ЛЮДИ НАУКИ

ПРОФЕССОР М.М. АРСЛАНОВ И ТЕОРЕМА О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ

И.Ш. Калимуллин

Седьмого февраля 2014 года исполнилось 70 лет замечательному казанскому математику, член-корреспонденту Академии наук Республики Татарстан, заведующему кафедрой алгебры и математической логики Казанского федерального университета Арсланову Марату Мирзаевичу.

Цель настоящей заметки не состоит в сколь-нибудь полной мере осветить весь многогранный творческий путь Марата Мирзаевича, а лишь является попыткой ознакомить читателя с наиболее значимым его вкладом в современную теорию вычислимости – одну из наиболее динамично развивающихся областей математической логики. В любом современном учебнике можно найти теорему, названную в честь юбиляра, – критерий полноты Арсланова, или, что то же самое, теорема Арсланова о неподвижных точках. Так в чем же состоит суть данного результата для читателя, не знакомого с теорий вычилимости? Для этого необходимо обратиться к двум фундаментальным принципам современной теории вычислимости.

Первый принцип утверждает *существование перечислимого языка, не являющегося вычислимым.* Здесь под языком понимается конечный или бесконечный набор слов фиксированного алфавита, каждое такое слово часто отождествляется с кодирующим его натуральным числом. Язык называется *вычислимым*, если имеется алгоритм, распознающий принадлежность произвольного слова данному языку. Язык называется *перечислимым*, если имеется алгоритм, перечисляющий все входящие в него слова. В качестве примера перечислимого, но не вычислимого языка можно взять язык, соответствующий так называемой проблеме остановки, состоящий из программ (текстов программ, написанных на алгоритмическом языке программирования), исполнение которых завершается за конечное время. Если программа не завершается за конечное время (зависает), то не существует общих алгоритмических методов проверки данного факта.

Язык $\emptyset'$, соответствующий проблеме остановки, является самым трудным среди перечислимых языков – любой перечислимый язык может быть распознан с помощью алгоритма, который может задавать и получать верные ответы о зависании той или иной программы. Другими словами, если язык проблемы остановки взять в качестве *оракула*, то любой перечислимый язык становится вычислимым относительно этого оракула. Перечислимый язык называется *полным*, если верно и обратное: проблема остановки сама становится вычислимой при использовании данного языка в качестве оракула. Однако для алгоритмов с полным оракулом будет действовать тот же принцип: проблема остановки произвольного алгоритма с оракулом приводит к перечислимому, но не вычислимому относительно него языку. Этот язык снова можно взять в качестве нового оракула, для которого проблема остановки также не будет вычислима и т. д. Последовательность возникающих языков-оракулов называется в теории алгоритмов *иерархией скачков* $\emptyset'$, $\emptyset''$, $\emptyset'''\ldots$

Второй принцип (теорема о рекурсии) утверждает *существование неподвижной точки у любого алгоритмического преобразования.* Если имеется некоторое алгоритмическое преобразование текстов программ, то должна существовать программа – неподвижная точка, выполнение которой эквивалентно выполнению преобразованной программы. Например, если рассмотреть преобразование, возвращающее программу, которая печатает заданный текст, то теорема рекурсии гарантирует существование программы, печатающей саму себя.

Обоснование двух вышеприведенных принципов было получено еще в 30-х годах прошлого столетия и доступно изложено практически в любом учебнике по математической логике и теории алгоритмов (см., например, [1]). В ходе последующего развития теории алгоритмов, а особенно при решении проблемы существования невычислимого и неполного перечислимого языка (проблема Поста), были отмечены неявные связи между полными оракулами и теоремой рекурсии. Творческий путь Марата Мирзаевича Арсланова как раз начинался с исследований этих неявных зависимостей: многие естественные классы перечислимых языков оказались полными, причем для доказательства этих утверждений требовалось использовать теорему рекурсии. Похожие результаты появлялись и у других исследователей.

Наконец, в конце 70-х годов М.М. Арслановым [2] было замечено, что для полноты перечислимого оракула достаточно найти вычислимое относительно данного оракула преобразование программ без неподвижных точек. В свою очередь, в каждом из известных ранее способах доказательства полноты оказывалось очевидным существование такого преобразования, что позволило значительно упростить рассуждения. Легко понять, что с помощью полного оракула $\emptyset'$ найти преобразование без неподвижных точек также очень просто: если исходная программа исполняется за конечное время, то возвращается заведомо зависающая программа с бесконечным циклом; если же оракул указывает, что исходная программа зависает, то возвращается ничего не делающая программа, которая, естественно, не зависает. Таким образом, результат М.М. Арсланова является необходимым и достаточным критерием полноты: *перечислимый язык-оракул является полным тогда и только тогда, когда существует алгоритмическое преобразование относительно данного оракула, не имеющее неподвижных точек.*

Данный факт удивительным образом связывает два вышеприведенных принципа теории алгоритмов. Можно сказать также, что критерий полноты Арсланова обобщает теорему рекурсии на алгоритмические преобразования с произвольными неполными перечислимыми оракулами.

Позднее (см., например, [3]) М.М. Арслановым данный критерий был распространен на полноту для ограниченных версий оракульных вычислений, таких как m- и tt-полнота. Им также были получены критерии полноты в терминах неподвижных точек на всех уровнях иерархии скачков. Например, для уровня $\emptyset''$ критерий полноты формулируется аналогично, нужно только заменить программу – неподвижную точку на программу – почти неподвижную точку, результат исполнения которой совпадает с результатом исполнения преобразованной программы на достаточно больших параметрах. Критерий полноты Арсланова вместе со всеми его модификациями оказал большое влияние на дальнейшее развитие теории алгоритмов и теории сложности.

Литература

1. *Соар Р.И.* Вычислимо перечислимые множества и степени / Пер. с англ. – Казань: Казан. матем. о-во, 2000. – 576 с.
2. *Арсланов М.М.* О некоторых обобщениях теоремы о неподвижной точке // Изв. вузов. Матем. – 1981. – № 5. – С. 9–16.
3. *Арсланов М.М.* Полнота в арифметической иерархии и неподвижные точки // Алгебра и логика. – 1989. – Т. 8, № 1. – С. 3–17.

Калимуллин Искандер Шагитович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и математической логики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *ikalimul@gmail.com*