

УДК 539.3

## АЖУРНАЯ СХЕМА МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РЕШЕНИЯ СТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

*А.В. Жидков, С.В. Спирин, Д.Т. Чекмарев*

### Аннотация

Предложена реализация одной из возможных ажурных схем метода конечных элементов для решения трёхмерных статических задач теории упругости. Особенность таких схем заключается в том, что элементы покрывают расчётную область не сплошным образом, а с регулярными промежутками. Ажурное расположение расчётных элементов позволяет существенно сократить вычислительные затраты. Приведены результаты численного решения модельной задачи и сравнение с результатами, полученными на основе традиционной схемы.

**Ключевые слова:** ажурная схема, метод конечных элементов, сетка элементов, ячейка, вариационное уравнение, матрица жёсткости, численная реализация, модельная задача.

### Введение

Во всех известных схемах метода конечных элементов (МКЭ) предполагается, что элементы занимают расчётную область сплошным образом без промежутков и без наложения друг на друга. Такое предположение вполне естественно, если принять во внимание, что решение с использованием функций формы аппроксимируется во всех точках области. При этом информация из одного узла конечноэлементной сетки используется для определения физических полей на всех содержащих его элементах.

С другой стороны, для аппроксимации дифференциального оператора решаемой задачи в узле конечноэлементной сетки используется «избыточная» информация с элементов, инцидентных этому узлу. Так для задач механики сплошных сред в перемещениях или скоростях перемещений дифференциальный оператор содержит пространственные производные второго порядка. При этом в узлах пространственной сетки определяются значения искомых полей перемещений или скоростей. На элементах вычисляются первые производные этих полей и функции от них (деформации, скорости деформаций и напряжения). После процедуры сборки на полном шаблоне, включающем центральный узел и узлы, принадлежащие инцидентным ему элементам, получаем аппроксимацию дифференциального оператора задачи (уравнения движения). Данный оператор содержит аппроксимацию вторых производных, которая получается в два этапа: численным дифференцированием в пределах элемента вычисляются первые производные и сборкой – численным дифференцированием между элементами – вычисляются вторые производные. В том и другом случаях для выполнения операции численного дифференцирования (определения всех частных производных) достаточно четырёх точек, не лежащих в одной плоскости. На первом этапе это – узлы элемента, на втором – центры элементов, окружающих центральный узел полного шаблона. Если на первом этапе

для элементов в виде тетраэдров информация используется максимально эффективно, то на втором этапе вместо допустимых четырёх точек используется в среднем 20–24, что многократно превышает минимально необходимое количество. Поэтому теоретически возможно значительно уменьшить затраты на формирование системы уравнений, если уменьшить число элементов, окружающих каждый узел конечноэлементной сетки.

Таким образом, для эффективного использования узловой информации возможен отказ от требования сплошного заполнения области элементами. Элементы, участвующие в формировании системы алгебраических уравнений, могут заполнять расчётную область с промежутками при условии сохранения связности конечноэлементной сетки. При этом возможно уменьшить число элементов, инцидентных одному узлу сетки, до 4 – минимально допустимого числа элементов, при котором численная схема сохраняет аппроксимацию. Отказ от сплошного заполнения области элементами позволяет получить ряд новых эффективных вычислительных схем.

Принципы построения и использования ажурных схем изложены в работах [1, 2]. Некоторые виды ажурных схем в приложении к динамическим задачам механики сплошных сред описаны в работах [1–4]. В настоящей работе рассматривается реализация одной из возможных ажурных схем для решения трёхмерных статических задач теории упругости.

### 1. Ажурная сетка конечных элементов

Основой рассматриваемой схемы конечноэлементного решения трёхмерных статических задач теории упругости является ажурная сетка конечных элементов. При этом для получения ажурной сетки шестигранная ячейка регулярной гексаэдральной сетки, покрывающей расчётную область, разбивается на пять тетраэдров (рис. 1), оставляется центральный тетраэдр, остальные тетраэдры в расчётах не

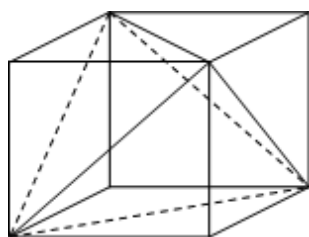


Рис. 1. Элемент ажурной сетки

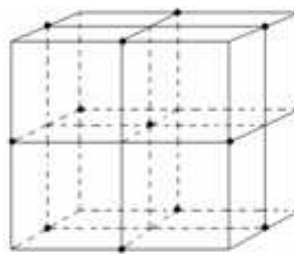


Рис. 2. Шаблон ажурной сетки

участвуют. Для внутреннего узла (рис. 2), которому инцидентны восемь шестигранных ячеек, оставляются тетраэдры, имеющие с соседними общие рёбра. Получающееся при этом заполнение шестигранного шаблона тетраэдрами ажурной сетки показано на рис. 3. В результате по сравнению с традиционной сеткой, состоящей из тетраэдров, сплошным образом заполняющих весь объём, ажурная сетка имеет в пять раз меньше элементов и практически вдвое меньше узлов (рис. 4).

### 2. Реализация численного решения

Численная реализация решения статических задач в упругой постановке основана на конечноэлементной аппроксимации вариационного уравнения (принципа

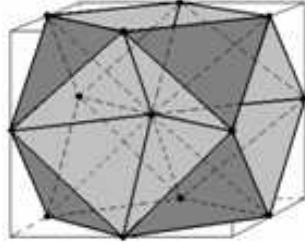


Рис. 3. Элементы ажурной сетки, заполняющей шаблон

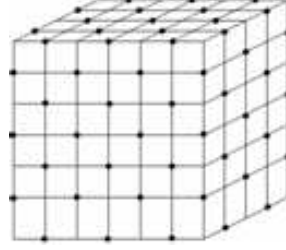


Рис. 4. Узлы регулярной сетки, участвующие в расчетах

виртуальных перемещений)

$$\iiint_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \iiint_V \rho \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \iint_{S_p} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} dS,$$

где  $V$  – объём упругого изотропного тела, на некоторой части границы  $S_p$  которого заданы поверхностные нагрузки;  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – линейный тензор деформаций;  $\mathbf{u}$  – вектор перемещений;  $\delta(\cdot)$  – вариация соответствующей величины;  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{P}$  – вектор массовых и вектор поверхностных нагрузок соответственно;  $\rho$  – плотность; одной точкой  $(\cdot)$  обозначено скалярное произведение векторов; двумя точками  $(\cdot \cdot)$  – двойная свёртка тензоров второго ранга. Перемещения, углы поворота, деформации считаются малыми

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (1)$$

деформации связаны с напряжениями законом Гука

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{E} \mathbf{E} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2)$$

где  $\nabla$  – набла-оператор Гамильтона;  $\lambda$  и  $\mu$  – параметры Ламе;  $\mathbf{E}$  – единичный (метрический) тензор.

Рассматривается реализация варианта ажурной схемы МКЭ на основе линейного четырёхузлового элемента. Распределение перемещений в элементах принимается линейным. Объёмные и поверхностные силы, действующие на удаляемых тетраэдрах и их поверхностях, распределяются по узлам элементов, участвующих в расчёте. На равномерных сетках данная ажурная схема имеет второй порядок аппроксимации.

Как это принято в МКЭ, используется не тензорная, а матрично-векторная форма записи соотношений. Вектор узловых перемещений конечного элемента обозначается через

$$(\mathbf{u})^T = (u_1^1, u_1^2, u_1^3, u_2^1, u_2^2, u_2^3, u_3^1, u_3^2, u_3^3, u_4^1, u_4^2, u_4^3),$$

нижний индекс – локальный номер узла элемента, верхний индекс – номер пространственной координаты вектора. Векторы координат линейного тензора деформаций и напряжений (в силу симметрии рассматриваются только шесть компонент) обозначаются соответственно

$$(\boldsymbol{\varepsilon})^T = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}), \quad (\boldsymbol{\sigma})^T = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31});$$



Условие стационарности энергетического функционала, аналогичного по форме (5), приводит к системе линейных алгебраических уравнений равновесия тела относительно перемещений, которая модифицируется с учётом граничных условий по перемещениям. Решением получающейся системы с помощью прямого или итерационного метода определяются узловые перемещения всей расчётной области и по формулам (3) и (4) вычисляются компоненты тензоров деформаций и напряжений.

### 3. Решение модельной задачи

Рассматривается контактная задача определения упругого состояния толстостенной трубы конечной длины, сдавливаемой абсолютно жёсткими пластинами, параллельными оси трубы. Внутренний радиус трубы – 5 см, внешний радиус трубы – 10 см, длина трубы – 60 см, смещение каждой абсолютно жёсткой пластины при сдавливании – 0.5 мм, модуль упругости материала – 200 ГПа, коэффициент Пуассона – 0.3. В силу симметрии задачи расчётная схема представляет собой одну восьмую часть трубы с условиями симметрии на соответствующих плоскостях (рис. 5).



Рис. 5. Расчётная область

Решение контактной задачи реализовано путём посадки узлов конечноэлементной сетки, выходящих за пределы плоскости контакта, на эту плоскость и итерационного уточнения по условиям равновесия.

На рис. 6 показана сходимость решения по радиальным перемещениям вдоль образующей внутренней поверхности трубы, расположенной под зоной контакта, на сгущающихся сетках. Начальная сетка содержала 10 элементов по толщине трубы, 16 элементов в окружном направлении и 60 элементов по длине трубы. В двух последующих расчётах количество элементов по каждому направлению увеличилось соответственно в два и четыре раза по сравнению с начальной сеткой.

Решение, полученное с использованием ажурной схемы, сравнивалось с решением задачи в аналогичной постановке, полученным в системе ANSYS. Результаты сравнения по радиальным перемещениям вдоль образующей внутренней поверхности трубы, расположенной под зоной контакта, для одного из вариантов расчётов показаны на рис. 7. Как видно, решения дают хорошее качественное и количественное совпадение за исключением небольшой (1 элемент) зоны краевого эффекта вблизи свободного торца трубы.

Полученные результаты решения модельной задачи показывают возможность и эффективность использования ажурной схемы для статических задач теории упругости.

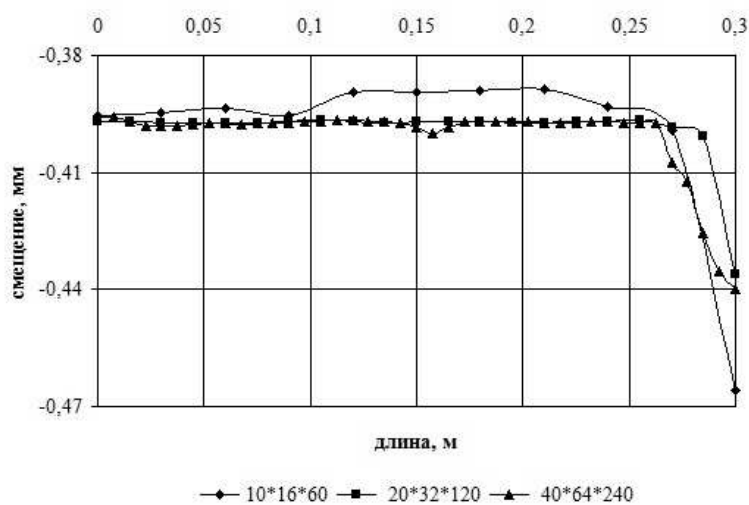


Рис. 6. Сходимость решения

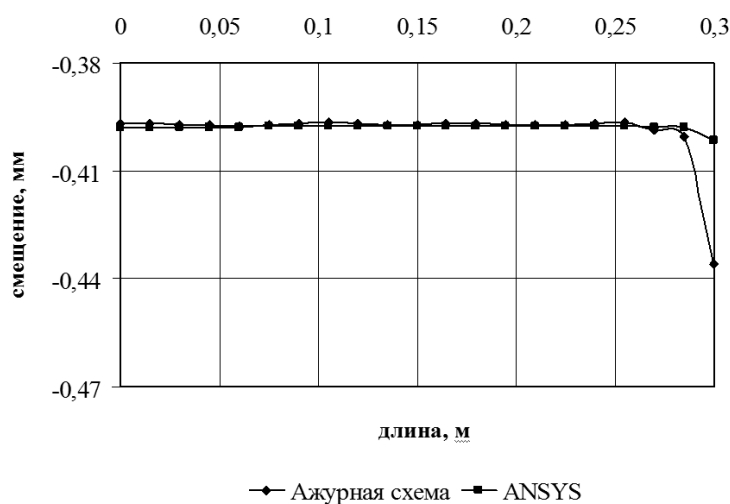


Рис. 7. Сравнение решений

### Summary

*A.V. Zhidkov, S.V. Spirin, D.T. Chekmarev.* A Rare Mesh Finite Element Scheme for Solving Static Elasticity Problems.

This article proposes an implementation of one of the possible rare mesh finite element schemes for solving three-dimensional static problems of the theory of elasticity. A characteristic feature of these schemes is that the elements cover the computational domain not in a continuous manner, but with regular intervals. A rare location of the calculated elements can significantly reduce the computational cost. The results of the numerical solution of the model problem are given and compared with the results obtained on the basis of the traditional schemes.

**Key words:** rare mesh scheme, finite element method, mesh of elements, cell, variational equation, stiffness matrix, numerical implementation, model problem.

**Литература**

1. *Чекмарев Д.Т.* Ажурные схемы метода конечного элемента // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – Н. Новгород: ННГУ, 1997. – Вып. 55. – С. 157–159.
2. *Чекмарев Д.Т.* Численные схемы метода конечного элемента на «ажурных» сетках // Вопр. атомной науки и техники, Сер. Матем. моделирование физ. процессов. – 2009. – Вып. 2. – С. 49–54.
3. *Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т.* Решение задач нестационарной динамики пластин и оболочек вариационно-разностным методом. – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2000. – 118 с.
4. *Жидков А.В., Зефирова С.В., Кастальская К.А., Спиринов С.В., Чекмарев Д.Т.* Ажурная схема численного решения трёхмерных динамических задач теории упругости и пластичности // Вестн. Нижегород. гос. ун-та. – 2011. – № 4, Ч. 4. – С. 1480–1482.

Поступила в редакцию  
01.11.12

---

**Жидков Александр Васильевич** – кандидат технических наук, доцент кафедры теории упругости и пластичности Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

E-mail: [zhidkov@mm.unn.ru](mailto:zhidkov@mm.unn.ru)

**Спирин Сергей Валерьевич** – аспирант кафедры численного моделирования физико-механических процессов Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

E-mail: [SpirinSergeyV@yandex.ru](mailto:SpirinSergeyV@yandex.ru)

**Чекмарев Дмитрий Тимофеевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры численного моделирования физико-механических процессов Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

E-mail: [4ekt@mm.unn.ru](mailto:4ekt@mm.unn.ru)