x - 1$.

Возведем обе его части в куб и преобразуем:

$$(x+1)(3x+1)(x-1) = -(x+1)^3 \Leftrightarrow (x+1)[(3x+1)(x-1) + (x+1)^2] = 0 \Leftrightarrow (x+1)\cdot 4x^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 0.$$

При замене суммы радикалов могли появиться посторонние корни, поэтому необходима проверка. При $x = -1$ левая часть исходного уравнения: $\sqrt[3]{-1+1} + \sqrt[3]{3\cdot(-1)+1} = \sqrt[3]{0} + \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$, правая часть: $\sqrt[3]{-1-1} = -\sqrt[3]{2}, -\sqrt[3]{2} = -\sqrt[3]{2}$ – верно, значит, $x = -1$ – корень исходного уравнения.

При $x=0$ левая часть исходного уравнения: $\sqrt[3]{0+1}+\sqrt[3]{3\cdot 0+1}=\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}=1$, правая часть: $\sqrt[3]{0-1}=\sqrt[3]{-1}=-1$, $1=-1$ – неверно, значит, $x=0$ не является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x=-1$.

Рассмотренный пример ярко иллюстрирует необходимость проведения проверки корней при использовании приема замены. Появление посторонних корней обусловлено тем, что сумма (разность) радикалов не тождественно равна выражению, стоящему в правой части исходного уравнения. Их равенство достигается лишь при таких значениях *x*, которые удовлетворяют данному уравнению. Поэтому уравнение, полученное в результате замены, является следствием исходного, а значит, проверка найденных значений неизвестного выступает обязательным этапом решения уравнения с использованием описанного здесь приема замены.

3.4. Тригонометрические подстановки

Иногда иррациональное уравнение подходящей заменой можно свести к тригонометрическому уравнению. При этом полезными могут оказаться следующие рекомендации:

<table>
<tr><td colspan="6">Если в уравнение входит радикал</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\sqrt{a^2-x^2}$</td><td colspan="2">$\sqrt{a^2+x^2}$</td><td colspan="2">$\sqrt{x^2-a^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="6">то можно сделать замену переменной</td></tr>
<tr><td>$x=a\sin t$</td><td>$x=a\cos t$</td><td>$x=a\cdot tgt$</td><td>$x=a\cdot ctgt$</td><td>$x=\dfrac{a}{\sin t}$</td><td>$x=\dfrac{a}{\cos t}$</td></tr>
<tr><td colspan="6">где для определенности (однозначности соответствия переменных x и t)</td></tr>
<tr><td>$t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$</td><td>$t\in[0;\pi]$</td><td>$t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$</td><td>$t\in(0;\pi)$</td><td>$t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};0\right)\cup$ $\cup\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right]$</td><td>$t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)\cup$ $\cup\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$</td></tr>
<tr><td colspan="6">при этом радикал заменяется выражением</td></tr>
<tr><td>$a\cos t$</td><td>$a\sin t$</td><td>$\dfrac{a}{\cos t}$</td><td>$\dfrac{a}{\sin t}$</td><td>$a\cdot ctgt$</td><td>$a\cdot tgt$</td></tr>
</table>

Пример 31. Решите уравнение $\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{5}{2\sqrt{x^2+1}}$.

Решение. В данное уравнение входит радикал $\sqrt{x^2+1}$, поэтому сделаем замену $x=tgt$, где $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$. Тогда радикал можно преобразовать к виду

$\sqrt{x^2+1}=\sqrt{tg^2t+1}=\dfrac{1}{\cos t}$ и исходное уравнение перепишется в виде $\dfrac{1}{\cos t}-tgt=\dfrac{5}{2}\cos t$. При рассматриваемых значениях t выражение $\cos t\neq 0$, поэтому перейдем к равносильному ему уравнению $2-2\sin t=5(1-\sin^2 t)$, которое сведем к квадратному относительно $\sin t$ и найдем его корни $\sin t=1$ и $\sin t=-\dfrac{3}{5}$. Промежутку $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ принадлежит единственное значение из возможных: $t=\arcsin\left(-\dfrac{3}{5}\right)=-\arcsin\dfrac{3}{5}$. Поэтому исходное уравнение имеет единственный корень:

$$x=tg\left(-\arcsin\frac{3}{5}\right)=-tg\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)=-\frac{\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)}{\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)}=-\frac{\frac{3}{5}}{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)}}=-\frac{\frac{3}{5}}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}}=-\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}.$$

Ответ: $x=-\dfrac{3}{4}$.

Упражнения и ответы

№ 1. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x^2+2x-8}=0$; **2)** $\sqrt{x^2+2x-8}=4$; **3)** $\sqrt{x^2+2x-8}+5=0$; **4)** $\sqrt{13-x^2}=x+1$;
5) $\sqrt{x^2-3x+4}=1-3x$; **6)** $x-\sqrt{x-1}=3$; **7)** $\sqrt{4x^2-1}=\sqrt{-3x}$; **8)** $\sqrt{2x-1}-\sqrt{2-x}=0$;
9) $\sqrt{x+15}+\sqrt{x+3}=6$; **10)** $\sqrt{5x-3}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-2}$;
11) $(x+2)\sqrt{x^2-x-20}=6x+12$; **12)** $4\sqrt{x}+x-5=0$; **13)** $\dfrac{2x+1}{x}-2\sqrt{\dfrac{2x+1}{x}}-3=0$;
14) $\sqrt{\dfrac{x+4}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+4}}=\dfrac{5}{6}$; **15)** $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}$;
16) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$; **17)** $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}=2\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}$;
18) $\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}=8\sqrt[3]{(x-1)^2}$; **19)** $\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}=3$;
20) $\sqrt{x^2-4x+8}+\sqrt{2x^2-8x+9}=12x-9-3x^2$; **21)** $\sqrt{7+3x}-\sqrt{5-4x}=1-2\sqrt{x+2}$;
22) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}$; **23)** $\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{2x-6}=2$;
24) $\sqrt[3]{(29-x)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}=7+\sqrt[3]{(29-x)(x-1)}$; **25)** $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3$;
26) $\sqrt{\dfrac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}+2x^2=1$.

№ 2. Решите неравенство:

1) $\sqrt{x^2+2x-8}>0$; **2)** $\sqrt{x^2+2x-8}<0$; **3)** $\sqrt{x^2+2x-8}>4$; **4)** $\sqrt{x^2+2x-8}<4$;
5) $\sqrt{x^2+2x-8}>-5$; **6)** $\sqrt{x^2+2x-8}<-5$; **7)** $\sqrt{x^2-7}\le\sqrt{2}$; **8)** $\sqrt{x+3}\le 0$;
9) $\sqrt{13-x^2}>x+1$; **10)** $\sqrt{13-x^2}<x+1$; **11)** $\sqrt{x^2-4x}\ge x-3$;

12) $\sqrt{x^2-5x+6}\le x+4$; **13)** $\sqrt{x^2+2x}\ge -3-x^2$; **14)** $\sqrt{4x^2-1}>\sqrt{-3x}$;

15) $\sqrt{4x^2-1}<\sqrt{-3x}$; **16)** $\sqrt{2x-1}\le\sqrt{2+x}$; **17)** $\sqrt{2x-1}\ge\sqrt{2+x}$;

18) $\dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10}\le\dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}$; **19)** $\dfrac{1-\sqrt{21-4x-x^2}}{x+1}\ge 0$;

20) $\dfrac{3\left(4x^2-9\right)}{\sqrt{3x^2-3}}\le 2x+3$; **21)** $\sqrt{|1-8x|-2}\le x+1$;

22) $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}<35-2x$; **23)** $\dfrac{2x+1}{x}-2\sqrt{\dfrac{2x+1}{x}}-3\le 0$.

Ответы: № 1.

1) $x_1=-4, x_2=2$; **2)** $x_1=-6, x_2=4$; **3)** корней нет; **4)** $x=2$;

5) $x=\dfrac{3-\sqrt{105}}{16}$; **6)** $x=5$; **7)** $x=-1$; **8)** $x=1$; **9)** $x=1$; **10)** $x=\dfrac{2}{3}$; **11)** $x_1=-7, x_2=8$;

12) $x=1$; **13)** $x=\dfrac{1}{7}$; **14)** $x=5$; **15)** $x=\dfrac{1}{2}$; **16)** $[5;10]$; **17)** $x=-\dfrac{5}{2}$;

18) $x_1=\dfrac{63}{65}, x_2=\dfrac{9}{7}$; **19)** корней нет; **20)** $x=2$; **21)** $x=-1$;

22) $x_1=8, x_{2,3}=8\pm\dfrac{12\sqrt{21}}{7}$; **23)** $x_1=-1, x_2=3, x_3=35$; **24)** $x_1=28, x_2=2$;

25) $x_1=1, x_2=2$; **26)** $x_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, x_2=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Ответы: № 2.

1) $x<-4, x>2$; **2)** решений нет; **3)** $x<-6, x>4$; **4)** $-6<x\le-4; 2\le x<4$;

5) $x\le-4; x\ge 2$; **6)** решений нет; **7)** $-3\le x\le-\sqrt{7}; \sqrt{7}\le x\le 3$; **8)** $x=-3$;

9) $-\sqrt{13}\le x<2$; **10)** $2<x\le\sqrt{13}$; **11)** $(-\infty;0], [4,5;+\infty)$; **12)** $\left[-\dfrac{10}{13};2\right], [3;+\infty)$;

13) $x\le-2; x\ge 0$; **14)** $x<-1$; **15)** $-1<x\le-\dfrac{1}{2}$; **16)** $\dfrac{1}{2}\le x\le 3$; **17)** $x\ge 3$;

18) $[-4;1], x=2$; **19)** $\left[-2-2\sqrt{6};-1\right), \left[-2+2\sqrt{6};3\right]$; **20)** $\left[-\dfrac{3}{2};-1\right), (1;2]$;

21) $\left[-5+\sqrt{23};-\dfrac{1}{8}\right], \left[\dfrac{3}{8};3-\sqrt{5}\right], \left[3+\sqrt{5};+\infty\right)$; **22)** $\left[0;\dfrac{841}{144}\right)$; **23)** $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right], \left[\dfrac{1}{7};+\infty\right)$.

Тема IV. Показательные уравнения и неравенства

Требования к знаниям и умениям учащихся

Цель изучения темы – систематизация и обобщение знаний о способах решения показательных уравнений и неравенств; формирование умений в решении показательных уравнений и неравенств.

В результате изучения темы учащийся ***знает***:

– определение показательного уравнения (неравенства);

– свойства показательной функции, теоремы о равносильности, используемые при решении показательных уравнений и неравенств;

– типы простейших показательных уравнений и неравенств и способы их решения;

– основные приемы решения простейших показательных уравнений и неравенств;

– общие методы решения уравнений и неравенств, применяемые для решения показательных уравнений и неравенств;

– специальные приемы решения показательных уравнений и неравенств.

В результате изучения темы учащийся ***умеет:***

– решать простейшие показательные уравнения и неравенства;

– применять общие методы решения уравнений и неравенств для решения показательных уравнений и неравенств;

– использовать специальные приемы для решения показательных уравнений и неравенств.

Содержание темы

Определение. Уравнения (неравенства), в которых неизвестное входит только в показатели степеней при постоянных основаниях, называют *показательными.*

Решение показательных уравнений основано на свойствах показательной функции $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

1^0. Область определения – множество всех действительных чисел (R).

2^0. Множество значений функции – множество всех положительных чисел ($a^x > 0$, для всех $x \in R$).

3^0. При $a > 1$ функция возрастает, т. е. если $x_1 < x_2$, то $a^{x_1} < a^{x_2}$. При $0 < a < 1$ функция убывает, т. е. если $x_1 < x_2$, то $a^{x_1} > a^{x_2}$.

4^0. $a^{x_1} = a^{x_2}$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$.

1. Простейшие показательные уравнения и неравенства

На свойстве 4^0 основан метод решения простейших показательных уравнений видов

$$a^x = b \text{ или } a^x = a^c; \qquad (1)$$
$$a^{f(x)} = b \text{ или } a^{f(x)} = a^c; \qquad (2)$$
$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \text{ или } a^{f(x)} = a^{g(x)}. \qquad (3)$$

Решением уравнения $a^x = b$ является $x = \log_a b$ при $a > 0,\ a \neq 1$ и $b > 0$. Если число b можно представить в виде $b = a^c$, то решением уравнения $a^x = a^c$ при $a > 0,\ a \neq 1$ является $x = c$.

Решением уравнения $a^{f(x)} = b$ (логарифмируя его по основанию a) является $f(x) = \log_a b$ при $a > 0,\ a \neq 1$ и $b > 0$, $b \neq 1$. Если число b можно представить в виде $b = a^c$, то решением уравнения $a^{f(x)} = a^c$ при $a > 0,\ a \neq 1$ является $f(x) = c$.

Решением уравнения $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ (логарифмируя его по любому из оснований, в данном случае прологарифмируем по основанию a) является $f(x) = g(x)\log_a b$ при $a > 0,\ a \neq 1$ и $b > 0$, $b \neq 1$. Если число b можно представить в виде $b = a^{g(x)}$, то решением уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ при $a > 0,\ a \neq 1$ является $f(x) = g(x)$.

По аналогии с простейшими показательными уравнениями выделим показательные неравенства:

$$a^x > b \ \left(a^x < b\right) \text{ или } a^x > a^c \ \left(a^x < a^c\right); \qquad (4)$$
$$a^{f(x)} > b \ \left(a^{f(x)} < b\right) \text{ или } a^{f(x)} > a^c \ \left(a^{f(x)} < a^c\right); \qquad (5)$$
$$a^{f(x)} > b^{g(x)} \ \left(a^{f(x)} < b^{g(x)}\right) \text{ или } a^{f(x)} > a^{g(x)} \ \left(a^{f(x)} < a^{g(x)}\right), \text{ где } a > 0,\ a \neq 1. \qquad (6)$$

Метод решения простейших показательных неравенств выделенных видов основан на свойстве монотонности показательной функции (свойство 3^0).

Множеством решений неравенства $a^x > b$ $\left(a^x < b\right)$ или $a^x > a^c$ $\left(a^x < a^c\right)$:

– при $a > 1$, $b > 0$ является $x > \log_a b$ ($x < \log_a b$) или $x > c$ ($x < c$);

– при $0 < a < 1$, $b > 0$ является $x < \log_a b$ ($x > \log_a b$) или $x < c$ ($x > c$);

– при $a > 0$, $b < 0$ любое действительное число (нет решений).

Множеством решений неравенства $a^{f(x)} > b$ $\left(a^{f(x)} < b\right)$ или $a^{f(x)} > a^c$ $\left(a^{f(x)} < a^c\right)$:

– при $a > 1$, $b > 0$ является $x > \log_a b$ ($x < \log_a b$) или $f(x) > c$ ($f(x) < c$);

– при $0 < a < 1$, $b > 0$ является $x < \log_a b$ ($x > \log_a b$) или $f(x) < c$ ($f(x) > c$);

– при $a > 0$, $b < 0$ любое действительное число (нет решений).

Множеством решений неравенства $a^{f(x)} > b^{g(x)}$ $\left(a^{f(x)} < b^{g(x)}\right)$ или $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ $\left(a^{f(x)} < a^{g(x)}\right)$:

– при $a > 1$, $b > 0$ является $f(x) > \log_a b^{g(x)}$ ($f(x) < \log_a b^{g(x)}$) или $f(x) > g(x)$ ($f(x) < g(x)$);

– при $0 < a < 1$, $b > 0$ является $f(x) < \log_a b^{g(x)}$ ($f(x) > \log_a b^{g(x)}$) или $f(x) < g(x)$ ($f(x) > g(x)$).

Проиллюстрируем решение простейших показательных уравнений и неравенств на примерах.

Пример 1. Решить уравнения: а) $4^x = 64$; б) $17^{x-x^2} = 1$; в) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = (6{,}25)^{6x-5}$; г) $3^{2x-1}5^{3x+2} = \left(\frac{9}{5}\right) \cdot 5^{2x}3^{3x}$; д) $\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2} = \left(2+\sqrt{3}\right)^x$;

е) $6^{2x-1}=8^{3-x}$; ж) $7^{2x-4}=36^{2-x}$.

Решение.

а) Число 64 представим как 4^3, тогда данное уравнение примет вид $4^x=4^3$, его решением является $x=3$.

б) Поскольку $1=17^0$, то исходное уравнение равносильно уравнению $x-x^2=0$, $x=0,\ x=1.$

в) Приведем левую часть уравнения к основанию $\frac{2}{5}$: $(6{,}25)^{6x-5}=\left(\frac{25}{4}\right)^{6x-5}=$ $\left(\frac{5}{2}\right)^{12x-10}=\left(\frac{2}{5}\right)^{10-12x}$.

Уравнение $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}=(6{,}25)^{6x-5}$ равносильно уравнению $x-1=10-12x$, которое имеет корень $x=\frac{11}{13}$.

г) Переход к единому основанию можно осуществить делением обеих частей уравнения на выражение, стоящее в правой части уравнения (это можно сделать, так как значения показательной функции положительны). Получим $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+3}=\left(\frac{5}{3}\right)^{0}$, отсюда $x+3=0$, $x=-3$.

д) Данное уравнение равносильно уравнению $\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2}=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-x}$, так как $2+\sqrt{3}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$. Переходим к уравнению $x^2=-x$, его корни $x=0$ и $x=-1$.

е) Обе части уравнения положительны; поэтому можно прологарифмировать его по основанию 6 (можно по основанию 8).

Получим уравнение $2x-1=(3-x)\log_6 8$, равносильное исходному.

Таким образом, $x\cdot(2+\log_6 8)=1+3\log_6 8$, т. е. $x=\frac{1+3\log_6 8}{2+\log_6 8}$.

ж) Преобразуем правую часть уравнения, применив свойства степени, получим $7^{2x-4}=\left(\frac{1}{6}\right)^{2x-4}$.

Умножим уравнение на выражение 6^{2x-4} ($6^{2x-4}>0$ при любых x): $42^{2x-4}=1$, $2x-4=0$, $x=2$.

Ответ: а) 3; б) 0; 1; в) $\frac{11}{13}$; г) -3; д) 0; -1; е) $x=\frac{1+3\log_6 8}{2+\log_6 8}$; ж) $x=2$.

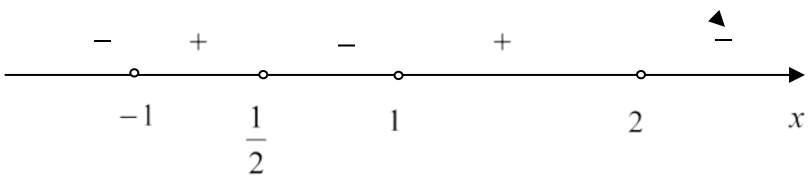
Пример 2. Решить неравенства: а) $25^x>125^{3x-2}$; б) $(0{,}3)^{4x^2-2x-2}\le(0{,}3)^{2x-3}$; в) $2^{\frac{x}{x^2-1}}<2^{\frac{1}{x-2}}$; г) $3^{2x-1}<11^{3-x}$.

Решение.

а) Поскольку $25^x = 5^{2x}$, а $125^{3x-2} = 5^{9x-6}$, то исходное неравенство равносильно неравенству $5^{2x} > 5^{9x-6}$. Учитывая, что функция $y = 5^t$ – возрастающая, перейдем к неравенству $2x > 9x - 6$, отсюда $x < \frac{6}{7}$.

б) Функция $y = (0{,}3)^t$ – убывающая, поэтому заменим данное неравенство равносильным ему $4x^2 - 2x - 2 \ge 2x - 3$. Имеем $(2x-1)^2 \ge 0$, отсюда x – любое действительное число.

в) Функция $y = 2^t$ – возрастающая, поэтому будем решать неравенство $\frac{x}{x^2-1} < \frac{1}{x-2}$, равносильное данному. Решим последнее неравенство методом интервалов, для этого неравенство преобразуем $\frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x-2} < 0$. После приведения дробей к общему знаменателю и приведения подобных имеем $\frac{1-2x}{(x-1)(x+1)(x-2)} < 0$.



Выбираем промежутки, где значения дроби отрицательные. Отсюда $x < -1$; $\frac{1}{2} < x < 1$; $x > 2$.

г) Обе части неравенства положительны при любых значениях x. Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 3, получим неравенство $2x - 1 < (\log_3 11)(3 - x)$, равносильное исходному. После равносильных преобразований уравнение примет вид $(2 + \log_3 11) \cdot x < 1 + 3\log_3 11$.

Учитывая, что $2 + \log_3 11 > 0$, находим все решения исходного неравенства $x < \frac{1 + 3\log_3 11}{2 + \log_3 11}$.

Ответ: а) $x < \frac{6}{7}$; б) x – любое действительное число; в) $x < -1$; $\frac{1}{2} < x < 1$; $x > 2$; г) $x < \frac{1 + 3\log_3 11}{2 + \log_3 11}$.

Итак, для приведения показательных уравнений и показательных неравенств к выделенным выше видам (1)–(6) были применены *приемы сведения уравнения (неравенства) к одному основанию, логарифмирование, деление (умножение) уравнения (неравенства) на выражение, содержащее одну из степеней, переход к одному показателю степени,* при этом были использованы свойства степеней, определение степени с целым показателем, свойства показательной функции.

2. Использование общих методов при решении показательных уравнений и неравенств

2.1. Разложение на множители

Пример 3. Решить уравнения: а) $2^{x+1}+2^{x-1}-2=27$; б) $\sqrt{x}\cdot\left(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}\right)=$ $=3^{2\sqrt{x^2-3}+1}-3^{\sqrt{x^2-3}+1}+6\sqrt{x}-18$.

Решение.

а) В данном уравнении каждый показатель степени отличается от другого на некоторое число, значит, в уравнении можно вынести за скобки степень с любым из имеющихся показателей. Чаще всего выносят степень с наименьшим показателем, именно так поступим с данным уравнением $2^{x-1}\left(2^2+1-2\right)=27$. Получим $2^{x-1}\cdot 3=27$, $2^{x-1}=9$, $x-1=\log_2 9$, $x=1+\log_2 9$.

б) Перегруппируем слагаемые, стоящие в левой и правой частях уравнения, вынесем общий множитель за скобки, после всех преобразований уравнение будет иметь вид $\left(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}-6\right)\left(\sqrt{x}-3\right)=0$. Последнее уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2-3\ge 0, \\ x\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} 9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}-6=0, \\ \sqrt{x}=3; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge\sqrt{3}, \\ \left[\begin{array}{l} 3^{\sqrt{x^2-3}}=3, \\ x=9; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge\sqrt{3}, \\ \left[\begin{array}{l} x^2-3=1, \\ x=9; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Ответ: а) $x=1+\log_2 9$; б) $x=9,\ x=2.$

Пример 4. Решить неравенства: а) $3\cdot 4^x+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}\ge 6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}$;

б) $6^x-8\cdot 3^x-9\cdot 2^x+72<0.$

Решение.

а) В неравенстве перегруппируем слагаемые $3\cdot 4^x-6\cdot 4^{x+1}\ge -\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}$, вынесем за скобки общий множитель $4^x(3-6\cdot 4)\ge -9^x\left(\frac{1}{3}\cdot 9^2+\frac{1}{2}\cdot 9\right)$. Получим $4^x\cdot(-21)\ge -9^x\cdot\frac{63}{2}$, разделим на выражение $(-21)\cdot 9^x$ (это можно сделать, так как $9^x>0$, а $(-21)\cdot 9^x<0$). В результате имеем неравенство, равносильное данному,

$\left(\frac{4}{9}\right)^x \le \frac{63}{42}$, приведем к одному основанию $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$. Функция $y=\left(\frac{2}{3}\right)^t$ – убывающая, тогда $2x \ge -1$, $x \ge -\frac{1}{2}$.

б) Разложим правую часть неравенства на множители, получим $(2^x-8)\cdot(3^x-9)<0$. Последнее неравенство равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^x-8>0,\\3^x-9<0,\end{cases}\\ \begin{cases}2^x-8<0,\\3^x-0>0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>3,\\x<2,\end{cases}\\ \begin{cases}x<3,\\x>2;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow 2<x<3.$$

Ответ: а) $x \ge -\frac{1}{2}$; б) $2<x<3$.

2.2. Введение нового неизвестного

Пример 5. Решить уравнения а) $25^x-6\cdot 5^x+5=0$; б) $125^x+20^x=2^{3x+1}$.

Решение.

а) Обозначим $5^x=t$, где $t>0$ (в силу свойства 2^0). Данное уравнение сводится к квадратному относительно t: $t^2-6t+5=0$, его корни $t=1$, $t=5$. Они оба удовлетворяют условию $t>0$, тогда, возвращаясь к замене, получим

$$\left[\begin{array}{l}5^x=1,\\5^x=5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0,\\x=1.\end{array}\right.$$

б) Данное уравнение после применения свойств степени примет вид: $125^x+20^x=2\cdot 8^x$. Разделим обе части уравнения на 8^x ($8^x>0$ в силу свойства показательной функции), получим уравнение, равносильное предыдущему $\left(\frac{125}{8}\right)^x+\left(\frac{20}{8}\right)^x=2 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{3x}+\left(\frac{5}{2}\right)^x-2=0$. Сделаем замену $\left(\frac{5}{2}\right)^x=t$, где $t>0$, получим $t^3+t-2=0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+2)=0$, решением последнего уравнения имеем $t=1$. Решим уравнение $\left(\frac{5}{2}\right)^x=1$, откуда $x=0$.

Ответ: а) $x=0,\ x=1$; б) $x=0$.

Пример 6. Решить неравенства: а) $\left(5+2\sqrt{6}\right)^x+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x>12$;

б) $\frac{1}{3^x+5} \le \frac{1}{3^{x+1}-1}$.

Решение.

а) Пусть $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x=t$, где $t>0$. Выражение $\left(5+2\sqrt{6}\right)$ есть квадрат суммы чисел $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, т.е. $\left(5+2\sqrt{6}\right)=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$, тогда $\left(5+2\sqrt{6}\right)^x=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2x}$. Решим неравенство $t^2+t-12>0$, учитывая, что $t>0$, получим $t>3$. Остается решить показательное неравенство $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x>3$, где $\sqrt{3}+\sqrt{2}>1$, поэтому $x>\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}}3$.

б) Обозначим $3^x = t$, где $t > 0$, и, учитывая, что $t+5>0$ (т. е. на это выражение умножим обе части неравенства), имеем неравенство, равносильное данному, $\frac{3t-1-t-5}{3t-1} \le 0$, приведем подобные и получим $\frac{2t-6}{3t-1} \le 0$, решением неравенства будет полуинтервал $\left(\frac{1}{3};\ 3\right]$. Далее решим двойное неравенство $\frac{1}{3} < 3^x \le 3$, функция $y = 3^n$ – возрастающая, поэтому $-1 < x \le 1$.

Ответ: а) $x > \log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} 3$; б) $-1 < x \le 1$.

2.3. Однородные уравнения (неравенства)

Пример 7. Решить уравнение $2\cdot 81^{x+1} - 36^{x+1} - 3\cdot 16^{x+1} = 0$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $2\cdot 9^{2(x+1)} - 9^{x+1}\cdot 4^{x+1} - 3\cdot 4^{2(x+1)} = 0$, решение которого сводится к решению однородного уравнения $2u^2(x) - u(x)v(x) - 3\cdot v^2(x) = 0$, где $u(x) = 9^{x+1}$, $v(x) = 4^{x+1}$. Поскольку $4^{x+1} > 0$, то уравнение можно разделить на $4^{2(x+1)}$, получим уравнение, равносильное исходному, $2\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{2(x+1)} - \left(\frac{9}{4}\right)^{x+1} - 3 = 0$.

Сделаем замену $\left(\frac{9}{4}\right)^{x+1} = t$, $t > 0$: $2t^2 - t - 3 = 0$, $t = \frac{3}{2}$.

Исходное уравнение равносильно $\left(\frac{9}{4}\right)^{x+1} = \frac{3}{2} \iff x = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $x = -\frac{1}{2}$.

Пример 8. Решить неравенство $3^{2x^2} - 2\cdot 3^{x^2+x+6} + 3^{2x+12} > 0$.

Решение. Неравенство является однородным, его можно представить в виде $3^{2x^2} - 2\cdot 3^{x^2}\cdot 3^{x+6} + 3^{2(x+6)} = 0$. Преобразования, которые необходимо сделать, аналогичны преобразованиям, проведенными с уравнением из примера 7.

Имеем $\left(\frac{3^{x^2}}{3^{x+6}}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{3^{x^2}}{3^{x+6}}\right) + 1 > 0 \iff \left(3^{x^2-x-6}\right)^2 - 2\cdot 3^{x^2-x-6} + 1 > 0$.

Введем замену $t = 3^{x^2-x-6}$, где $t > 0$, получим $t^2 - 2t + 1 > 0 \iff (t-1)^2 > 0$.

Решением последнего неравенства являются все действительные числа, кроме тех, где $t - 1 = 0$, т. е. значения $t = 1$ из рассмотрения надо исключить: $3^{x^2-x-6} \ne 1$, $x^2 - x - 6 \ne 0$, $x \ne 3,\ x \ne -2$.

Ответ: $x \ne 3,\ x \ne -2$.

2.4. Использование свойств функций

Пример 9. Решить уравнения: а) $5^{x-2} = 8 - x$; б) $3^x + 4^x = 5^x$; в) $5^x \cdot \sqrt[x]{8^{x-1}} = 500$.

Решение.

а) Заметим, что $x=3$ – корень данного уравнения. Других корней уравнение не имеет, так как левая часть уравнения представляет возрастающую функцию, а правая – убывающую. Графики этих функций могут иметь не более одной точки пересечения. Значит, $x=3$ – единственный корень уравнения.

б) $x=2$ – корень исходного уравнения. Покажем, что других корней уравнение не имеет. Преобразуем уравнение к виду $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1$. Функция $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x$ – убывающая, как сумма двух убывающих функций, значит, каждое свое значение принимает лишь один раз.

в) Множество допустимых значений уравнения $x\in N,\ x>1$. Перепишем уравнение в виде $5^x\cdot 8^{\frac{x-1}{x}}=500$ и прологарифмируем его по основанию 5 (можно по основанию 8), получим $x+\frac{3(x-1)}{x}\log_5 2=3+2\log_5 2$. После преобразований получим квадратное уравнение относительно x: $x^2+x\cdot(\log_5 2-3)-3\log_5 2=0$, его корни $x=-\log_5 2$ и $x=3$. $x=-\log_5 2$ не входит во множество значений уравнения, значит, исходное уравнение имеет единственный корень $x=3$.

Ответ: а) $x=3$; б) $x=2$; в) $x=3$.

Пример 10. Решить неравенства: а) $3^x+4^x\ge 25$; б) $\sqrt{8-2^{x-2}}<\log_3(x-7)$.

Решение.

а) Левая часть неравенства, как сумма двух возрастающих функций, есть функция возрастающая. Поскольку для $x<2$ $f(x)<f(2)=25$, а для $x\ge 2$ $f(x)\ge f(2)=25$, то множество решений исходного неравенства есть $x\ge 2$.

б) Область допустимых значений неравенства определяется системой

$$\begin{cases} x-7>0, \\ 8-2^{x-2}\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>7, \\ 2^3\ge 2^{x-2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>7, \\ 5\ge x. \end{cases}$$

Система решений не имеет, значит, и исходное неравенство не имеет решений также.

Ответ: а) $x\ge 2$; б) нет решений.

3. Решение смешанных уравнений и неравенств

Рассмотрим решение уравнений и неравенств следующего вида:

$$f(x)^{\varphi(x)}=g(x)^{h(x)}$$

$$f(x)^{\varphi(x)}>g(x)^{h(x)}$$

Общим способом решения таких уравнений и неравенств является следующий [10].

1. Отыскивается множество M – пересечение областей существования функций $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$, $h(x)$.

2. Отыскивается множество M_1 – подмножество множества M, где функции $f(x),\ g(x)$ положительны.

3. Логарифмированием по некоторому основанию a $(a>0,\ a\neq 1)$ исходного уравнения или неравенства, заменяют равносильным на M_1 уравнением $\varphi(x)\log_a f(x)=h(x)\log_a g(x)$ или неравенством $\varphi(x)\log_a f(x)>h(x)\log_a g(x)$.

4. На множестве M_1 решается равносильное исходному уравнение или неравенство.

Пример 11. Решить уравнение $\left(x^2+x+1\right)^{x-5\sqrt{x}+6}=(x+3)^{x-5\sqrt{x}+6}$.

Решение. Пересечением областей существования функций $f(x)=x^2+x+1$, $g(x)=x+3$ и $\varphi(x)=x-5\sqrt{x}+6$ является множество всех неотрицательных чисел (множество M).

На этом множестве функции $f(x),\ g(x)$ положительны.

Логарифмируем обе части уравнения, например, по основанию 2, получим уравнение $\left(x-5\sqrt{x}+6\right)\log_2\left(x^2+x+1\right)=\left(x-5\sqrt{x}+6\right)\log_2(x+3)$, равносильное исходному на множестве M.

Решим полученное уравнение, для этого последнее запишем в виде $\left(x-5\sqrt{x}+6\right)\left(\log_2\left(x^2+x+1\right)-\log_2(x+3)\right)=0$. Заменим уравнение равносильной ему совокупностью $\left[\begin{array}{l} x-5\sqrt{x}+6=0, \\ \log_2\left(x^2+x+1\right)-\log_2(x+3)=0. \end{array}\right.$

Решением первого уравнения из совокупности являются $x=4,\ x=9$, решением второго – $x=\pm\sqrt{2}$, из которых в M входит только $x=\sqrt{2}$.

Ответ: $x=4,\ x=9$, $x=\sqrt{2}$.

Пример 12. Решить неравенство $x^{\log_2\sqrt{x}}<2^{2+\frac{1}{4}\log_2^2 x}$.

Решение. Пересечением областей существования функций $f(x)=x$, $g(x)=x+3$, $\varphi(x)=\log_2\sqrt{x}$ и $h(x)=2+\dfrac{1}{4}\log_2^2 x$ является промежуток $0<x<+\infty$.

На этом множестве функции $f(x),\ g(x)$ положительны.

Логарифмируем обе части неравенства, по основанию 2, получим неравенство $\log_2\sqrt{x}\log_2 x<2+\dfrac{1}{4}\log_2^2 x$, равносильное исходному на множестве M.

Решим полученное неравенство, для этого последнее запишем в виде $(\log_2 x)^2<8$ или $-\sqrt{8}<\log_2 x<\sqrt{8}$. Решением неравенства является промежуток $2^{-\sqrt{8}}<x<2^{\sqrt{8}}$, он весь входит в множество M.

Ответ: $2^{-\sqrt{8}}<x<2^{\sqrt{8}}$.

Упражнения и ответы

№ 1. Решите уравнение:

1) $\left(\dfrac{1}{64^2}\right)^{-x}=\sqrt{\dfrac{1}{8}}$; **2)** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\dfrac{9}{8}\right)^x=\dfrac{27}{64}$; **3)** $2^x\cdot 5^x=0{,}1\cdot\left(10^{x-1}\right)^5$; **4)** $\left(15^{x^2+x-2}\right)^{(x-4)}=1$;

5) $3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+1}} = 36$; **6)** $15 \cdot 2^{x+1} + 15 \cdot 2^{2-x} = 135$; **7)** $13^{2x} - 6 \cdot 13^x + 5 = 0$;

8) $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$; **9)** $3^{2x^2+6x-9} + 4 \cdot 15^{x^2+3x-5} = 3 \cdot 5^{2x^2+6x-9}$;

10) $\dfrac{15^x + 9^x + 6}{2 \cdot 15^x + 25^x + 3} = 2$; **11)** $x \cdot 2^{x^2+2x+3} = 64$; **12)** $\dfrac{1}{\sqrt{3x-5}} = (3x-5)^{\log_{\frac{1}{25}}\left(2+5x-x^2\right)}$.

№ 2. Решите неравенство:

1) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{2x+1}{1-x}} > \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-3}$; **2)** $3^{x+3} \cdot 7^{x+3} \le 3^{2x} \cdot 7^{2x}$; **3)** $5^x - 3^{x+1} \ge 2 \cdot \left(5^{x-1} - 3^{x-2}\right)$;

4) $16^{x+\frac{1}{2}} \le 15 \cdot 4^x + 4$; **5)** $5 \cdot 25^{\frac{1}{x}} + 3 \cdot 10^{\frac{1}{x}} \ge 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}}$; **6)** $\dfrac{1}{4} \cdot x^{\frac{1}{2}\log_2 x} \ge 2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x}$;

7) $2^x + 3^x + 4^x < 3$; **8)** $x^{\log_2 \sqrt{x}} < 2^{2+\frac{1}{4}\log_2^2 x}$; **9)** $\left(2^x - 4\right)\left(x^2 - 2x - 3\right) > 0$;

10) $(x-2)^{x^2-x} \ge (x-2)^{12}$; **11)** $4^{-x+0,5} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$; **12)** $x^{\frac{2x-1}{3-x}} > 1$;

13) $8 \cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x}+1} \ge 9^{\sqrt{x}}$; **14)** $\left(x^2 + x + 1\right)^{\frac{x+5}{x+2}} \ge \left(x^2 + x + 1\right)^3$; **15)** $\dfrac{3^{2|x-1|} + 3}{4} < 3^{|x-1|}$.

Ответы: № 1.

1) $-\dfrac{1}{8}$; **2)** 3; **3)** $1;\ 5$; **4)** $-2;\ 1;\ 4$; **5)** $-\log_3 6;\ 2$; **6)** $-1;\ 2$;

7) $0;\ \log_{13} 5$; **8)** $1;\ 5$; **9)** $1;\ -4$; **10)** $\log_{\frac{5}{3}} \dfrac{\sqrt{17}-3}{4}$; **11)** 1; **12)** $2;\ \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$.

Ответы: № 2.

1) $1 < x < 4$; **2)** $x \ge 3$; **3)** $x \ge 3$; **4)** $x > -2$; **5)** $-1 \le x < 0$; $x > 0$;

6) $0 < x < 2^{-2\sqrt{2}}$; $x \ge 2^{\sqrt{2}}$; **7)** $x < 0$; **8)** $2^{-\sqrt{8}} < x < 2^{\sqrt{8}}$; **9)** $-1 < x < 2$; $x > 3$;

10) $2 < x \le 3$; $x \ge 4$; **11)** $x > -2$; **12)** $0 < x < \dfrac{1}{2}$; $1 < x < 3$; **13)** $0 \le x \le 16$;

14) $-2 < x \le 1$; $-\dfrac{1}{2} \le x \le 0$; **15)** $0 < x < 1$; $1 < x < 2$.

Тема V. Логарифмические уравнения и неравенства

Требования к знаниям и умениям учащихся

Цель изучения темы – систематизировать и обобщить знания учащихся о способах решения логарифмических уравнений и неравенств.

В результате изучения темы учащийся ***знает***:

– понятие логарифмического уравнения (неравенства);

– понятие области определения (ОДЗ) логарифмического уравнения (неравенства);

– определение логарифма, свойства логарифмов;

– понятие и свойства логарифмической функции;

– о преобразованиях, используемых при решении логарифмических уравнений и неравенств; какие из них приводят к равносильному уравнению (неравенству), а какие к уравнению (неравенству) – следствию;

– о преобразованиях, приводящих к потере корней уравнения (решений неравенства);

– какие логарифмические уравнения и неравенства относятся к простейшим, способы их решения;

– о возможностях использования общих методов при решении иррациональных уравнений и неравенств: разложение на множители, введение нового неизвестного, рассмотрение выражения как однородного, метод интервалов, использование свойств функций;

– о специальных приемах решения логарифмических уравнений и неравенств: использование свойств логарифмов, логарифмирование.

В результате изучения темы учащийся ***умеет***:

– решать простейшие логарифмические уравнения и неравенства;

– применять общие методы для решения логарифмических уравнений и неравенств;

– использовать специальные приемы для решения логарифмических уравнений и неравенств.

Содержание темы

1. Простейшие логарифмические уравнения и неравенства

Логарифмические уравнения и неравенства относятся к трансцендентным (см. [12, с. 5–6]). Напомним, что логарифмом положительного числа b по основанию *a*, где $a > 0, a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число *a*, чтобы получилось b: $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$, где $a > 0, a \neq 1, b > 0$. Исходя из определения логарифма, можно заключить, что при решении логарифмических уравнений (неравенств) необходимо будет учитывать условия существования входящих в них логарифмических выражений и отражать их при нахождении области определения уравнения (неравенства) (см. [12, с. 6]), когда это необходимо. Выделим на конкретных примерах простейшие логарифмические уравнения (неравенства) и подходы к их решению.

Пример 1. Решите уравнение: $\log_3(5x-1) = 2$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $5x-1=3^2$, так как $\log_3 3^2 = 2$, а логарифмическая функция определена и монотонна на положительной части числовой оси. Условие существования логарифма ($5x - 1 > 0$) автоматически учитывается в силу равенства выражения $5x - 1$ положительному числу 3^2. Тогда получаем: $5x-1=3^2 \Leftrightarrow 5x-1=9 \Leftrightarrow 5x=10 \Leftrightarrow x=2$.

Ответ: $x = 2$.

Пример 2. Решите неравенство: $\log_5(x+2) \le 3$.

Решение. Учитывая, что $3=\log_5 5^3$, переходим к равносильному неравенству $\log_5(x+2)\le\log_5 5^3$. Так как основание логарифмической функции $y=\log_5 t$ равно 5 > 1, то она монотонно возрастает на своей области определения (при t > 0). Тогда получаем: $\log_5(x+2)\le\log_5 5^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2>0; \\ x+2\le 125; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2; \\ x\le 123; \end{cases} \Leftrightarrow -2<x\le 123$.

Ответ: $-2<x\le 123$.

Пример 3. Решите неравенство: $\log_{\frac{2}{3}}(2-5x)<-2$.

Решение. Учитывая, что $-2=\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$, переходим к равносильному неравенству $\log_{\frac{2}{3}}(2-5x)<\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$. Так как основание логарифмической функции $y=\log_{\frac{2}{3}} t$ равно $\frac{2}{3}$ и $0<\frac{2}{3}<1$, то она монотонно убывает на своей области определения (при t > 0). Тогда получаем:

$$\log_{\frac{2}{3}}(2-5x)<\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-5x>0; \\ 2-5x>\frac{9}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow 2-5x>\frac{9}{4} \Leftrightarrow -5x>0{,}25 \Leftrightarrow x<-0{,}05.$$

Следует отметить, что в данном случае условие существования логарифма (2 – 5x > 0) оказалось избыточным.

Ответ: $x<-0{,}05$.

На основе рассмотренных выше примеров можно сделать следующие общие выводы.

<table>
<tr><td>$\log_a f(x)=b$, где $a>0, a\ne 1$</td><td>$\log_a f(x)>b$, где $a>0, a\ne 1$</td><td>$\log_a f(x)<b$, где $a>0, a\ne 1$</td></tr>
<tr><td colspan="3"><u>Решение:</u></td></tr>
<tr><td>Равносильно уравнению
$f(x)=a^b$
(доказательство см. [12, с. 22])</td><td>Равносильно:
1) неравенству $f(x)>a^b$ при $a>1$;
2) системе неравенств $\begin{cases} f(x)<a^b; \\ f(x)>0 \end{cases}$
при $0<a<1$</td><td>Равносильно:
1) системе неравенств $\begin{cases} f(x)<a^b; \\ f(x)>0 \end{cases}$
при $a>1$;
2) неравенству $f(x)>a^b$ при $0<a<1$</td></tr>
</table>

Пример 4. Решите уравнение: $\lg(x^2-2)=\lg x$.

Решение. Область определения данного уравнения задается системой неравенств: $\begin{cases} x^2-2>0; \\ x>0. \end{cases}$

На указанной области определения данное уравнение равносильно уравнению $x^2-2=x$, так как логарифмическая функция определена и монотонна на положительной части числовой оси. Таким образом, исходное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2-2>0; \\ x>0; \\ x^2-2=x. \end{cases}$

Но одно из условий области определения можно опустить, так как оно будет автоматически учитываться в силу равенства логарифмируемых выражений. Тогда получаем: $\begin{cases} x^2-2>0; \\ x>0; \\ x^2-2=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0; \\ x^2-2=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1; \\ x=2; \end{array}\right. \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$

Ответ: $x=2$.

Можно предложить второй способ решения уравнения $\lg(x^2-2)=\lg x$ (как и любого другого логарифмического уравнения) без нахождения его области определения. При этом способе решение логарифмического уравнения должно заканчиваться проверкой, удовлетворяют ли найденные корни исходному уравнению. Например, выполняя проверку полученных в ходе решения уравнения $\lg(x^2-2)=\lg x$ корней $x_1=-1, x_2=2$, получаем, что при подстановке в исходное уравнение $x=-1$ в обеих частях появляется выражение $\lg(-1)$, которое не имеет смысла, т. е. $x=-1$ не является корнем исходного уравнения; при подстановке $x=2$ получаем верное числовое равенство $\lg 2=\lg 2$, т. е. $x=2$ является корнем исходного уравнения.

Но указанный способ не всегда удобен, например, если полученные корни являются иррациональными числами (см. далее пример 10). Поэтому не будем подробно останавливаться на этом способе решения, тем более что неравенства таким способом решать нельзя.

Пример 5. Решите неравенство: $\log_3(5-4x)<\log_3(x-1)$.

Решение. Область определения данного неравенства задается системой неравенств: $\begin{cases} 5-4x>0; \\ x-1>0. \end{cases}$

На указанной области определения данное неравенство равносильно неравенству $5-4x<x-1$, так как основание логарифмической функции $y=\log_3 t$ равно 3 > 1, т. е. она монотонно возрастает на своей области определения. Таким образом, исходное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} 5-4x>0; \\ x-1>0; \\ 5-4x<x-1. \end{cases}$

Но условие $x-1>0$ можно опустить, так как оно будет автоматически учитываться в силу присутствия других неравенств системы. Тогда получаем:

$$\begin{cases} 5-4x>0; \\ x-1>0; \\ 5-4x<x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-4x>0; \\ 5-4x<x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\dfrac{5}{4}; \\ x>\dfrac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{6}{5}<x<\frac{5}{4}.$$

Ответ: $\frac{6}{5} < x < \frac{5}{4}$.

Пример 6. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{5}}(x+1) \le \log_{\frac{1}{5}}(3x-5)$.

Решение. Область определения данного неравенства задается системой неравенств: $\begin{cases} 3x-5>0; \\ x+1>0. \end{cases}$

На указанной области определения данное неравенство равносильно неравенству $x+1 \ge 3x-5$, так как основание логарифмической функции $y=\log_{\frac{1}{5}} t$ равно $\frac{1}{5}$ и $0<\frac{1}{5}<1$, т. е. она монотонно убывает на своей области определения. Таким образом, исходное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} 3x-5>0; \\ x+1>0; \\ x+1 \ge 3x-5. \end{cases}$

Но условие $x+1>0$ можно опустить, так как оно будет автоматически учитываться в силу присутствия других неравенств системы. Тогда получаем:
$$\begin{cases} 3x-5>0; \\ x+1>0; \\ x+1 \ge 3x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5>0; \\ x+1 \ge 3x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{5}{3}; \\ x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{3}<x\le 3.$$

Ответ: $\frac{5}{3}<x\le 3$.

На основе рассмотренных выше примеров можно сделать следующие общие выводы.

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a>0, a\ne 1$	$\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a>0, a\ne 1$	$\log_a f(x) < \log_a g(x)$, где $a>0, a\ne 1$
Решение:		
Равносильно системе $\begin{cases} f(x)>0; \\ g(x)>0; \\ f(x)=g(x), \end{cases}$ которая, в свою очередь, равносильна одной из следующих систем $\begin{cases} f(x)>0; \\ f(x)=g(x), \end{cases}$ или $\begin{cases} g(x)>0; \\ f(x)=g(x) \end{cases}$ (доказательство см. [12, с. 22])	Равносильно: 1) системе неравенств $\begin{cases} g(x)>0; \\ f(x)>g(x) \end{cases}$ при $a>1$; 2) системе неравенств $\begin{cases} f(x)>0; \\ f(x)<g(x) \end{cases}$ при $0<a<1$	Равносильно: 1) системе неравенств $\begin{cases} f(x)>0; \\ f(x)<g(x) \end{cases}$ при $a>1$; 2) системе неравенств $\begin{cases} g(x)>0; \\ f(x)>g(x) \end{cases}$ при $0<a<1$

Пример 7. Решите уравнение: $\log_x 4x = 2$.

Решение. Область определения данного уравнения задается системой неравенств: $\begin{cases} 4x > 0; \\ x > 0; \\ x \neq 1. \end{cases}$

На указанной области определения данное уравнение равносильно уравнению $x^2 = 4x$, так как логарифмическая функция определена и монотонна на положительной части числовой оси. Таким образом, исходное уравнение равносильно системе $\begin{cases} 4x > 0; \\ x > 0; \\ x \neq 1; \\ x^2 = 4x. \end{cases}$

Но условие $4x > 0$ области определения можно опустить, так как оно будет автоматически учитываться в силу присутствия других условий системы.

Тогда получаем: $\begin{cases} 4x > 0; \\ x > 0; \\ x \neq 1; \\ x^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0; \\ x \neq 1; \\ x^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x = 4; \end{array} \right. \\ x > 0; \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$

Ответ: $x = 4$.

Пример 8. Решите неравенство: $\log_{x^2+4}(4x+7) \geq 1$.

Решение. Область определения данного неравенства задается системой неравенств: $\begin{cases} 4x + 7 > 0; \\ x^2 + 4 > 0; \\ x^2 + 4 \neq 1. \end{cases}$

На указанной области определения данное неравенство равносильно неравенству $4x + 7 \geq \left(x^2 + 1\right)^1$, если $x^2+4>1$, как основание логарифмической функции $y = \log_{x^2+4} t$, которая монотонно возрастает на своей области определения, или неравенству $4x + 7 \leq \left(x^2 + 1\right)^1$, если $0 < x^2 + 4 < 1$, как основание логарифмической функции $y = \log_{x^2+4} t$, которая монотонно убывает на своей области определения. Таким образом, исходное неравенство равносильно совокупности систем неравенств $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + 4 > 1; \\ 4x + 7 \geq x^2 + 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 4 > 0; \\ x^2 + 4 < 1; \\ 4x + 7 > 0; \\ 4x + 7 \leq x^2 + 4. \end{cases} \end{array} \right.$

Как мы видим, некоторые из условий области определения в соответствующей системе можно опустить, так как они будут автоматически учитываться в силу присутствия других неравенств системы. Тогда получаем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+4>1;\\ 4x+7\ge x^2+4;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+4>0;\\ x^2+4<1;\\ 4x+7>0;\\ 4x+7\le x^2+4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2>-3;\\ x^2-4x-3\le 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2>-4;\\ x^2<-3;\\ 4x>-7;\\ x^2-4x-3\ge 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Вторая система совокупности не имеет решений, так как не имеет решений неравенство $x^2<-3$. Первая система равносильна неравенству $x^2-4x-3\le 0$, решением которого является отрезок $2-\sqrt{7}\le x\le 2+\sqrt{7}$.

Ответ: $2-\sqrt{7}\le x\le 2+\sqrt{7}$.

Пример 9. Решите неравенство: $\log_{x^2-3}(4x+7)<0$.

Решение. Область определения данного неравенства задается системой неравенств: $\begin{cases}4x+7>0;\\ x^2-3>0;\\ x^2-3\ne 1.\end{cases}$

На указанной области определения данное неравенство равносильно неравенству $4x+7<\left(x^2-3\right)^0$, если $x^2-3>1$, как основание логарифмической функции $y=\log_{x^2-3}t$, которая монотонно возрастает на своей области определения, или неравенству $4x+7>\left(x^2-3\right)^0$, если $0<x^2-3<1$, как основание логарифмической функции $y=\log_{x^2-3}t$, которая монотонно убывает на своей области определения. Таким образом, исходное неравенство равносильно совокупности систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-3>1;\\ 4x+7>0;\\ 4x+7<1;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-3>0;\\ x^2-3<1;\\ 4x+7>1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2>4;\\ x>-\dfrac{7}{4};\\ x<-\dfrac{3}{2};\end{cases}\\ \begin{cases}x^2>3;\\ x^2<4;\\ x>-\dfrac{3}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>2;\\ x<-2;\end{array}\right.\\ -\dfrac{7}{4}<x<-\dfrac{3}{2};\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>\sqrt{3};\\ x<-\sqrt{3};\end{array}\right.\\ -2<x<2;\\ x>-\dfrac{3}{2}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Как мы видим, некоторые из условий области определения в соответствующей системе можно опустить, так как они будут автоматически учитываться в силу присутствия других неравенств системы. Первая система не имеет решений. Решение второй системы: $\sqrt{3}<x<2$.

Ответ: $\sqrt{3}<x<2$.

На основе рассмотренных выше примеров можно сделать следующие общие выводы.

$\log_{g(x)} f(x) = b$	$\log_{g(x)} f(x) > b$	$\log_{cg(x)} f(x) < b$
Решение:		
Равносильно системе $\begin{cases} g(x) > 0; \\ g(x) \neq 1; \\ f(x) = g^b(x). \end{cases}$	Равносильно совокупности систем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) > 1; \\ f(x) > g^b(x); \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 1; \\ g(x) > 0; \\ f(x) > 0; \\ f(x) < g^b(x). \end{cases} \end{array}\right.$	Равносильно совокупности систем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) > 1; \\ f(x) > 0; \\ f(x) < g^b(x); \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 1; \\ g(x) > 0; \\ f(x) > g^b(x). \end{cases} \end{array}\right.$

Пример 10. Решите уравнение: $\log_{x^2-1}(3x-1) = \log_{x^2-1} x^2$.

Решение. Область определения данного уравнения задается системой неравенств: $\begin{cases} 3x-1>0; \\ x^2>0; \\ x^2-1>0; \\ x^2-1 \neq 1. \end{cases}$

На указанной области определения данное уравнение равносильно уравнению $3x-1=x^2$, так как логарифмическая функция определена и монотонна на положительной части числовой оси. Таким образом, исходное уравнение равносильно системе $\begin{cases} 3x-1>0; \\ x^2>0; \\ x^2-1>0; \\ x^2-1 \neq 1; \\ 3x-1=x^2. \end{cases}$

Условие $3x-1>0$ или $x^2>0$ области определения можно опустить, так как оно будет автоматически учитываться в силу равенства $3x-1=x^2$. Тогда получаем: $\begin{cases} x^2>0; \\ x^2-1>0; \\ x^2-1 \neq 1; \\ 3x-1=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0; \\ x^2>1 \\ x^2 \neq 2; \\ x^2-3x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>1; \\ x<-1; \end{array}\right. \\ x \neq \pm\sqrt{2}; \\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}.$

Ответ: $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Пример 11. Решите неравенство: $\log_{x^2-1}(3x-1) < \log_{x^2-1} x^2$.

Решение. Область определения данного неравенства задается системой неравенств: $\begin{cases} 3x-1>0; \\ x^2>0; \\ x^2-1>0; \\ x^2-1\neq 1. \end{cases}$

На указанной области определения данное неравенство равносильно неравенству $3x-1<x^2$, если $x^2-1>1$, как основание логарифмической функции $y=\log_{x^2-1}t$, которая монотонно возрастает на своей области определения, или неравенству $3x-1>x^2$, если $0<x^2-1<1$, как основание логарифмической функции $y=\log_{x^2-1}t$, которая монотонно убывает на своей области определения. Таким образом, исходное неравенство равносильно совокупности систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-1>1;\\3x-1>0;\\3x-1<x^2;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-1>0;\\x^2-1<1;\\x^2>0;\\3x-1>x^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2>2;\\x>\frac{1}{3};\\x^2-3x+1>0;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2>1;\\x^2<2;\\x^2\neq 0;\\x^2-3x+1<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>\sqrt{2};\\x<-\sqrt{2};\end{array}\right.\\ x>\frac{1}{3};\\ \left[\begin{array}{l}x>\frac{3+\sqrt{5}}{2};\\x<\frac{3-\sqrt{5}}{2};\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>1;\\x<-1;\end{array}\right.\\ -\sqrt{2}<x<\sqrt{2};\\ x\neq 0;\\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Как мы видим, некоторые из условий области определения в соответствующей системе можно опустить, так как они будут автоматически учитываться в силу присутствия других неравенств системы. Решение первой системы: $x>\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Решение второй системы: $1<x<\sqrt{2}$.

Ответ: $1<x<\sqrt{2}$, $x>\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

На основе рассмотренных выше примеров можно сделать следующие общие выводы.

$\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x)$	$\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x)$	$\log_{\varphi(x)} f(x) < \log_{\varphi(x)} g(x)$
Решение:		
Равносильно системе $\begin{cases} f(x) > 0; \\ g(x) > 0; \\ \varphi(x) > 0; \\ \varphi(x) \neq 1; \\ f(x) = g(x), \end{cases}$ которая, в свою очередь, равносильна одной из следующих систем $\begin{cases} f(x) > 0; \\ \varphi(x) > 0; \\ \varphi(x) \neq 1; \\ f(x) = g(x), \end{cases}$ или $\begin{cases} g(x) > 0; \\ \varphi(x) > 0; \\ \varphi(x) \neq 1; \\ f(x) = g(x). \end{cases}$	Равносильно совокупности систем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi(x) > 1; \\ g(x) > 0; \\ f(x) > g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) < 1; \\ \varphi(x) > 0; \\ f(x) > 0; \\ f(x) < g(x). \end{cases} \end{array}\right.$	Равносильно совокупности систем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi(x) > 1; \\ f(x) > 0; \\ f(x) < g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) < 1; \\ \varphi(x) > 0; \\ g(x) > 0; \\ f(x) > g(x). \end{cases} \end{array}\right.$

2. Использование общих методов при решении логарифмических уравнений и неравенств

Подробно не останавливаясь на особенностях применения того или иного общего метода (они аналогичны тем, которые отмечались при решении иррациональных и показательных уравнений (неравенств)), рассмотрим конкретные примеры.

2.1. Разложение на множители. Метод интервалов

Пример 12. Решите уравнение: $\log_4(2x-1)\cdot\log_{0,3} x = \log_4(2x-1)$.

Решение. Сгруппируем все члены уравнения в левой части и вынесем общий множитель за скобки. Тогда данное уравнение равносильно уравнению $\log_4(2x-1)\cdot(\log_{0,3} x - 1) = 0$, которое, в свою очередь, равносильно совокупности систем: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_4(2x-1) = 0; \\ x > 0; \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} \log_{0,3} x - 1 = 0; \\ 2x - 1 > 0. \end{array}\right. \end{array}\right.$

Условия $2x-1>0$ и $x>0$ в соответствующих системах появились как условия существования соответствующих логарифмов. Первая система имеет решение $x=1$, вторая не имеет решений.

Ответ: $x=1$.

Пример 13. Решите неравенство: $\log_4(2x-1)\cdot\log_{0,3}x>\log_4(2x-1)$.

Решение. Сгруппируем все члены неравенства в левой части и вынесем общий множитель за скобки. Тогда данное неравенство равносильно неравенству $\log_4(2x-1)\cdot(\log_{0,3}x-1)>0$, которое, в свою очередь, равносильно совокупности систем неравенств: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_4(2x-1)>0;\\ \log_{0,3}x-1>0;\end{cases}\\ \begin{cases}\log_4(2x-1)<0;\\ \log_{0,3}x-1<0.\end{cases}\end{array}\right.$

Решение первой системы: $\begin{cases}2x-1>1;\\ 0<x<0,3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1;\\ 0<x<0,3;\end{cases}$

В результате решений нет. Решение второй системы: $\begin{cases}0<2x-1<1;\\ x>0,3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}<x<1\\ x>0,3\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}<x<1$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}<x<1$.

Пример 14. Решите неравенство: $\dfrac{\log_\pi\left(x^2-4x-11\right)}{2-5x-3x^2}\le 0$.

Решение. Область определения данного неравенства задается системой неравенств: $\begin{cases}x^2-4x-11>0,\\ 2-5x-3x^2\ne 0.\end{cases}$

Ее решением являются промежутки $(-\infty;-2),\left(-2;2-\sqrt{15}\right),\left(2+\sqrt{15};+\infty\right)$. Далее для того, чтобы решить исходное неравенство методом интервалов, найдем корни уравнения $\log_\pi\left(x^2-4x-11\right)=0$. Ими являются числа $x_1=-2$ и $x_2=6$. Отмечаем на числовой оси область определения неравенства и найденные корни. Показываем интервалы возможного чередования знака выражения, стоящего в левой части данного неравенства. Расставляем знаки на полученных интервалах, учитывая тот факт, что при переходе через $x=-2$ знак не будет чередоваться (кратный корень), а через $x=6$ – будет.

Получаем: $x<-2, -2<x<2-\sqrt{15}, x\ge 6$.

Ответ: $x<-2, -2<x<2-\sqrt{15}, x\ge 6$.

2.2. Введение нового неизвестного. Однородные уравнения

Пример 15. Решите уравнение: $\lg^3 x - \lg x = 0$.

Решение. Введем новое неизвестное $t = \lg x$. Тогда данное уравнение примет вид $t^3 - t = 0$. Получаем корни $t_1 = 0$ и $t_{2,3} = \pm 1$. Теперь остается решить три простейших уравнения: $\lg x = 0, \lg x = 1, \lg x = -1$.

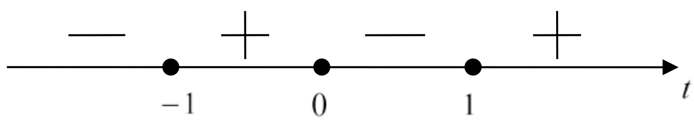
В итоге получаем: $x_1 = 1, x_2 = 10, x_3 = 0{,}1$.

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 10, x_3 = 0{,}1$.

Пример 16. Решите неравенство: $\lg^3 x - \lg x \geq 0$.

Решение. Введем новое неизвестное $t = \lg x$. Тогда данное неравенство примет вид $t^3 - t \geq 0$. Решим его методом интервалов, учитывая, что корнями многочлена $t^3 - t$ являются числа $t_1 = 0$ и $t_{2,3} = \pm 1$.

Получаем: $-1 \leq t \leq 0, t \geq 1$.



Теперь остается решить три простейших неравенства, два из которых входят в систему: $\begin{cases} \lg x \geq -1, \\ \lg x \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0{,}1, \\ 0 < x \leq 1, \end{cases} \Leftrightarrow 0{,}1 \leq x \leq 1,$

$\lg x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 10.$

Ответ: $0{,}1 \leq x \leq 1, x \geq 10$.

Пример 17. Решите уравнение: $\ln^2(x+1) - \ln(x+1)\ln x - 2\ln^2 x = 0$.

Решение. Данное уравнение является однородным уравнением второй степени относительно функций $p(x) = \ln(x+1), q(x) = \ln x$. Проверим, имеет ли решения система $\begin{cases} \ln(x+1) = 0, \\ \ln x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 1, \\ x = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 1. \end{cases}$

Убеждаемся, что данная система не имеет решений. Тогда обе части данного уравнения можно разделить, например, на $\ln^2 x \neq 0$. Получаем уравнение $\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^2 - \frac{\ln(x+1)}{\ln x} - 2 = 0$. Вводим новую неизвестную $t = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$. Уравнение принимает вид $t^2 - t - 2 = 0$, корнями которого являются числа $t_1 = 2, t_2 = -1$.

В итоге получаем два уравнения:

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 2 \overset{\ln x \neq 0}{\Leftrightarrow} \ln(x+1) = 2\ln x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x+1 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2 - x - 1 = 0, \end{cases}$$

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = -1 \overset{\ln x \neq 0}{\Leftrightarrow} \ln(x+1) = -\ln x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x+1 = x^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2 + x - 1 = 0. \end{cases}$$

Корнем первого уравнения является число $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, второго уравнения – $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Ответ: $x_{1,2}=\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}$.

2.3. Использование свойств функций

Ограниченность области определения

Пример 18. Решите неравенство: $\log_{0,6}(4-x)-\log_{0,6}(x-6)<2$.

Решение. Область определения данного неравенства задается системой неравенств $\begin{cases}4-x>0,\\ x-6>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<4,\\ x>6.\end{cases}$

Данная система не имеет решений, значит, исходное неравенство также не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Пример 19. Решите уравнение:

$$\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\cdot\log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right)=0.$$

Решение. Область определения данного уравнения задается системой неравенств $\begin{cases}x^2-4x+3\ge 0,\\ \frac{x}{5}>0,\\ x\ne 0,\\ 8x-2x^2-6\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le 1,\\ x\ge 3,\end{array}\right.\\ x>0,\\ 1\le x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=3.\end{array}\right.$

Проверкой убеждаемся, что $x=1$ является корнем уравнения, а $x=3$ – нет.

Ответ: $x=1$.

Ограниченность множества значений

Пример 20. Решите уравнение: $\lg(x-3)-\lg(x+9)=\lg(x-2)$.

Решение. Область определения данного уравнения задается системой неравенств $\begin{cases}x-3>0,\\ x+9>0,\\ x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>3,\\ x>-9,\\ x>2\end{cases}\Leftrightarrow x>3.$

На указанной области определения в силу возрастания функции $y=\lg t$ (основание логарифма 10>1) $\lg(x-3)<\lg(x+9)$, так как $x-3<x+9$. Тогда левая часть данного уравнения всегда отрицательна. Правая же часть:

$\lg(x-2)>0$, так как при $x>3$ получаем, что $x-2>1$. Значит, данное уравнение не может иметь корни.

Ответ: корней нет.

В ходе решения примера 20, как и большинства предыдущих примеров, также использовалось ***свойство монотонности логарифмической функции***: функция $y=\log_a t$ монотонно возрастает на положительной части числовой оси при $a>1$ и монотонно убывает при $0<a<1$.

3. Использование свойств логарифмов при решении логарифмических уравнений и неравенств

Напомним, что основными свойствами логарифмов при $a>0, a\neq 1, b>0, c>0, p\neq 0, d>0, d\neq 1; a,b,c,r,p,d\in R$ являются:

1. $a^{\log_a b}=b$;

2. $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$;

3. $\log_a \dfrac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$;

4. $\log_a b^r=r\log_a b$;

5. $\log_{a^p} b=\dfrac{1}{p}\log_a b$;

6. $\log_a b=\dfrac{\log_d b}{\log_d a}$.

В [12, с. 13–14] отмечалось, что использование указанных тождеств допустимо и приводит к уравнению (неравенству) – следствию, если такое преобразование не приводит к сужению ОДЗ исходного уравнения (неравенства).

Пример 21. Решите уравнение: $x^{\log_x (x+3)^2}=16$.

Решение. Область определения данного уравнения задается системой неравенств $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ (x+3)^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x\neq 1. \end{cases}$

Воспользуемся свойством 1 и перейдем к уравнению $(x+3)^2=16$, область определения которого шире области определения исходного уравнения.

Тогда данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ (x+3)^2=16. \end{cases}$

Решая полученную систему, имеем: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x+3=4, \\ x+3=-4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-7. \end{array}\right. \end{cases}$

Таким образом, решений нет.

Ответ: корней нет.

Пример 22. Решите уравнение: $\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3$.

Решение. Область определения данного уравнения задается системой неравенств $\begin{cases} x-5>0, \\ x+2>0. \end{cases}$

Воспользуемся свойством 2 и перейдем к уравнению $\log_2((x-5)(x+2))=3$, область определения которого шире области определения исходного уравнения.

Тогда данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x-5>0, \\ x+2>0, \\ \log_2((x-5)(x+2))=3. \end{cases}$

Решая полученную систему, имеем:

$$\begin{cases} x>5, \\ x>-2, \\ (x-5)(x+2)=2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>5, \\ x^2-3x-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>5, \\ \left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=-3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=6.$$

Ответ: $x=6$.

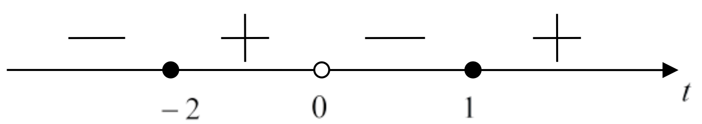
Пример 23. Решите неравенство: $\log_{0,3}x-2\log_x 0{,}3\le -1$.

Решение. Область определения данного неравенства задается системой неравенств: $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1. \end{cases}$

Воспользуемся свойством 6 и перейдем к неравенству $\log_{0,3}x-\dfrac{2}{\log_{0,3}x}\le -1$, область определения которого совпадает с областью определения исходного неравенства. Решим последнее неравенство:

$$\log_{0,3}x-\frac{2}{\log_{0,3}x}\le -1 \Leftrightarrow \frac{\log_{0,3}^2 x+\log_{0,3}x-2}{\log_{0,3}x}\le 0.$$

Введем новую переменную $t=\log_{0,3}x$. Получаем дробно-рациональное неравенство $\dfrac{t^2+t-2}{t}\le 0$, которое решим методом интервалов, учитывая, что $t=-2, t=1$ – корни трехчлена t^2+t-2:



Получаем: $t \le -2, 0 < t \le 1$. Таким образом, необходимо решить следующую совокупность неравенств: $\left[\begin{array}{l}\log_{0,3} x \le -2, \\ \begin{cases}\log_{0,3} x > 0, \\ \log_{0,3} x \le 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 0,3^{-2}, \\ \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x \ge 0,3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 11\frac{1}{9}, \\ 0,3 \le x < 1.\end{array}\right.$

Следует отметить, что в ходе решения указанной совокупности автоматически учитывалась область определения исходного неравенства.

Ответ: $0,3 \le x < 1, x \ge 11\frac{1}{9}$.

Итак, как ранее отмечалось в [12, с. 12–13], при решении логарифмических уравнений (неравенств) можно использовать слева направо следующие тождества:

1. $(f(x))^{\log_{f(x)} g(x)} = g(x)$;
2. $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a (f(x)g(x))$;
3. $\log_a f(x) - \log_a g(x) = \log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}$;
4. $r\log_a f(x) = \log_a f^r(x)$;
5. $\dfrac{1}{p}\log_{f(x)} b = \log_{f^p(x)} b$;
6. $\dfrac{\log_{f(x)} g(x)}{\log_{f(x)} \varphi(x)} = \log_{\varphi(x)} g(x)$.

Их применение может привести к расширению ОДЗ уравнения (неравенства), поэтому переходим к уравнению (неравенству) – следствию для исходного. Обратное использование данных тождеств может привести, наоборот, к сужению ОДЗ уравнения (неравенства), в таких случаях это недопустимо.

Например, в ходе первого способа решения уравнения примера 19 [12, с. 23] было показано, что применение тождества 4 справа налево приводит к потере корней, если r – четное число. Рассмотрим похожий случай.

Пример 24. Решите уравнение: $2\log_8 (2x) + \log_8 (x-1)^2 = \frac{4}{3}$.

Решение. Область определения данного уравнения задается системой неравенств $\begin{cases} 2x > 0, \\ (x-1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \ne 1. \end{cases}$

На данной области определения переход от $\log_8 (x-1)^2$ к $2\log_8 (x-1)$ недопустим, так как приводит к сужению ОДЗ уравнения. Поэтому либо следует избежать этого перехода, либо использовать верное равенство $\log_8 (x-1)^2 = 2\log_8 |x-1|$. Отсюда возникают два способа решения исходного уравнения.

Способ 1. $2\log_8(2x)+\log_8(x-1)^2=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}2x>0,\\ \log_8(2x)^2+\log_8(x-1)^2=\dfrac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ \log_8\left((2x)^2\cdot(x-1)^2\right)=\dfrac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ (2x(x-1))^2=8^{\frac{4}{3}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ \left(2x^2-x\right)^2=4^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ \left[\begin{array}{l}2x^2-x=4,\\ 2x^2-x=-4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ \left[\begin{array}{l}2x^2-x-4=0,\\ 2x^2-x+4=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ \left[\begin{array}{l}x^2-x-2=0,\\ x^2-x+2=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ \left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

Способ 2. $2\log_8(2x)+\log_8(x-1)^2=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow 2\log_8(2x)+2\log_8|x-1|=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\log_8(2x)+\log_8|x-1|=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1,\\ \log_8(2x)+\log_8(x-1)=\dfrac{2}{3},\end{cases}\\ \begin{cases}x<1,\\ \log_8(2x)+\log_8(1-x)=\dfrac{2}{3}\end{cases}\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1,\\ 2x>0,\\ \log_8\left((2x)(x-1)\right)=\dfrac{2}{3},\end{cases}\\ \begin{cases}x<1,\\ 2x>0,\\ \log_8\left((2x)(1-x)\right)=\dfrac{2}{3}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1,\\ x>0,\\ 2x(x-1)=8^{\frac{2}{3}},\end{cases}\\ \begin{cases}x<1,\\ x>0,\\ 2x(1-x)=8^{\frac{2}{3}}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1,\\ 2x^2-2x=4,\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<1,\\ 2x-2x^2=4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1,\\ x^2-x-2=0,\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<1,\\ x^2-x+2=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}x>1,\\ \left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: $x=2$.

4. Логарифмирование обеих частей уравнения (неравенства) по одному основанию

Пример 25. Решите уравнение: $\dfrac{1}{4}x^{\frac{1}{2}\log_2 x}=2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x}$.

Решение. В силу условия существования степени с действительным показателем обе части данного уравнения положительны. Возьмем $\log_2$ от обеих частей данного уравнения. Тогда в силу монотонности функции $y=\log_2 x$ на положительной части числовой оси получаем:

$$\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}\log_2 x}=2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x}\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}\log_2 x}\right)=\log_2\left(2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2\frac{1}{4}+\log_2 x^{\frac{1}{2}\log_2 x}=\frac{1}{4}\log_2^2 x\Leftrightarrow -2+\frac{1}{2}\log_2^2 x=\frac{1}{4}\log_2^2 x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\log_2^2 x=2\Leftrightarrow \log_2^2 x=8\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=2\sqrt{2},\\ \log_2 x=-2\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2^{2\sqrt{2}},\\ x=2^{-2\sqrt{2}}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4^{\sqrt{2}},\\ x=\left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{2}}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=4^{\sqrt{2}}, x_2=\left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{2}}$.

5. Решение смешанных уравнений и неравенств

Пример 26. Решите уравнение: $\log_4\left(3^x-1\right)\cdot\log_{\frac{1}{4}}\frac{3^x-1}{16}=\frac{3}{4}$.

Решение. Преобразуем данное уравнение, используя свойства логарифмов:

$$\log_4\left(3^x-1\right)\cdot\log_{\frac{1}{4}}\frac{3^x-1}{16}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow \log_4\left(3^x-1\right)\cdot\left(-\left(\log_4\left(3^x-1\right)-\log_4 16\right)\right)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\log_4^2\left(3^x-1\right)+2\log_4\left(3^x-1\right)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow 4\log_4^2\left(3^x-1\right)-8\log_4\left(3^x-1\right)+3=0.$$

Отметим, что в данном случае использование свойств логарифмов не изменяет области определения исходного уравнения. Далее решаем заменой $\log_4\left(3^x-1\right)=t$ и получаем: $4t^2-8t+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\frac{1}{2},\\ t=\frac{3}{2}.\end{array}\right.$

Осталось решить совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\log_4\left(3^x-1\right)=\frac{1}{2},\\ \log_4\left(3^x-1\right)=\frac{3}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x-1=4^{\frac{1}{2}},\\ 3^x-1=4^{\frac{3}{2}}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x=3,\\ 3^x=9\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=2.\end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=1, x_2=2$.

Пример 27. Решите неравенство: $\log_x(2x)\le\sqrt{\log_x\left(2x^3\right)}$.

Решение. Область определения данного неравенства (ООН) задается системой неравенств $\begin{cases}2x>0,\\ 2x^3>0,\\ x>0,\\ x\ne 1,\\ \log_x\left(2x^3\right)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1,\\ 2x^3\ge 1,\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<1,\\ 0<2x^3\le 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1,\\ x\ge \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<1,\\ 0<x\le \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>1,\\ 0<x\le \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.\end{array}\right.$

Преобразуем данное неравенство, используя свойства логарифмов:

$$\log_x(2x)\le\sqrt{\log_x\left(2x^3\right)} \Leftrightarrow \log_x 2+\log_x x\le\sqrt{\log_x 2+\log_x x^3} \Leftrightarrow \log_x 2+1\le\sqrt{\log_x 2+3}.$$

Отметим, что в данном случае использование свойств логарифмов не изменяет области определения исходного неравенства. Далее решаем заменой $\log_x 2=t$ и получаем:

$$t+1\le\sqrt{t+3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}t+1>0,\\ t+3\ge(t+1)^2,\end{cases}\\ \begin{cases}t+1\le 0,\\ t+3\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}t>-1,\\ t^2+t-2\le 0,\end{cases}\\ -3\le x\le -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}t>-1,\\ -2\le t\le 1,\end{cases}\\ -3\le t\le -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<t\le 1,\\ -3\le t\le -1\end{array}\right. \Leftrightarrow -3\le t\le 1.$$

Осталось решить систему двух неравенств, учитывая ООН:

$$\begin{cases}\log_x 2\ge -3,\\ \log_x 2\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1,\\ 2\ge x^{-3},\\ 2\le x,\end{cases}\\ \begin{cases}0<x\le \frac{1}{\sqrt[3]{2}},\\ 2\le x^{-3},\\ 2\ge x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 2,\\ \frac{1}{x^3}\le 2,\end{cases}\\ \begin{cases}0<x\le \frac{1}{\sqrt[3]{2}},\\ \frac{1}{x^3}\ge 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 2,\\ x^3\ge \frac{1}{2},\end{cases}\\ \begin{cases}0<x\le \frac{1}{\sqrt[3]{2}},\\ x^3\le \frac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 2,\\ x\ge \frac{1}{\sqrt[3]{2}},\end{cases}\\ \begin{cases}0<x\le \frac{1}{\sqrt[3]{2}},\\ x\le \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 2,\\ 0<x\le \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.\end{array}\right.$$

Ответ: $0 < x \le \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, x \ge 2$.

Упражнения и ответы

№ 1. Решите уравнение:

1) $\log_{\frac{1}{2}}(7-8x) = -2$; **2)** $\log_{0,7}(3x-1) = \log_{0,7}(6x+8)$; **3)** $\log_{x+1}\left(x^2-3x-4\right) = 1$;

4) $\log_x(2x^2-3x-4) = 2$; **5)** $\log_{3x+7}(5x+3) = \log_{3x+7}\left(9-x^2\right)$;

6) $\log_{\frac{1}{3}} x \cdot \log_{\frac{1}{3}}(3x-2) = \log_{\frac{1}{3}}(3x-2)$; **7)** $\log_2^2 x - 3\log_2 x = 4$;

8) $\lg^2(x+1) = \lg(x+1)\lg(x-1) + 2\lg^2(x-1)$; **9)** $\frac{1}{5-\lg x} + \frac{2}{1+\lg x} = 1$;

10) $\lg 9^{-1} + \frac{1}{3}\lg 3^{x(5x-7)} = 0$; **11)** $\log_{1-2x^2} x = \frac{1}{4} - \frac{3}{\log_2(1-2x^2)^4}$;

12) $\log_7\left(2x^2-7x+6\right) - \log_7(x-2) = \log_7 x$; **13)** $\log_2 x - 2\log_x 2 = -1$;

14) $\lg 2x = 2\lg(4x-15)$; **15)** $\log_6(x-9)^2 - 2 = 2\log_6(x-2)$;

16) $|x-1|^{\lg^2 x - \lg x^2} = |x-1|^3$; **17)** $x^{\frac{1}{4}(\lg x+7)} = 10^{\lg x+1}$;

18) $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x = (2\sqrt{2})^x$; **19)** $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x = 8$.

№ 2. Решите неравенство:

1) $\log_{\frac{1}{5}}(4-3x) \ge -1$; **2)** $\log_8(4-2x) > 2$; **3)** $\log_{0,3}(2x+5) > \log_{0,3}(x+1)$;

4) $\log_{0,5}\left(3x^2-3{,}5\right) \le \log_{0,5}(x-1{,}5)$; **5)** $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2x-1} - \log_{\frac{1}{3}}(x-2) \le 0$;

6) $\log_{\frac{x-1}{5x-6}}\left(\sqrt{6}-2x\right) < 0$; **7)** $\log_{x^2-3}(4x+7) \ge 0$; **8)** $\log_{x^2-1}(x^3+6) \ge \log_{x^2-1}(4x^2-x)$;

9) $\log_{x^2}\frac{2x}{|x-3|} \le \frac{1}{2}$; **10)** $\frac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x} \le \frac{1}{2}$; **11)** $\log_2^2 x - 3\log_2 x < 4$;

12) $\frac{1}{\log_7 x - 1} + \frac{1}{\log_7^2 x + 1} < -\frac{3}{2}$; **13)** $\log_{0,2} x - \log_5(x-2) \le \log_{0,2} 3$;

14) $x^{\log_x (x+3)^2} \ge 16$; **15)** $\sqrt{\log_{13}\sin x} < 1-x$; **16)** $\log_5 x < \sqrt[4]{1-x}$;

17) $\log_2(2^x-1)\cdot\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-2) > 2$; **18)** $\log_3\left(3^x-8\right) \le 2-x$.

Ответы: № 1.

1) $x=\dfrac{3}{8}$; **2)** корней нет; **3)** $x=5$; **4)** $x=4$; **5)** $x=1$;

6) $x=1$; **7)** $x_1=\dfrac{1}{2}; x_2=16$; **8)** $x_1=\sqrt{2}; x_2=3$; **9)** $x_1=100; x_2=1000$;

10) $x_1=2; x_2=-\dfrac{3}{5}$; **11)** $x=\dfrac{1}{2}$; **12)** $x=3$; **13)** $x_1=\dfrac{1}{4}; x_2=2$; **14)** $x=\dfrac{9}{2}$;

15) $x=3$; **16)** $x_1=0{,}1; x_2=2; x_3=1000$; **17)** $x_1=0{,}0001; x_2=10$; **18)** $x=2$;

19) $x_{1,2}=\pm 2$.

Ответы: № 2.

1) $-\dfrac{1}{3}\le x<\dfrac{4}{3}$; **2)** $x<-30$; **3)** решений нет; **4)** $x>1{,}5$; **5)** $(2;5]$;

6) $x<\dfrac{\sqrt{6}-1}{2}; \dfrac{6}{5}<x<\dfrac{\sqrt{6}}{2}$; **7)** $x>2; -\dfrac{7}{4}<x<-\sqrt{3}$; **8)** $\left(-\sqrt{2};-1\right); \left(\sqrt{2};2\right]; [3;+\infty)$;

9) $[5;+\infty)$; **10)** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right); \left[\sqrt{2};+\infty\right)$; **11)** $0{,}5<x<16$; **12)** $\dfrac{1}{7}<x<\dfrac{1}{\sqrt{7}}; \sqrt{7}<x<7$;

13) $x\ge 3$; **14)** $x>1$; **15)** $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z, n\le -1$; **16)** $0<x<1$; **17)** решений нет;

18) $\log_3 8<x\le 2$.

Контрольная работа

Решите уравнение:

1) $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x}$; **2)** $3\cdot 25^x-8\cdot 15^x+5\cdot 9^x=0$; **3)** $\left(x^2-7x+10\right)\left(\log_{\frac{x}{2}} 8x+1\right)=0$.

Решите неравенство:

1) $(2x-3)\sqrt{3x^2-5x+2}\ge 0$; **2)** $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(3^{x+2}-9^x\right)\ge -6$.

Литература

1. Алгебра: учеб. для 8 кл. сред. шк. / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. – М.: Просвещение, 1999.
2. Алгебра: учеб. для 9 кл. сред. шк. / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. – М.: Просвещение, 1999.
3. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10–11 кл. общеобраз. учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. – М.: Просвещение, 2000.
4. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике / М.Я. Выгодский. – М.: Наука, 1986.
5. Задачи по математике. Уравнения и неравенства / В.В. Вавилов и др. – М.: Наука, 1987.
6. Литвиненко В.Н. Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия / В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. – М.: ABF, 1995.

7. Мордкович А.Г. Алгебра. 8 кл. Учебник / А.Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 1999.

8. Мордкович А.Г. Алгебра. 9 кл. Учебник / А.Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 1999.

9. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10–11 кл. Учебник / А.Г. Мордкович. – М.: Мнемониза, 2003.

10. Олехник С.Н. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения / С.Н. Олехник, М.К. Потапов, П.И. Пасиченко. – М.: Дрофа, 2001.

Электронное учебное издание

сетевого распространения

Ахвердиев Рустем Фахраддинович

Турилова Екатерина Александровна

Евсеева Александра Андреевна

Гизатуллин Фаяз Ильдарович

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Корректор
А.Н. Егорова

Подписано к использованию 25.11.2021.
Формат 60×84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 3,5
Заказ 161/11

Издательство Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28