УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2020, Т. 162, кн. 4 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 387–395 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 519.17 doi: 10.26907/2541-7746.2020.4.387-395

О ХРОМАТИЧЕСКОМ ЧИСЛЕ ГРАФОВ С НЕКОТОРЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ СТЕПЕНЕЙ ВЕРШИН

С.Н. Селезнева

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, 119991, Россия

Аннотация

Рассмотрены графы, в которых степень одной вершины равна $(d+1)$, а степени всех других вершин не превосходят d, $d \geqslant 3$. Установлены свойства, при которых вершины таких графов могут быть раскрашены в d цветов.

Ключевые слова: граф, раскраска, вершинная раскраска, хроматическое число, степень вершины графа

Введение

К задаче вершинной раскраски графов сводится ряд задач в приложениях. Напомним, что раскраской вершин графа в k цветов называется такое приписывание каждой его вершине одного из k цветов, что концы любого ребра получают разные цвета. При этом наименьшее число цветов, в которые можно раскрасить вершины графа, называется его хроматическим числом. Несложно увидеть, что вершины графа можно раскрасить в один цвет в том и только в том случае, когда этот граф не содержит ребер (то есть является пустым графом). Вершины графа можно раскрасить в два цвета тогда и только тогда, когда этот граф не содержит простых циклов нечетной длины (теорема Кенига, см., например, [1, с. 36], [2]). При каждом заданном $k \geqslant 3$ задача проверки существования вершинной раскраски графа в k цветов является NP-полной [3, 4]. В настоящее время проводятся исследования сложности задачи k-раскраски графов с определенными ограничениями их структуры (см., например, [5] и библиографию в ней). Известны также верхние оценки хроматического числа графа, в частности, вершины любого графа можно раскрасить в $(d+1)$ цвет, где d – наибольшая степень вершин этого графа. Теорема Брукса показывает, для каких графов эту оценку можно понизить до d (см., например, [1, с. 239], [2, с. 360]). Рассмотрим графы, в которых степень одной вершины равна $(d+1)$, а степени всех других вершин не превосходят d, $d \geqslant 3$. В [6] найдены свойства вершинных раскрасок таких графов для случая $d = 3$. В настоящей работе рассматривается общий случай $d \geqslant 3$. Устанавливаются свойства, при которых хроматическое число таких графов не превосходит d.

1. Основные определения

Напомним некоторые определения, относящиеся к графам (см., например, [1, 2]). Под графом G понимаем пару множеств $(V(G), E(G))$, где $V(G)$ – множество вершин, $E(G)$ – множество неупорядоченных пар различных вершин, называемых ребрами. Другими словами, рассматриваем неориентированные простые графы (то есть графы без петель и кратных ребер). Если $H_1,\ H_2$ – графы, то говорим, что граф H_1 является графом H_2, если графы H_1 и H_2 – изоморфны. Граф H называется подграфом графа G, если $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$.

Если $W \subseteq V(G)$, то граф $G - W$ получается из графа G удалением всех вершин из множества W и всех исходящих из них ребер. Если $U \subseteq V(G)$, то граф $G - W$, где $W = V(G) \setminus U$, называется порожденным подграфом графа G и обозначается $G(U)$. Если $G,\ H$ – графы, то говорим, что G содержит H, если для некоторого U, $U \subseteq V(G)$, граф $G(U)$ является графом H; иначе говорим, что G не содержит H. Если $e \in E(G)$, то граф $G - e$ получается из графа G удалением ребра e. Если $v,\, w \in V(G)$, то граф $G+(v,w)$ получается из графа G добавлением ребра (v,w), если ребро (v,w) отсутствует в G; и совпадает с графом G иначе. Если $v,\, w \in V(G)$, то граф $G_{v=w}$ получается из графа G отождествлением вершин v и w (с последующим удалением возможно появившихся петель и кратных ребер). Степенью $d_G(v)$ вершины $v \in V(G)$ в графе G называется число исходящих из нее ребер. Величина $\Delta(G) = \max\limits_{v \in V(G)} d_G(v)$ обозначает наибольшую степень вершин в графе G.

Путем длины m в графе G называется последовательность вершин $v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}, v_m$, в которой $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E(G)$ при всех $i = 1, \ldots, m$. Путь замкнут, если $v_m = v_0$. Путь называется цепью, если все его ребра различны; замкнутая цепь называется циклом. Цепь называется простой цепью, если все ее вершины различны. Цикл $v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}, v_0$ называется простым циклом, если вершины $v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}$ различны. Граф называется простым циклом, если он является каким-то простым циклом. Граф называется связным, если любые две его вершины можно соединить какой-то простой цепью. Максимальный по включению связный подграф графа называется его компонентой связности, или просто компонентой.

Пустым графом называется граф, в котором отсутствуют ребра. Множество U, $U \subseteq V(G)$, называется независимым множеством вершин в графе G, если порожденный подграф $G(U)$ является пустым. Полным графом K_n называется граф с n вершинами, в котором любые две различные вершины смежны. Почти полным графом K_n^- называется граф, полученный из полного графа K_n удалением произвольного ребра. При этом две вершины графа K_n^-, которые не соединены ребром, назовем особыми.

Раскраской (вершин) графа G в k цветов называется такое отображение $\rho : V(G) \to K$, где $|K| = k$, что $\rho(v) \neq \rho(w)$ для всех ребер $(v,w) \in E(G)$. Если существует раскраска (вершин) графа G в k цветов, то говорим, что граф G *можно раскрасить* в k цветов. Наименьшее число цветов, в которое можно раскрасить граф G, называется его *хроматическим числом* $\chi(G)$.

2. Раскраски графов палитрами

В [6] рассматривалось понятие палитры для графов. Палитру можно понимать как особый вид списочных раскрасок вершин графов, или раскрасок вершин графов в предписанные цвета (см. [7], [2, с. 377]). Напомним определения, связанные с палитрами. Если K – множество цветов и G – граф, то произвольное отображение $\pi : V(G) \to 2^K \setminus \{\emptyset\}$ называется *палитрой* графа G (где 2^K обозначает множество всех подмножеств множества K). При этом для вершины $v \in V(G)$ множество цветов $\pi(v)$ называется *палитрой* этой вершины v. *Раскраской* (вершин) графа G *палитрой* π называется такое отображение $\rho : V \to K$, что

1) для каждой вершины $v \in V(G)$ верно $\rho(v) \in \pi(v)$, то есть цвет любой вершины содержится в ее палитре;

2) для каждого ребра $(v, w) \in E(G)$ верно $\rho(v) \neq \rho(w)$, то есть любым смежным вершинам сопоставлены различные цвета.

Пусть задано множество цветов K, где $|K| = k$. Для произвольного графа G любую его палитру с цветами из K назовем *k-палитрой.* Множество всех k-палитр графа G обозначим через $\Pi_k(G)$. Если $\pi \in \Pi_k(G)$ и для любой вершины $v \in V(G)$ верно $|\pi(v)| = m$, то такую палитру назовем (k,m)-палитрой. Множество всех (k,m)-палитр графа G обозначим через $\Pi_{k,m}(G)$.

Рассмотрим некоторые свойства палитр.

Предложение 1. *Пусть $d \geqslant 2$, $G = K_d$ – полный граф и $\pi \in \Pi_{d,d-1}(G)$ – его $(d, d-1)$-палитра. Граф G можно раскрасить палитрой π тогда и только тогда, когда найдутся такие вершины $v_1, v_2 \in V(G)$, что $\pi(v_1) \neq \pi(v_2)$.*

Доказательство. Если палитра π всем вершинам графа G приписывает одинаковые множества, то утверждение верно, так как полный граф K_d не раскрасить в $(d-1)$ цвет. Пусть теперь найдутся такие вершины v_1, $v_2 \in V$, что $\pi(v_1) \neq \pi(v_2)$. Припишем вершине v_1 какой-то цвет из $\pi(v_1)$, не принадлежащий $\pi(v_2)$. Далее последовательно просмотрим все оставшиеся вершины графа G таким образом, чтобы вершина v_2 оказалась завершающей. При этом просмотре каждой новой вершине v будем приписывать цвет из $\pi(v)$, не совпадающий с цветом всех вершин, которым уже приписан какой-то цвет. Если $v \neq v_2$, то цвета приписаны не более $(d-2)$ вершинам, а $|\pi(v)| = d-1$, поэтому такой цвет всегда найдется. Когда достигнем вершины v_2, такой цвет также найдется, так как вершине v_1 приписан цвет, не принадлежащий $\pi(v_2)$, а значит, в цвета из $\pi(v_2)$ раскрашены не более $(d-2)$ вершин, а $|\pi(v_2)| = d-1$. Предложение доказано. $\square$

Рассмотрим одно свойство палитр из [6].

Предложение 2 [6]. *Пусть $C = C_m$ – простой цикл нечетной длины $m = 2k-1$, $k \geqslant 2$, и $\pi \in \Pi_{3,2}(C)$ – его $(3,2)$-палитра. Цикл C можно раскрасить палитрой π тогда и только тогда, когда найдутся такие вершины $v_1, v_2 \in V(C)$, что $\pi(v_1) \neq \pi(v_2)$.*

Доказательство. Если палитра π всем вершинам цикла C приписывает одинаковые множества, то утверждение верно, так как простой цикл нечетной длины не раскрасить в 2 цвета [1, с. 36]. Если же найдутся такие вершины v_1, $v_2 \in V$, что $\pi(v_1) \neq \pi(v_2)$, то можно считать, что $(v_1, v_2) \in E(C)$. Припишем вершине v_1 какой-то цвет из $\pi(v_1)$, не принадлежащий $\pi(v_2)$. Обойдем цикл C от вершины v_1 до вершины v_2 (не проходя по ребру (v_1, v_2)). При этом обходе каждой новой встречающейся вершине v будем приписывать цвет из $\pi(v)$, не совпадающий с цветом вершины, из которой в вершину v перешли. Когда придем в вершину v_2, такой цвет также найдется, так как вершине v_1 приписан цвет, не принадлежащий $\pi(v_2)$. Предложение доказано. $\square$

3. Вспомогательные утверждения

Напомним теорему Брукса, так как в дальнейшем в доказательствах будем на нее ссылаться. Теорема Брукса утверждает, что если G – связный граф, не являющийся простым циклом нечетной длины или полным графом, то его вершины можно раскрасить в $\Delta(G)$ цветов (см., например, [1, с. 239], [2, с. 360]).

Далее будем рассматривать графы, в которых степень одной вершины равна $(d+1)$, а степени всех других вершин не превосходят d, $d \geqslant 3$. Пусть G – один из таких графов. Если он содержит подграф K_{d+1}, то, очевидно, его вершины не раскрасить в d цветов. Пусть он содержит порожденный подграф $H = G(U)$, где

$U \subseteq V(G)$, являющийся графом K^-_{d+1} с особыми вершинами u' и u''. Несложно увидеть, что при любой раскраске графа G в d цветов вершины u' и u'' получают одинаковые цвета. В [6] показано, что подобные порожденные подграфы можно некоторым образом удалить из графа G; при этом вершины полученного графа можно раскрасить в d цветов в том и только в том случае, когда вершины исходного графа G можно раскрасить в d цветов. А именно, справедливо следующее утверждение.

Предложение 3 [6]. *Пусть $d \geqslant 3$, G – граф, $H = G(U)$ – его порожденный подграф, являющийся K^-_{d+1} с особыми вершинами u', u'', где $U = \{u', u'', u_1, \dots, u_{d-1}\} \subseteq V(G)$, причем $d_G(u_1) \leqslant d+1$ и $d_G(u_i) \leqslant d$ при $i = 2, \dots, d-1$. Далее пусть $G' = (G - \{u_1, \dots, u_{d-1}\})_{u'=u''}$. Тогда вершины графа G' можно раскрасить в d цветов в том и только в том случае, когда вершины графа G можно раскрасить в d цветов.*

Приведем с обоснованием еще одну вспомогательную лемму из [6].

Лемма 1 [6] . *Пусть $d \geqslant 3$, G – связный граф, в котором для некоторой вершины $v_0 \in V(G)$ верно $d_G(v_0) = d+1$, а для любой другой вершины $v \in V(G)$, $v \neq v_0$, верно $d_G(v) \leqslant d$, кроме того, граф G не содержит K_{d+1}. Если в графе G найдется такая вершина $u \in V(G)$, что $d_G(u) < d$, то вершины графа G можно раскрасить в d цветов.*

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по числу вершин $p = |V(G)|$ в графе G. *Базис индукции* $p = d+2$ верен. *Индуктивный переход*: пусть утверждение верно для всех связных графов с не более $(p-1)$ вершиной, которые удовлетворяют условиям леммы. Рассмотрим связный граф G с p вершинами, удовлетворяющий условиям леммы. Рассмотрим граф $G' = G - u$. Все компоненты связности графа G', за исключением, возможно, одной, находятся в условиях теоремы Брукса, поэтому их вершины можно раскрасить в d цветов. Пусть найдется такая компонента связности H графа G', что $v_0 \in V(H)$ и $d_H(v_0) = d+1$. Тогда найдется такая вершина $u' \in V(H)$, что $d_H(u') < d$. А значит, для графа H верно предположение индукции, и его вершины можно раскрасить в d цветов. Теперь можно получить раскраску графа G в d цветов, приписав вершине u цвет, не встречающийся среди смежных с ней вершин. Вершина u смежна с не более $(d-1)$ вершиной, поэтому такой цвет всегда найдется. Лемма доказана. $\square$

4. Вершинные раскраски некоторых графов

Теперь докажем основную теорему. Отметим, что частный случай $d = 3$ теоремы 1 доказан в [6]. Здесь мы доказываем общий случай $d \geqslant 3$ этой теоремы, кроме того, приводим несколько другое доказательство случая $d = 3$.

Теорема 1. *Пусть $d \geqslant 3$, G – связный граф, в котором для некоторой вершины $v_0 \in V(G)$ верно $d_G(v_0) = d+1$, для любой другой вершины $v \in V(G)$, $v \neq v_0$, верно $d_G(v) \leqslant d$, кроме того, граф G не содержит K_{d+1}, K^-_{d+1}. Тогда $\chi(G) \leqslant d$.*

Доказательство. По лемме 1 можно считать, что в графе G для любой вершины $v \in V(G) \setminus \{v_0\}$ верно $d_G(v) = d$. Проведем доказательство индукцией по числу d.

Базис индукции: $d = 3$.

1. Если в графе G найдется порожденный простой цикл нечетной длины $C = C_m$, где $m = 2k-1$, $k \geqslant 2$, с вершинами $\{u_1, \dots, u_m\}$, не проходящий через

вершину v_0, то любая вершина u_i в графе G смежна ровно с одной вершиной v_i, не принадлежащей циклу C, $i = 1, \dots, m$ (не все вершины $v_1, \dots, v_m$ обязаны быть различными). Заметим, что среди вершин $v_1, \dots, v_m$ хотя бы две различны (так как если предположить обратное, то при $m = 3$ получим граф K_4 в G, а при $m \geqslant 5$ получим вершину степени, не меньшей 5, в G, что противоречит условию). Теперь если вершины $v_1, \dots, v_m$ не образуют независимое множество в графе G, то положим $G' = G - \{u_1, \dots, u_m\}$. Если же вершины $v_1, \dots, v_m$ образуют независимое множество в графе G, то рассмотрим граф $G_0 = G - \{u_1, \dots, u_m\}$. Если граф G_0 состоит не менее чем из трех компонент связности, то пусть v_i, v_j – вершины из разных компонент, не содержащих вершину v_0. Если граф G_0 состоит из двух компонент связности, то пусть v_i, v_j – вершины из разных компонент. Если же G_0 – связный граф, то пусть v_i, v_j – любые различные вершины из вершин $v_1, \dots, v_m$. Теперь положим $G' = G_0 + (v_i, v_j)$. Граф G' не содержит K_4, поскольку граф G не содержит K_4^-. Кроме того, если $d_{G'}(v_0) = 4$, то он содержит вершину степени, меньшей 3, в компоненте связности, к которой принадлежит вершина v_0. Значит, применяя теорему Брукса или лемму 1, вершины каждой компоненты связности графа G' можно раскрасить в три цвета. Далее рассмотрим палитру $\pi \in \Pi_{3,2}(C)$, в которой палитре $\pi(u_i)$ вершины $u_i \in V(C)$ не принадлежит цвет вершины v_i и принадлежат два других цвета, $i = 1, \dots, m$. Вершины $v_1, \dots, v_m$ соединены хотя бы одним ребром в графе G', поэтому хотя бы для двух вершин из $u_1, \dots, u_m$ их палитры различны. Значит, по предложению 2 вершины цикла C можно раскрасить палитрой π. Получаем раскраску графа G в три цвета.

2. Пусть теперь в графе G отсутствуют простые циклы нечетной длины, не проходящие через вершину v_0. Тогда построим разбиение вершин $V(G)$ графа G на два множества U, W $(U \bigcap W = \emptyset)$. Положим $U_0 = \{v_0\}$, $W_0 = V(G) \setminus U_0$, $i = 0$. Если некоторая вершина $v_i \in W_i$ в графе G смежна только с вершинами из множества W_i, то положим $U_{i+1} = U_i \bigcup \{v_i\}$, $W_{i+1} = W_i \setminus \{v_i\}$, увеличим i на 1 и повторим рассуждения. В обратном случае положим, что $U = U_i$, $W = W_i$ – искомые множества. Заметим, что по построению порожденный подграф $G(U)$ является пустым. Рассмотрим граф $G' = G - U$. Степени всех его вершин не превосходят двух, и он не содержит простых циклов нечетной длины, так как граф G не содержит простых циклов нечетной длины, не проходящих через вершину v_0. По теореме Кенига его вершины можно раскрасить в два цвета. Далее раскрасим все вершины из множества U в оставшийся третий цвет. Получим раскраску графа G в три цвета.

Индуктивный переход. Рассмотрим граф G, для которого выполняются условия теоремы при $d \geqslant 4$.

1. Если в графе G найдется подграф $H = K_d$, не содержащий вершину v_0, где $V(H) = \{u_1, \dots, u_d\}$, то любая вершина u_i смежна ровно с одной вершиной v_i, не принадлежащей графу H, $i = 1, \dots, d$ (не все вершины $v_1, \dots, v_d$ обязаны быть различными). Заметим, что среди вершин $v_1, \dots, v_d$ хотя бы две различны (так как если предположить обратное, то получим граф K_{d+1} в G, что противоречит условию). Теперь если вершины $v_1, \dots, v_d$ не образуют независимое множество в графе G, то положим $G' = G - \{u_1, \dots, u_d\}$. Если же вершины $v_1, \dots, v_d$ образуют независимое множество в графе G, то рассмотрим граф $G_0 = G - \{u_1, \dots, u_d\}$. Если граф G_0 состоит не менее чем из трех компонент связности, то пусть v_i, v_j – вершины из разных компонент, не содержащих вершину v_0. Если граф G_0 состоит из двух компонент связности, то пусть v_i, v_j – вершины из разных компонент. Если же G_0 – связный граф, то пусть v_i, v_j – любые различные вершины из вершин $v_1, \dots, v_d$. Теперь положим $G' = G_0 + (v_i, v_j)$. Граф G' не содержит K_{d+1}, поскольку граф G не содержит K_{d+1}^-. Кроме того, если $d_{G'}(v_0) = d + 1$, то он содержит

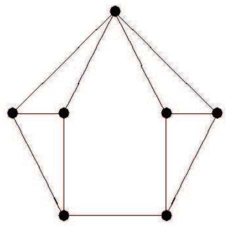

Рис. 1

вершину степени, меньшей d, в компоненте связности, к которой принадлежит вершина v_0. Значит, применяя теорему Брукса или лемму 1, вершины каждой компоненты графа G' можно раскрасить в d цветов. Далее рассмотрим палитру $\pi \in \Pi_{d,d-1}(H)$, в которой палитре $\pi(u_i)$ любой вершины $u_i \in V(H)$ не принадлежит цвет вершины v_i и принадлежат все другие $(d-1)$ цветов, $i = 1, \ldots, d$. Вершины $v_1, \ldots, v_d$ соединены хотя бы одним ребром в графе G', поэтому хотя бы для двух вершин из $u_1, \ldots, u_d$ их палитры различны. Значит, по предложению 1 вершины графа H можно раскрасить палитрой π. Получаем раскраску графа G в d цветов.

2. Пусть теперь в графе G отсутствуют подграфы K_d, не содержащие вершину v_0. Тогда построим разбиение вершин $V(G)$ графа G на два множества U, W $(U \bigcap W = \emptyset)$. Положим $U_0 = \{v_0\}$, $W_0 = V(G) \setminus U_0$, $i = 0$. Если некоторая вершина $v_i \in W_i$ в графе G смежна только с вершинами из множества W_i, то положим $U_{i+1} = U_i \bigcup \{v_i\}$, $W_{i+1} = W_i \setminus \{v_i\}$, увеличим i на 1 и повторим рассуждения. В обратном случае положим, что $U = U_i$, $W = W_i$ – искомые множества. Заметим, что по построению порожденный подграф $G(U)$ является пустым. Рассмотрим граф $G' = G - U$. Степень любой его вершины не превосходит $(d-1)$, и он не содержит K_d, поскольку граф G не содержит подграфов K_d, которым не принадлежит вершина v_0. По теореме Брукса его вершины можно раскрасить в $(d-1)$ цвет. Далее раскрасим все вершины из множества U в оставшийся d-й цвет. Получим раскраску графа G в d цветов. Теорема доказана. □

Отметим, что рассуждениями, подобными доказательству теоремы 1, можно получить еще одно доказательство известной теоремы Брукса.

Теперь установим, при каких условиях графы с рассматриваемыми ограничениями степеней вершин можно раскрасить в d цветов.

Теорема 2. *Пусть G – связный граф, в котором для некоторой вершины $v_0 \in V(G)$ верно $d_G(v_0) = 4$, для любой другой вершины $v \in V(G)$, $v \neq v_0$, верно $d_G(v) \leqslant 3$, кроме того, граф G не содержит K_4. Вершины графа G можно раскрасить в три цвета тогда и только тогда, когда он не является графом, изображенным на рис. 1.*

Доказательство. Если граф G является графом, изображенным на рис. 1, то его вершины в три цвета не раскрасить. Пусть теперь граф G не является графом, изображенным на рис. 1.

1. Пусть граф G содержит порожденный подграф $H = G(U)$, являющийся K_4^- с особыми вершинами u', u'', где $U = \{u', u'', u_1, u_2\} \subseteq V(G)$. Тогда по предложению 3 вершины графа G можно раскрасить в три цвета тогда и только тогда, когда вершины графа $G' = (G - \{u_1, u_2\})_{u'=u''}$ можно раскрасить в три цвета. Теперь если $u' \neq v_0$ и $u'' \neq v_0$, то вершины графа G' можно раскрасить в три

цвета (по теореме Брукса или лемме 1), так как G' не содержит K_4 и $d_{G'}(u') \leqslant 2$. Если $u' = v_0$ или $u'' = v_0$, то степень любой вершины в графе G' не превосходит трех. Если предположить, что граф G' содержит K_4, то этому графу K_4 могут принадлежать только вершина u' и три вершины (обозначим их как v_1, v_2, v_3), являющиеся концами трех ребер, исходящих из вершин u' и u'' и не принадлежащих подграфу H. Но тогда вершины v_1, v_2, v_3 вместе с вершинами множества U и всеми соединяющими их ребрами в графе G образуют граф, как на рис. 1, что противоречит условию. Значит, граф G' не содержит K_4, и по теореме Брукса его вершины можно раскрасить в три цвета.

2. Если же граф G не содержит порожденных подграфов, являющихся K_4^-, то его вершины можно раскрасить в три цвета по теореме 1 или по теореме из [6]. Теорема доказана. □

Теорема 3. *Пусть $d \geqslant 4$, G – связный граф, в котором для некоторой вершины $v_0 \in V(G)$ верно $d_G(v_0) = d + 1$, для любой другой вершины $v \in V(G)$, $v \neq v_0$, верно $d_G(v) \leqslant d$, кроме того, граф G не содержит K_{d+1}. Тогда вершины графа G можно раскрасить в d цветов.*

Доказательство. 1. Пусть граф G содержит порожденный подграф $H = G(U)$, являющийся K_{d+1}^- с особыми вершинами u', u'', где $U = \{u', u'', u_1, \ldots, u_{d-1}\} \subseteq V(G)$. Тогда по предложению 3 вершины графа G можно раскрасить в d цветов тогда и только тогда, когда вершины графа $G' = (G - \{u_1, \ldots, u_{d-1}\})_{u'=u''}$ можно раскрасить в d цветов. Заметим, что $d_{G'}(u') \leqslant 3$. Поэтому граф G' не содержит K_{d+1}, так как $d \geqslant 4$ и граф G не содержит K_{d+1}. Значит, по теореме Брукса или лемме 1 вершины графа G' можно раскрасить в d цветов.

2. Если же граф G не содержит порожденных подграфов, являющихся K_{d+1}^-, то его вершины можно раскрасить в d цветов по теореме 1. Теорема доказана. □

Заключение

В работе рассмотрены графы, в которых степень одной вершины равна $(d+1)$, а степени всех других вершин, не превосходят d, $d \geqslant 3$. Установлены условия, при которых хроматическое число таких графов не превосходит d.

Благодарности. Работа поддержана МЦФПМ-МГУ, проект «Оценки сложностных характеристик булевых функций и графов» (2020 г.).

Литература

1. *Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И.* Лекции по теории графов. – М.: Либроком, 2009. – 383 с.

2. *Bondy J.A., Murty U.S.R.* Graph Theory. – Springer, 2008. – 655 p.

3. *Stockmeyer L.J.* Planar 3-colorability is NP-complete // SIGACT News. – 1973. – V. 5, No 3. – P. 19–25.

4. *Garey M.R., Johnson D.S., Stockmeyer L.* Some simplified NP-complete graph problems // Theor. Comput. Sci. – 1976. – V. 1, No 3 – P. 237–267. – doi: 10.1016/0304-3975(76)90059-1.

5. *Малышев Д.С.* Полная классификация сложности задачи о вершинной 3-раскраске для четверок порожденных 5-вершинных запретов // Журн. Средневолж. матем. о-ва. – 2020. – Т. 22, Вып. 1. – С. 38–47. – doi: 10.15507/2079-6900.22.202001.38-47.

6. *Селезнева С.Н., Мельник М.В., Астахова А.В.* Раскраска в три цвета псевдокубических графов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. – 2019. – Вып. 2. – С. 39–45.

7. *Визинг В.Г.* Раскраска вершин графа в предписанные цвета // Методы дискретного анализа в теории кодов и схем: Сб. науч. тр. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1976. – Вып. 29. – С. 3–10.

Поступила в редакцию
23.10.2020

Селезнева Светлана Николаевна, доктор физико-математических наук, профессор факультета вычислительной математики и кибернетики

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия
E-mail: *selezn@cs.msu.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2020, vol. 162, no. 4, pp. 387–395

doi: 10.26907/2541-7746.2020.4.387-395

On the Chromatic Number of Graphs with Some Restriction of Vertex Degrees

S.N. Selezneva

Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia
E-mail: *selezn@cs.msu.ru*

Received October 23, 2020

Abstract

Graphs, for which the degree of a certain vertex is equal to $(d+1)$ and the degrees of all other vertices are at most d, $d \geqslant 3$, were considered. Properties were obtained to color vertices of these graphs in d colors.

Keywords: graph, coloring, vertex coloring, chromatic number, degree of vertex in graph

Acknowledgments. The study was supported by the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow State University (project “Bounds for complexity characteristics of Boolean functions and graphs”, 2020).

References

1. Emelichev V.A., Mel'nikov O.I., Sarvanov V.I., Tyshkevich R.I. *Lektsii po teorii grafov* [Lectures on Graph Theory]. Moscow, Librokom, 2009. 383 p. (In Russian)

2. Bondy J.A., Murty U.S.R. *Graph Theory.* Springer, 2008. 655 p.

3. Stockmeyer L.J. Planar 3-colorability is NP-complete. *SIGACT News*, 1973, vol. 5, no. 3, pp. 19–25.

4. Garey M.R., Johnson D.S., Stockmeyer L. Some simplified NP-complete graph problems. *Theor. Comput. Sci.*, 1976, vol. 1, no. 3, pp. 237–267. doi: 10.1016/0304-3975(76)90059-1.

5. Malyshev D.S. A complete classification of the complexity of the vertex 3-colourability problem for quadruples of induced 5-vertex prohibitions. *Zh. Srednevolzh. Mat. O-va.*, 2020, vol. 22, no. 1, pp. 38–47. doi: 10.15507/2079-6900.22.202001.38-47. (In Russian)

6. Selezneva S.N., Mel'nik M.V., Astakhova A.V. Coloring of pseudocubic graphs in three colors. *Moscow Univ. Comput. Math. Cybern.*, 2019, vol. 43, no. 2, pp. 82–88. doi: 10.3103/S0278641919020079.

7. Vizing V.G. Coloring graph vertices in prescribed colors. In: *Metody diskretnogo analiza v teorii kodov i skhem: Sb. nauch. tr.* [Discrete Analysis Methods in the Theory of Codes and Schemes: A Collection of Papers]. Novosibirsk, Inst. Mat. Sib. Otd. SSSR, 1976, no. 29, pp. 3–10. (In Russian)

Для цитирования: *Селезнева С.Н.* О хроматическом числе графов с некоторым ограничением степеней вершин // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2020. – Т. 162, кн. 4. – С. 387–395. – doi: 10.26907/2541-7746.2020.4.387-395.

For citation: Selezneva S.N. On the chromatic number of graphs with some restriction of vertex degrees. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 4, pp. 387–395. doi: 10.26907/2541-7746.2020.4.387-395. (In Russian)