ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

КАЩЕЕВ Р. А.

Дифференциальные методы динамической космической геодезии

(Часть 2. Метод спутниковой градиентометрии)

(учебное пособие)

Казань 2006

Печатается по решению Редакционно-издательского совета физического факультета

УДК 523.3

Кащеев Р.А.
Дифференциальные методы динамической космической геодезии. (Часть 2. Метод спутниковой градиентометрии). Учебное пособие для студентов четвертого курса физического факультета. Казань, 2006, 40 с.

Учебное пособие предназначено для студентов четвертого курса специальности «Астрономогеодезия», изучающих дисциплину «Космическая геодезия».

Рецензент:

Нефедьев Ю.А. – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической физики Казанского государственного гуманитарно-педагогического университета.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Перспективы достижения качественно новых результатов решения задачи определения гравитационного поля Земли, характеризуемых прецизионной точностью описания поля, высоким его разрешением и недостижимой ранее оперативностью построения его моделей, в настоящее время связываются с использованием дифференциальных спутниковых методов, объединяемых под общим названием методов измерений в системах с изменяемой геометрией расположения элементов. В момент написания данной работы реализуются уже две программы **CHAMP** и **GRACE** исследования внешнего гравитационного поля Земли по данным высокоточных межспутниковых измерений. На ближайшие месяцы намечен запуск спутника **GOCE**, оснащенного высокоточным бортовым градиентометром для измерения вторых производных потенциала ньютоновской силы притяжения, обладающих высокой чувствительностью к региональным особенностям и локальным аномалиям исследуемого поля [1].

В предлагаемом учебном пособии подробно рассматриваются вторые производные гравитационного потенциала, формы их записи в различных системах координат, их физическая и геометрическая интерпретация, принципы их измерения. Заключительная часть работы посвящена изложению основ метода спутниковой градиентометрии (**SGG** – Satellite Gravity Gradiometry), с которым в настоящее время связываются большие надежды на построение детальных многопараметрических моделей потенциала гравитационного поля Земли высокого разрешения. Этот же параграф содержит описание проекта **GOCE.**

§ 1. Тензор вторых производных гравитационного потенциала

Введем следующие правые прямоугольные системы координат (рис.1):

Рис.1. Системы координат, используемые в спутниковой градиентометрии

$OXYZ$ - средняя геоцентрическая земная экваториальная система координат, ось Z которой направлена по оси вращения Земли, а ось X лежит в плоскости нулевого меридиана;

$Sxyz$ - спутникоцентрическая горизонтная система координат, ось z которой направлена к центру масс Земли, а ось x устремлена в северном направлении параллельно касательной к меридиану подспутниковой точки;

$Svwr$ - спутникоцентрическая орбитальная (измерительная) система координат, ось r которой направлена от центра масс Земли наружу, а ось v лежит в плоскости орбиты ИСЗ и устремлена по вектору линейной скорости спутника.

В системе координат $Sxyz$ тензор вторых производных гравитационного потенциала представляет собой симметричную матрицу

$$\Im_{(Sxyz)} = \begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{xy} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{xz} & V_{yz} & V_{zz} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

включающую пять независимых элементов, поскольку во внешнем не занятом притягивающими массами пространстве потенциал ньютоновской силы притяжения обладает свойством гармоничности, т.е выполняется условие:

$$\Delta V = V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0,$$ где Δ - оператор Лапласа.

Заметим в этой связи, что градиентометрия есть, по-видимому, область наиболее наглядного проявления теснейшей связи гравитации и геометрии пространства, находящей свое отражение в свойствах тензора (1). Дело в том, что каждый из элементов этой матрицы характеризует ту или иную особенность геометрии уровенных поверхностей и силовых линий гравитационного поля исследуемого небесного тела. Так, в частности, производные V_{xz}, V_{yz}, V_{zz} представляют собой компоненты вектора – градиента ньютоновской силы притяжения, поскольку

$$V_{xz} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right), \quad V_{yz} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right), \quad V_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right).$$

Если направление оси z совпадает с нормалью к уровенной поверхности потенциала силы притяжения (для точек поверхности Земли – к геоиду), то горизонтальная плоскость, содержащая оси x и y, будет представлять собой плоскость, касательную к указанной уровенной поверхности. Тогда производные V_{xz} и V_{yz} характеризуют изменения силы притяжения в горизонтальной плоскости в направлении меридиана и первого вертикала подспутниковой точки соответственно, вследствие чего часто называются горизонтальными градиентами. Производная V_{zz} отражает изменение силы притяжения вдоль вертикальной оси и потому носит название вертикального градиента. Полным горизонтальным градиентом называется вектор $\overline{\Gamma}$, совпадающий с направлением максимального изменения силы притяжения в плоскости горизонта – азимут этого направления обозначим A_0. Тогда

$$\left|\overline{\Gamma}\right| = \sqrt{V_{xz}^2 + V_{yz}^2}\ , \qquad \mathrm{tg}A_0 = \frac{V_{yz}}{V_{xz}}\ . \qquad (2)$$

Вторые производные V_{xz} и V_{yz} описывают кривизну силовой линии гравитационного поля. Напомним, что кривизной некоторой кривой называется предел отношения угла между направлениями касательных к кривой в двух близких точках к длине кривой между этими точками. В согласии с этим определением для кривизны k_x проекции силовой линии на плоскость меридиана можем записать:

$$k_x = \underbrace{\lim}_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z}\left[\left(\frac{g_x}{g}\right)_2 - \left(\frac{g_x}{g}\right)_1\right] = \frac{1}{g}\frac{\partial g_x}{\partial z} = \frac{V_{xz}}{g}\ ,$$

где Δz – длина силовой линии между точками 1 и 2. Для кривизны k_y - проекции силовой линии поля на плоскость первого вертикала аналогичное равенство имеет вид: $k_y = \frac{V_{yz}}{g}$. Величина обратная кривизне называется радиусом кривизны кривой. Известно, что радиус ρ кривизны уровенной поверхности геоида в плоскости нормального сечения его в азимуте A определяется, исходя из равенства,

$$-\frac{g}{\rho} = \left(V_{xx}\cos^2 A + V_{xy}\sin 2A + V_{yy}\sin^2 A\right), \qquad (3)$$

где символом g обозначена сила тяжести (на спутниковых высотах – сила притяжения). Если в (3) принять $A = 0^o$, то $V_{xx} = -g/N$, а при $A = 90^o$ $V_{yy} = -g/M$, где N и M суть радиусы кривизны сечения геоида в плоскостях меридиана и первого вертикала. Это означает, что производные V_{xx} и V_{yy} характеризуют кривизну нормального сечения уровенной поверхности потенциала силы притяжения (на поверхности Земли – уровенной поверхности потенциала силы тяжести, т.е. геоида).

Обозначим через ρ_{max} и ρ_{min} радиусы кривизны главных нормальных сечений, имеющих минимальную и максимальную кривизну соответственно. Найдем азимуты направлений A_{max} и A_{min}, им соответствующие, называемые также азимутами направлений главных нормальных сечений. С

этой целью исследуем правую часть равенства (3) на экстремум на множестве значений $0^o \le A \le 360^o$, приравнивая производную по A нулю. Имеем:

$$-2V_{xx}\sin A\cos A+2V_{xy}\cos 2A+2V_{yy}\sin A\cos A=0,$$

$$(V_{yy}-V_{xx})\sin 2A+2V_{xy}\cos 2A=0,$$

$$\mathrm{tg}2A=-\frac{2V_{xy}}{V_{yy}-V_{xx}}=-\frac{2V_{xy}}{V_{\Delta}}, \qquad (4)$$

где обозначено $V_{\Delta}=V_{yy}-V_{xx}$. Решение тригонометрического уравнения (4) дает значения азимутов A_{max} и A_{min}, различающиеся на 90°.

Размерность вторых производных гравитационного потенциала соответствует размерности производной силы притяжения по некоторому направлению, т.е. $\left[\frac{\partial g}{\partial n}\right]=[\text{сек}]^{-2}$. Это очень крупная единица, на несколько порядков превышающая величины вторых производных, характерные для Земли и других планет. По этой причине в качестве единицы измерения используется одна миллиардная этой величины, называемая *Этвеш* (1 Этвеш = 10^{-9} сек$^{-2}$), в честь венгерского физика Р.Этвеша, разработавшего конструкцию прибора для измерения вторых производных потенциала силы тяжести – гравитационного вариометра [2]. В частности, для модели однородной сферической Земли вторые производные гравитационного потенциала имеют следующие числовые значения:

$$V_{xx}=V_{yy}=-1540\ Э,\ V_{zz}=3080\ Э,\ V_{xy}=V_{xz}=V_{yz}=0\ Э.$$

§ 2. Представление вторых производных потенциала в сферической системе координат.

В силу определения потенциальной функции $V(x,y,z)$ в системе координат $Sxyz$ можем записать:

$$\ddot{\bar{x}}=(\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z})^T=\left(\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial y},\frac{\partial V}{\partial z}\right)^T=\nabla V, \qquad (5)$$

где $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)^T$ - векторный оператор Гамильтона (градиент).

Повторное воздействие оператора Гамильтона на вектор (5) порождает матрицу (1) вторых производных гравитационного потенциала:

$$\Im=\nabla\nabla V=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{xy} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{xz} & V_{yz} & V_{zz} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Основные затруднения при выводе соотношений спутниковой градиентометрии связаны с необходимостью представления компонент тензора (1) в сферических координатах, поскольку гравитационный потенциал, моделируемый рядом объемных сферических функций:

$$V(r,\varphi,\lambda)=\frac{GM}{r}\left[1+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n}\left(C_{nm}\cos m\lambda+S_{nm}\sin m\lambda\right)P_{nm}\left(\sin\varphi\right)\right] \qquad (6)$$

представляет собой функцию сферических координат. Учитывая это, запишем оператор Гамильтона в форме, обеспечивающей связь прямоугольных координат со сферическими:

$$\nabla=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial z}\end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Однократное воздействие оператора (7) на скалярную функцию сферических координат (6) порождает вектор

$$\nabla V(r,\varphi,\lambda)=\begin{pmatrix}\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\\ \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y}\\ \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial V}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial V}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial z}\end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Повторное воздействие оператора Гамильтона, записанного в форме (7), на вектор (8) дает матрицу $\mathfrak{J}$ вторых производных гравитационного потенциала, элементы которой в отличие от (1) будут выражаться в виде производных по сферическим координатам. Вследствие громоздкости выкладок подробно рассмотрим процедуру вывода для одной из производных (например, для производной $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$), для других же элементов матрицы (1) приведем готовые формулы, которые могут быть получены читателем самостоятельно согласно излагаемому ниже алгоритму. Итак,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+$$

$$=\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}+$$

$$=\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial x}=$$

$$=\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial \varphi}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial \lambda}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \lambda}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial V}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial \varphi}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi\partial \lambda}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \lambda}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial V}{\partial \lambda}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial \lambda}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \lambda}{\partial x}+\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi\partial \lambda}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \lambda}{\partial x},$$

то есть

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = V_{xx} = V_{rr}\, r_x^2 + V_{\varphi\varphi}\, \varphi_x^2 + V_{\lambda\lambda}\, \lambda_x^2 +$$

$$+ V_r\, r_{xx} + V_\varphi\, \varphi_{xx} + V_\lambda\, \lambda_{xx} +$$

$$+ 2V_{r\varphi}\, r_x\, \varphi_x + {}^2V_{r\lambda}\, r_x\, \lambda_x + 2V_{\varphi\lambda}\, \varphi_x\, \lambda_x\,. \qquad (9)$$

Аналогично получаем:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = V_{yy} = V_{rr}\, r_y^2 + V_{\varphi\varphi}\, \varphi_y^2 + V_{\lambda\lambda}\, \lambda_y^2 +$$

$$+ V_r\, r_{yy} + V_\varphi\, \varphi_{yy} + V_\lambda\, \lambda_{yy} +$$

$$+ 2V_{r\varphi}\, r_y\, \varphi_y + {}^2V_{r\lambda}\, r_y\, \lambda_y + 2V_{\varphi\lambda}\, \varphi_y\, \lambda_y\,. \qquad (10)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = V_{zz} = V_{rr}\, r_z^2 + V_{\varphi\varphi}\, \varphi_z^2 + V_{\lambda\lambda}\, \lambda_z^2 +$$

$$+ V_r\, r_{zz} + V_\varphi\, \varphi_{zz} + V_\lambda\, \lambda_{zz} +$$

$$+ 2V_{r\varphi}\, r_z\, \varphi_z + {}^2V_{r\lambda}\, r_z\, \lambda_z + 2V_{\varphi\lambda}\, \varphi_z \lambda_z. \qquad (11)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = V_{xy} = V_{rr} r_x r_y + V_{\varphi\varphi} \varphi_x \varphi_y + V_{\lambda\lambda} \lambda_x \lambda_y + V_r r_{xy} +$$

$$+ V_\varphi \varphi_{xy} + V_\lambda \lambda_{xy} + V_{r\varphi} (r_x \varphi_y + r_y \varphi_x) + V_{r\lambda} (r_x \lambda_y + r_y \lambda_x) +$$

$$+ V_{\varphi\lambda} (\varphi_x \lambda_y + \varphi_y \lambda_x); \qquad (12)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = V_{xz} = V_{rr} r_x r_z + V_{\varphi\varphi} \varphi_x \varphi_z + V_{\lambda\lambda} \lambda_x \lambda_z + V_r r_{xz} +$$

$$+ V_\varphi \varphi_{xz} + V_\lambda \lambda_{xz} + V_{r\varphi} (r_x \varphi_z + r_z \varphi_x) + V_{r\lambda} (r_x \lambda_z + r_z \lambda_x) +$$

$$+ V_{\varphi\lambda} (\varphi_x \lambda_z + \varphi_z \lambda_x); \qquad (13)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = V_{yz} = V_{rr} r_y r_z + V_{\varphi\varphi} \varphi_y \varphi_z + V_{\lambda\lambda} \lambda_y \lambda_z + V_r r_{yz} +$$

$$+ V_\varphi \varphi_{yz} + V_\lambda \lambda_{yz} + V_{r\varphi} (r_y \varphi_z + r_z \varphi_y) + V_{r\lambda} (r_y \lambda_z + r_z \lambda_y) +$$

$$+ V_{\varphi\lambda} (\varphi_y \lambda_z + \varphi_z \lambda_y); \qquad (14)$$

§ 3. Вычисление вторых производных потенциала в горизонтной системе координат

Вычисление вторых производных гравитационного потенциала по формулам (9) – (14) продолжим следующим образом. Геоцентрические прямоугольные координаты X, Y, Z некоторой точки пространства связаны со сферическими координатами r, φ, λ той же точки очевидными соотношениями

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} r &= \sqrt{X^2+Y^2+Z^2} \\ \varphi &= \operatorname{arctg}\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}} \\ \lambda &= \operatorname{arctg}\frac{Y}{X}. \end{aligned} \qquad (15)$$

Далее, пользуясь рисунком 1, установим связь геоцентрической экваториальной системы координат $OXYZ$ со спутникоцентрической горизонтной системой координат $Sxyz$. В случае круговой орбиты приведение вектора $(x, y, z)^T$, описывающего положение точки в системе координат $Sxyz$ к вектору $(X, Y, Z)^T$, описывающему положение той же точки в системе координат $OXYZ$, достигается переносом центра системы и двумя поворотами осей:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{pmatrix} + \Re_3(-\lambda)\,\Re_2\left(90^o + \varphi\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Первое вращение системы $Sxyz$ вокруг оси Z на угол $(-\lambda)$ (напомним, что положительным считается вращение против часовой стрелки) приводит оси Sz и Sx в плоскость XOZ, т.е. в плоскость нулевого меридиана, от которого против часовой стрелки отсчитываются геоцентрические долготы λ. Второе вращение вокруг оси Y (или y, поскольку после первого вращения направления осей OY и Sy совпадают) против часовой стрелки на угол $\left(90^o + \varphi\right)$ приводит к совпадению направлений осей Sz и Sx с осями OZ и OX соответственно. Матрицы $\Re_2$ и $\Re_3$ суть стандартные матрицы вращений вокруг осей 2 и 3.

Раскрывая (16), получаем соотношения

$$\begin{pmatrix} X - X_S \\ Y - Y_S \\ Z - Z_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x\sin\varphi\cos\lambda - y\sin\lambda - z\cos\varphi\cos\lambda \\ -x\sin\varphi\sin\lambda + y\cos\lambda - z\cos\varphi\sin\lambda \\ x\cos\varphi - z\sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad (17)$$

которые будут нами ниже использованы для вычисления входящих в выражения (9) – (14) производных. Эта процедура хотя и проста, но достаточно громоздка, что позволяет, подробно остановившись на

вычислении одной из шести производных, (например, следуя сделанному ранее выбору, производной V_{xx} (9)), вывод формул для других производных снова рекомендовать читателю для самостоятельных упражнений в дифференцировании.

Обратимся далее к вычислению входящих в правую часть равенства (9) производных первого и второго порядков от сферических геоцентрических экваториальных координат $r,\ \varphi,\ \lambda$ по прямоугольным спутникоцентрическим горизонтным координатам $x,\ y,\ z$:

$$
\begin{aligned}
r_x &= \frac{\partial r}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial x}=r_X X_x+r_Y Y_x+r_Z Z_x,\\
\varphi_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial x}=\varphi_X X_x+\varphi_Y Y_x+\varphi_Z Z_x,\\
\lambda_x &= \frac{\partial \lambda}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial \lambda}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial \lambda}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial x}=\lambda_X X_x+\lambda_Y Y_x+\lambda_Z Z_x.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Вычисление вторых производных $r_{xx},\ \varphi_{xx},\ \lambda_{xx}$ выполним путем дифференцирования равенств (18):

$$r_{xx}=r_{XX}X_x^2+r_{YY}Y_x^2+r_{ZZ}Z_x^2+2r_{XY}X_xY_x+2r_{XZ}X_xZ_x+2r_{YZ}Y_xZ_x, \tag{19}$$

$$\varphi_{xx}=\varphi_{XX}X_x^2+\varphi_{YY}Y_x^2+\varphi_{ZZ}Z_x^2+2\varphi_{XY}X_xY_x+2\varphi_{XZ}X_xZ_x+2\varphi_{YZ}Y_xZ_x, \tag{20}$$

$$\lambda_{xx}=\lambda_{XX}X_x^2+\lambda_{YY}Y_x^2+\lambda_{ZZ}Z_x^2+2\lambda_{XY}X_xY_x+2\lambda_{XZ}X_xZ_x+2\lambda_{YZ}Y_xZ_x. \tag{21}$$

Прямое дифференцирование равенств (15) дает:

$$r_X = \frac{X}{r}, \qquad r_Y = \frac{Y}{r}, \qquad r_Z = \frac{Z}{r},$$

$$\varphi_X = -\frac{XZ}{r^2\sqrt{X^2+Y^2}}, \quad \varphi_Y = -\frac{YZ}{r^2\sqrt{X^2+Y^2}}, \quad \varphi_X = \frac{X^2+Y^2}{r^2\sqrt{X^2+Y^2}}, \qquad (22)$$

$$\lambda_X = -\frac{Y}{X^2+Y^2}, \qquad \lambda_Y = \frac{X}{X^2+Y^2}, \qquad \lambda_Z = 0.$$

В свою очередь, дифференцируя формулу (17), получаем:

$$X_x = -\sin\varphi\cos\lambda, \quad Y_x = -\sin\varphi\sin\lambda, \quad Z_x = \cos\varphi\,. \qquad (23)$$

Тогда

$$r_x = -\frac{X}{r}\sin\varphi\cos\lambda - \frac{Y}{r}\sin\varphi\sin\lambda + \frac{Z}{r}\cos\varphi =$$

$$= -\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\lambda - \cos\varphi\sin\varphi\sin^2\lambda + \cos\varphi\sin\varphi = 0,$$

$$\varphi_x = \frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}}\left(\cos\varphi\sin^2\varphi\cos^2\lambda + \cos\varphi\sin^2\varphi\sin^2\lambda + \cos^3\varphi\right) = \frac{1}{r}, \qquad (24)$$

$$\lambda_x = \frac{r}{X^2+Y^2}\left(\cos\varphi\sin\varphi\cos\lambda\sin\lambda - \cos\varphi\sin\varphi\cos\lambda\sin\lambda\right) = 0.$$

Дважды дифференцируя формулы (15), получим соотношения, позволяющие вычислить следующие вторые производные:

$$r_{XX}=\frac{Y^2+Z^2}{r^3},\quad r_{YY}=\frac{X^2+Z^2}{r^3},\quad r_{ZZ}=\frac{X^2+Y^2}{r^3},$$

$$r_{XY}=-\frac{XY}{r^3},\quad r_{XZ}=-\frac{XZ}{r^3},\quad r_{YZ}=-\frac{YZ}{r^3}. \tag{25}$$

$$\varphi_{XX}=\frac{Z\left(2X^4-Y^4+X^2Y^2-Y^2Z^2\right)}{r^4\left(X^2+Y^2\right)\sqrt{\left(X^2+Y^2\right)}},$$

$$\varphi_{YY}=\frac{Z\left(2Y^4-X^4+X^2Y^2-X^2Z^2\right)}{r^4\left(X^2+Y^2\right)\sqrt{\left(X^2+Y^2\right)}},$$

$$\varphi_{ZZ}=-\frac{2Z\sqrt{(X^2+Y^2)}}{r^4},$$

$$\varphi_{XY}=\frac{XYZ\left(3X^2+3Y^2+Z^2\right)}{r^4\left(X^2+Y^2\right)\sqrt{\left(X^2+Y^2\right)}}, \tag{26}$$

$$\varphi_{XZ}=\frac{X\left(Z^2-X^2-Y^2\right)}{r^4\sqrt{\left(X^2+Y^2\right)}},$$

$$\varphi_{YZ}=\frac{Y\left(Z^2-X^2-Y^2\right)}{r^4\sqrt{\left(X^2+Y^2\right)}}.$$

$$\lambda_{XX}=\frac{2XY}{\left(X^2+Y^2\right)^2},\quad \lambda_{YY}=-\frac{2XY}{\left(X^2+Y^2\right)^2},\quad \lambda_{ZZ}=0,$$

$$\lambda_{XY}=\frac{Y^2-X^2}{(X^2+Y^2)^2},\quad \lambda_{XZ}=0,\quad \lambda_{YZ}=0. \qquad (27)$$

Формулы для вычисления входящих в (19) - (21) производных от геоцентрических прямоугольных координат по спутникоцентрическим прямоугольным координатам получим дифференцированием равенств (17):

$$X_x^2=\frac{X^2Z^2}{r^2\left(X^2+Y^2\right)},\quad X_xY_x=\frac{XYZ^2}{r^2\left(X^2+Y^2\right)},$$
$$Y_x^2=\frac{Y^2Z^2}{r^2\left(X^2+Y^2\right)},\quad X_xZ_x=-\frac{XZ}{r^2}, \qquad (28)$$
$$Z_x^2=\frac{\left(X^2+Y^2\right)}{r^2},\quad Y_xZ_x=-\frac{YZ}{r^2}.$$

Подстановка (25) и (28) в (22) дает: $r_{xx}=\frac{1}{r}$, подстановка (26) и (28) в (23) дает: $\varphi_{xx}=0$, подстановка (27) и (28) в (24) дает: $\lambda_{xx}=0$. Тогда выражение (9) после выполнения всех необходимых подстановок примет вид:

$$V_{xx} = \frac{1}{r^2} V_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} V_r \ .$$

Приведем далее итоговую сводку формул, связывающих вторые производные гравитационного потенциала по осям горизонтной системы координат со вторыми его производными по сферическим координатам:

$$\begin{aligned}
V_{xx} &= \frac{1}{r^2} V_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} V_r, \\
V_{yy} &= \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} V_{\lambda\lambda} - \frac{\mathrm{tg}\varphi}{r^2} V_\varphi + \frac{1}{r} V_r, \\
V_{zz} &= V_{rr}, \\
V_{xy} &= \frac{1}{r^2 \cos\varphi} V_{\varphi\lambda} + \frac{\sin\varphi}{r^2 \cos^2 \varphi} V_\lambda, \\
V_{xz} &= -\frac{1}{r} V_{r\varphi} + \frac{1}{r^2} V_\varphi, \\
V_{yz} &= -\frac{1}{r \cos\varphi} V_{r\lambda} + \frac{1}{r^2 \cos\varphi} V_\lambda.
\end{aligned} \tag{29}$$

§ 4. Вычисление вторых производных потенциала в орбитальной системе координат

Получив значения компонент тензора вторых производных гравитационного потенциала в правой прямоугольной спутникоцентрической

горизонтной системе координат $Sxyz$ (см. формулы (29)), нетрудно выполнить преобразование тензора в правую прямоугольную спутникоцентрическую орбитальную систему координат $Svwr$ (см. рис.1). Необходимость данного преобразования обусловлена конструктивными особенностями бортового градиентометра, одна из осей чувствительности которого обычно ориентируется по направлению вектора линейной скорости объекта. Указанное направление для круговых орбит совпадает с нормалью к его геоцентрическому радиусу-вектору.

Тензорные свойства матрицы (1) позволяют записать искомое преобразование в виде:

$$\mathfrak{I}_{(Svwz)} = \mathfrak{R}^{T} \mathfrak{I}_{(Sxyz)} \mathfrak{R}\,, \qquad (30)$$

где $\mathfrak{R}$ – матрица трансформации системы $Sxyz$ в систему $Svwz$.

Преобразование систем координат $Sxyz \rightarrow Svwz$ осуществляется двумя вращениями: вращением против часовой стрелки базисной тройки векторов системы $Sxyz$ вокруг третьей оси z на угол θ , для круговых орбит определяемый из соотношения: $tg\theta = \dfrac{1}{tgi \cdot \cos u}$, (причем, при $tgi \cdot \cos u = 0$ угол вращения $\theta = 90^{o}$) и вращением вокруг первой оси также против часовой стрелки на угол 180° . Первое вращение совмещает ось x с осью v , второе – ось z с осью r . Таким образом, в рассматриваемом нами случае матрица трансформации систем координат имеет вид:

$$\Re = \Re_1\left(180^o\right)\cdot\Re_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Раскрывая (30), получим формулы, позволяющие вычислять элементы матрицы вторых производных гравитационного потенциала в спутникоцентрической орбитальной (измерительной) системе координат Svwr :

$$\begin{aligned}
&V_{vv} = V_{xx}\cos^2\theta + 2V_{xy}\cos\theta\sin\theta + V_{yy}\sin^2\theta, \\
&V_{ww} = V_{xx}\sin^2\theta - 2V_{xy}\cos\theta\sin\theta + V_{yy}\cos^2\theta, \\
&V_{rr} = V_{zz}, \\
&V_{vw} = -[V_{xy}\cos 2\theta + \frac{1}{2}(V_{yy} - V_{xx})\sin 2\theta], \\
&V_{vr} = -(V_{xz}\cos\theta + V_{yz}\sin\theta), \\
&V_{wr} = -V_{xz}\sin\theta + V_{yz}\cos\theta.
\end{aligned} \tag{31}$$

Подстановка в (31) равенств (29) позволяет выразить вторые производные гравитационного потенциала (31), записанные в орбитальной системе координат, через вторые производные гравитационного потенциала, выраженные в сферических координатах.

§ 4. Уравнения наблюдений и уравнения поправок спутниковой градиентометрии

Напомним, что в современной геодезической литературе рассматриваются два подхода к оцениванию параметров гравитационного потенциала исследуемого небесного тела по спутниковым данным: пространственный (space-wise) и временной (time-wise) [1]. В рамках пространственного подхода результат измерения на околоземной орбите некоторой второй производной V_{**} геопотенциала представим в виде функционала F :

$$V_{**} = F\left(\overline{X}, V\left\{C_{nm}, S_{nm}\right\}\right), \qquad (32)$$

зависящего от $\overline{X}$ – геоцентрического вектора состояния ИСЗ и $V\left\{C_{nm}, S_{nm}\right\}$ - потенциала силы притяжения Земли, описываемого набором гармонических коэффициентов разложения его в ряд объемных сферических функций:

$$V(r,\varphi,\lambda) = \frac{GM}{r}\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n}\left(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda\right)P_{nm}\left(\sin\varphi\right)\right].$$

Выражение (в1) называется уравнением наблюдений, устанавливающим функциональную связь измеряемой величины с набором подлежащих определению параметров модели гравитационного потенциала.

Линеаризация уравнения наблюдений (32) в окрестности априорно приближенно известных (референцных) значений неизвестных позволяет получить уравнение поправок:

$$dV_{**} = F\left(\overline{X}, V\left\{C_{nm}, S_{nm}\right\}\right) - F\left(\overline{X}, V\left\{C^*_{nm}, S^*_{nm}\right\}\right) =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial \overline{X}} d\overline{X} + \sum_{n,m} \frac{\partial F}{\partial \left\{C_{nm}, S_{nm}\right\}} d\left\{C_{nm}, S_{nm}\right\}, \qquad (33)$$

где $F\left(\overline{X}^*, V\left\{C^*_{nm}, S^*_{nm}\right\}\right)$ есть референцное значение измеряемой производной V_{**}, вычисляемое по референцному значению $\overline{X}^*$ вектора $\overline{X}$ и набору заранее приближенно известных значений $\left\{C^*_{nm}, S^*_{nm}\right\}$ параметров модели гравитационного поля Земли. Искомыми неизвестными в (33) являются поправки $d\left\{C_{nm}, S_{nm}\right\}$, имеющие смысл либо поправок в заранее приближенно известные значения коэффициентов $\left\{C^*_{nm}, S^*_{nm}\right\}$ референцной модели потенциала, либо неизвестных коэффициентов старших по сравнению референцной моделью степеней и порядков.

Использование в качестве модели геопотенциала его разложения в ряд (6) объемных сферических функций диктует необходимость представления уравнений наблюдений спутниковой градиентометрии в форме (32). Для этого выразим уравнения (29) в сферических координатах, проводя непосредственное дифференцирование ряда (6). В результате получим следующие формулы для уравнений наблюдений в спутникоцентрической горизонтной системе координат $Sxyz$.

$$V_{xx} = -\frac{GM}{r^3} + \frac{GM}{R^3} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \times$$

$$\times \left[\frac{\partial^2 P_{nm}(\sin\varphi)}{\partial\varphi^2} - (n+1) P_{nm}(\sin\varphi) \right], \qquad (34)$$

$$V_{yy} = -\frac{GM}{r^3} - \frac{GM}{R^3} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \times$$

$$\times \left[\frac{m^2}{\cos^2\varphi} P_{nm}(\sin\varphi) + (n+1) P_{nm}(\sin\varphi) + \mathrm{tg}\varphi \cdot \frac{\partial P_{nm}(\sin\varphi)}{\partial\varphi} \right], \qquad (35)$$

$$V_{zz} = \frac{2GM}{r^3} + \frac{GM}{R^3} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} (n+2)\cdot(n+1)\cdot(C_{nm} \cos m\lambda +$$

$$+ S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin\varphi), \qquad (36)$$

$$V_{xy} = -\frac{GM}{R^3 \cos\varphi} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} m\cdot(C_{nm} \sin m\lambda - S_{nm} \cos m\lambda) \times$$

$$\times \left[\frac{\partial P_{nm}(\sin\varphi)}{\partial\varphi} + \mathrm{tg}\varphi \cdot P_{nm}(\sin\varphi) \right], \qquad (37)$$

$$V_{xz}=\frac{GM}{R^3}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+3}(n+2)\cdot(C_{nm}\cos m\lambda+S_{nm}\sin m\lambda)\frac{\partial P_{nm}(\sin\varphi)}{\partial\varphi}, \quad (38)$$

$$V_{yz}=-\frac{GM}{R^3\cos\varphi}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+3}m\cdot(n+2)\cdot(C_{nm}\sin m\lambda-$$

$$-S_{nm}\cos m\lambda)\cdot P_{nm}(\sin\varphi). \quad (39)$$

Поскольку для точек внешнего не занятого притягивающими массами пространства уравнение Лапласа справедливо в любой прямоугольной системе координат, имеем: $V_{xx}+V_{yy}+V_{zz}=0$, что дает возможность проконтролировать вывод формул (34), (35), (36).

$$V_{xx}+V_{yy}+V_{zz}=-\frac{GM}{r^3}-\frac{GM}{r^3}+\frac{2GM}{r^3}+$$

$$+\frac{GM}{R^3}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+3}(C_{nm}\cos m\lambda+S_{nm}\sin m\lambda)\times \quad (40)$$

$$\times\ [\frac{\partial^2 P_{nm}(\sin\varphi)}{\partial\varphi^2}-(n+1)\cdot P_{nm}(\sin\varphi)-\frac{m^2}{\cos^2\varphi}P_{nm}(\sin\varphi)-$$

$$-(n+1)\cdot P_{nm}(\sin\varphi)+tg\varphi\frac{\partial P_{nm}(\sin\varphi)}{\partial\varphi}+(n+2)\cdot(n+1)P_{nm}(\sin\varphi)=0.$$

Очевидно, правильность формул можно будет считать доказанной в случае равенства нулю в выражении (40) квадратной скобки. Это легко сделать,

воспользовавшись известными соотношениями для производных присоединенных функций Лежандра:

$$\frac{\partial^2 P_{nm}(\sin\varphi)}{\partial\varphi^2}=\frac{m^2-n^2\cos\varphi-n}{\cos^2\varphi}\cdot P_{nm}(\sin\varphi)+$$
$$+\frac{(n+m)tg\varphi}{\cos\varphi}\cdot P_{n-1,m}(\sin\varphi),$$
$$\frac{\partial P_{nm}(\sin\varphi)}{\partial\varphi}=-n\cdot tg\varphi\cdot P_{nm}(\sin\varphi)+\frac{n+m}{\cos\varphi}\cdot P_{n-1,m}(\sin\varphi).$$

Коэффициенты уравнений поправок (33) для уравнений наблюдений (34) – (39) вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial V_{xx}}{\partial\{C_{nm},S_{nm}\}}=\frac{GM}{R^3}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+3}\{\cos m\lambda,\sin m\lambda\}\cdot[\frac{\partial^2 P_{nm}(\sin\varphi)}{\partial\varphi^2}-$$
$$-(n+1)\cdot P_{nm}(\sin\varphi)], \qquad (41)$$

$$\frac{\partial V_{xy}}{\partial\{C_{nm},S_{nm}\}}=\frac{GM}{R^3}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+3}\{\cos m\lambda,\sin m\lambda\}\cdot[\frac{\partial P_{nm}(\sin\varphi)}{\partial\varphi}-$$
$$-(n+1)\cdot P_{nm}(\sin\varphi)], \qquad (42)$$

$$\frac{\partial V_{xz}}{\partial\{C_{nm},S_{nm}\}}=\frac{GM}{R^3}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+3}(n+2)\cdot\{\cos m\lambda,\sin m\lambda\}\cdot\frac{\partial P_{nm}(\sin\varphi)}{\partial\varphi},$$

(43)

$$\frac{\partial V_{yy}}{\partial\{C_{nm},S_{nm}\}}=-\frac{GM}{R^3}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+3}\{\cos m\lambda,\sin m\lambda\}\cdot[\frac{\partial P_{nm}(\sin\varphi)}{\partial\varphi}tg\varphi+$$

$$+\left(\frac{m^2}{\cos^2\varphi}+n+1\right)\cdot P_{nm}(\sin\varphi)],$$

(44)

$$\frac{\partial V_{yz}}{\partial\{C_{nm},S_{nm}\}}=\frac{GM}{R^3\cos\varphi}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+3}\{-\sin m\lambda,\cos m\lambda\}\cdot P_{nm}(\sin\varphi), \quad (45)$$

$$\frac{\partial V_{zz}}{\partial\{C_{nm},S_{nm}\}}=\frac{GM}{R^3}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+3}(n+2)(n+1)\{\cos m\lambda,\sin m\lambda\}\cdot P_{nm}(\sin\varphi).$$

(46)

Аналогичные выкладки несложно выполнить и в спутникоцентрической орбитальной системе координат $Svwr$, рассматривая в качестве исходных уравнений наблюдений уравнения (31).

§ 5. Принципы измерения вторых производных гравитационного потенциала

В классической наземной гравиметрии главной измеряемой величиной является модуль вектора силы тяжести – первая нормальная производная соответствующего потенциала. Известно, однако, что, повышая порядок измеряемой производной, возможно добиться относительного увеличения амплитуды коротковолновой компоненты поля, вследствие чего последняя определяется более уверенно. Вот почему, как уже указывалось выше, для оценивания параметров высокочастотной (т.е. коротковолновой) составляющей гравитационного поля, описывающих по мере возрастания степени вычисляемых гармоник все более мелкие особенности его структуры, выгоднее использовать измерения вторых производных потенциала ньютоновской силы притяжения.

Рассмотрим основные принципы бортовых измерений вторых производных гравитационного потенциала. Покажем, что градиентометрические измерения представляют собой измерения характеристик относительного движения элементов динамической системы пробных масс инструмента-градиентометра.

Пусть в произвольной спутникоцентрической прямоугольной системе координат $S\,x_1x_2x_3$ положение точки описывается трехмерным вектором $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$. Тогда в отсутствии влияния сил негравитационной природы имеем:

$$\ddot{x}_i\,(S) = \frac{\partial V(S)}{\partial x_i}, \qquad (i = 1,2,3), \qquad (47)$$

где $\ddot{x}_i(S)$ – составляющая ньютоновской силы притяжения по i-ой оси в точке S, $V(S)$ – потенциал силы притяжения в той же точке. Запишем (47) для некоторой точки P_1, близкой к S, и разложим в ряд Тейлора в окрестности точки S:

$$\ddot{x}_i(P_1)=\ddot{x}_i(S)+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 V(S)}{\partial x_i \partial x_j}dx_j(P_1,S) .$$

Аналогично для точки P_2:

$$\ddot{x}_i(P_2)=\ddot{x}_i(S)+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 V(S)}{\partial x_i \partial x_j}dx_j(P_2,S) .$$

Относительное ускорение единичных пробных масс, находящихся в точках P_1 и P_2, запишем в виде разности:

$$d\ddot{x}_i=\ddot{x}_i(P_2)-\ddot{x}_i(P_1)=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 V(S)}{\partial x_i \partial x_j}dx_j(P_2,P_1) , \qquad (48)$$

где принято $d\bar{x}(P_2,P_1)=\bar{x}(P_2)-\bar{x}(P_1)=(dx_1, dx_2, dx_3)^T$. Таким образом, в соответствии с (2) измерение вторых производных $\partial^2 V / \partial x_i \partial x_j$ сводится к измерению компонент $d\ddot{x}_i$ вектора $d\ddot{\bar{x}}$ относительного ускорения и компонент dx_j вектора $d\bar{x}$ относительного

положения пробных масс спутникового градиентометра. Компоненты $d\ddot{x}_i$ вектора относительных ускорений $d\ddot{\bar{x}}=\ddot{\bar{x}}(P_2)-\ddot{\bar{x}}(P_1)=(d\ddot{x}_1, d\ddot{x}_2, d\ddot{x}_3)^T$, действующих на каждую из разнесенных в пространстве пробных масс, измеряются с помощью трехкомпонентного акселерометра, принцип действия которого может быть описан следующим образом. Пусть внутри движущегося объекта на пружинных подвесах, имеющих лишь одну степень свободы перемещения вдоль оси x, установлены два идентичных пробных тела единичной массы (рис.2а). При движении в однородном гравитационном поле и отсутствии негравитационных возмущений на оба тела (и на объект-носитель) будут действовать одинаковые ускорения. Это означает, что пробные тела будут находиться на не меняющемся со временем расстоянии друг от друга, а их относительные ускорения будут равны нулю. Тогда в соответствии с (2) будут равны нулю и все вторые производные поля (напомним, что в данном случае нами рассматривается движение в однородном поле).

В неоднородном гравитационном поле на пробные массы в каждый момент времени будут действовать ускорения, различные и по величине, и по направлению, вследствие чего расстояние между массами будет меняться, а относительное ускорение их уже не будет нулевым. Заметим, что, если пружины акселерометра имеют линейную характеристику, то величина ускорения каждой массы будет пропорциональна ее смещению относительно нулевого положения, соответствующего равномерному движению в однородном поле.

Рис. 2. Принципиальная схема спутникового градиентометра.

В условиях реального космического полета системы такого рода должны быть трехмерными (трехкомпонентными), т.е. пригодными для измерения по трем взаимно перпендикулярным базисным осям (рис.2б).

Важным аспектом, требующим отдельного рассмотрения, является то, что бортовые градиентометрические измерения выполняются во вращающейся системе отсчета, в то время как элементы тензора вторых производных гравитационного потенциала должны быть отнесены к «абсолютной» невращающейся системе координат, жестко связанной с Землей. Известно, что

$$\bar{a}=\bar{a}'+2\left[\bar{\varpi}\times\bar{v}'\right]+\left[\bar{\varpi}\times\left[\bar{\varpi}\times\bar{R}\right]\right]. \qquad (49)$$

В этой формуле обозначено:

$\bar{a}$ - вектор ускорения пробной массы в «абсолютной» системе координат;

$\bar{a}'$ - вектор ускорения той же массы во вращающейся системе координат;

$\overline{\varpi}$ - вектор угловой скорости вращения вращающейся системы координат;

$\overline{v}'$ - вектор линейной скорости пробной массы;

$2\left[\overline{\varpi}\times\overline{v}'\right]$ - ускорение Кориоллиса;

$\left[\overline{\varpi}\times\left[\overline{\varpi}\times\overline{R}\right]\right]$ - центробежное (переносное) ускорение.

В нашем случае в равномерно вращающейся с угловой скоростью $\varpi=\sqrt{GM/R^3}$ орбитальной системе координат $Svwr$ вектор ускорения $\overline{a}'$, вектор угловой скорости $\overline{\varpi}$, вектор линейной скорости $\overline{v}'$ и геоцентрический радиус-вектор $\overline{R}$ пробной массы имеют вид:

$$\overline{a}'=\begin{pmatrix}\ddot{v}\\ \ddot{w}\\ \ddot{r}\end{pmatrix},\quad \overline{\varpi}=\begin{pmatrix}0\\ \varpi\\ 0\end{pmatrix},\quad \overline{v}'=\begin{pmatrix}\dot{v}\\ \dot{w}\\ \dot{r}\end{pmatrix},\quad \overline{R}=\begin{pmatrix}v\\ w\\ R+r\end{pmatrix}.$$

Выполняя в (49) операции векторного перемножения получим для ускорения Кориоллиса, возникающего вследствие одновременного вращения центра системы координат (центра масс спутника) и движения пробной массы относительно этого центра со скоростью $\overline{v}$:

$$2[\overline{\varpi}\times\overline{v}']=2\left[\begin{pmatrix}0\\ \varpi\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\dot{v}\\ \dot{w}\\ \dot{r}\end{pmatrix}\right]=2\begin{pmatrix}\varpi\dot{r}\\ 0\\ -\varpi\dot{v}\end{pmatrix},$$

и центробежного ускорения

$$\left[\overline{\varpi}\times\left[\overline{\varpi}\times\overline{R}\right]\right]=\left[\begin{pmatrix}0\\ \varpi\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\varpi(R+r)\\ 0\\ -\varpi v\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-\varpi^2 v\\ 0\\ -\varpi^2(R+r)\end{pmatrix}.$$

В итоге имеем для относящихся к абсолютной (не вращающейся) системе координат значений ускорений пробных масс 1 и 2 относительно центра масс спутника S :

$$\overline{a}_1=\begin{pmatrix}\ddot{v}_1+2\varpi\dot{r}_1-\varpi^2 v_1\\ \ddot{w}_1\\ \ddot{r}_1-2\varpi\dot{v}_1-\varpi^2(R+r_1)\end{pmatrix},\qquad \overline{a}_2=\begin{pmatrix}\ddot{v}_2+2\varpi\dot{r}_2-\varpi^2 v_2\\ \ddot{w}_2\\ \ddot{r}_2-2\varpi\dot{v}_2-\varpi^2(R+r_2)\end{pmatrix}.$$

Тогда ускорение массы 2 относительно массы 1, по-прежнему записываемое в не вращающейся системе координат, имеет вид:

$$\Delta\overline{a}=\overline{a}_2-\overline{a}_1=\begin{pmatrix}\Delta\ddot{v}+2\varpi\Delta\dot{r}-\varpi^2\Delta v\\ \Delta\ddot{w}\\ \Delta\ddot{r}-2\varpi\Delta\dot{v}-\varpi^2\Delta r\end{pmatrix}$$

Заметим, кстати, что полученная нами здесь формула, по существу совпадает с формулой (14) пособия [1], поскольку обе они описывают компоненты вектора относительного ускорения двух вращающихся пробных масс.

Учитывая (48), приходим к системе дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{gathered}\Delta\ddot{v}+2\omega\Delta\dot{z}-\omega^2\Delta v=V_{vv}\Delta v+V_{vw}\Delta w+V_{vr}\Delta r\\ \Delta\ddot{w}=V_{vw}\Delta v+V_{ww}\Delta w+V_{wr}\Delta r\\ \Delta\ddot{r}-2\omega\Delta\dot{v}-\omega^2\Delta r=V_{vr}\Delta v+V_{wr}\Delta w+V_{rr}\Delta r\end{gathered} \tag{50}$$

Если входящие в (50) значения компонент вектора относительного ускорения $\Delta\ddot{v},\Delta\ddot{w},\Delta\ddot{r},$ вектора относительной скорости $\Delta\dot{v},\Delta\dot{r}$ и вектора относительного положения $\Delta v,\Delta w,\Delta r$ двух пробных масс могут быть получены из измерений, выражение (50) можно рассматривать как систему трех уравнений для определения пяти независимых неизвестных значений вторых производных гравитационного потенциала.

§ 7. Программа GOCE и перспективы спутниковой градиентометрии

Среди разрабатываемых в настоящее время космических программ, предусматривающих выполнение на околоземной орбите бортовых измерений вторых производных гравитационного потенциала, наиболее близкой к осуществлению является программа Европейского Космического Агентства (ESA) **GOCE**, предусматривающая запуск специального ИСЗ в первой половине 2006 года.

Главная цель проекта состоит в построении высокоточной модели гравитационного поля Земли и фигуры геоида высокого разрешения. В результате реализации программы предполагается определение превышений геоида для модели с разрешением подробностей его фигуры (длиной полуволны) от 100 км с ошибкой не превышающей 1-2 см. Такая модель послужит уточнению представлений исследователей о внутреннем строении Земли и динамических процессах, происходящих в ее коре и внешней мантии, в частности, о движении литосферных плит. В сочетании с имеющимися данными спутниковой альтиметрии высокоточная модель геопотенциала расширит понимание процессов глобальной циркуляции вод Мирового Океана и связанных с ней изменениями климата.

Искусственный спутник Земли **GOCE** (**G**ravity field and steady-state **O**cean **C**irculation **E**xplorer) массой около 1000 кг должен быть выведен на сверхнизкую почти круговую солнечно-синхронную орбиту с примерными значениями наклонения $i=96^{o}.5$, эксцентриситета $e\leq 0.0045$, и высоты над поверхностью Земли $H=240-250$ км.

Комплекс бортовой аппаратуры предположительно будет включать:

- систему компенсации негравитационного сноса (атмосферного торможения);
- двухчастотный 24-х канальный комбинированный GPS/ГЛОНАСС приемник, обеспечивающий высокоточное позиционирование спутника с ошибкой порядка 1-2 см;
- звездный видеоприбор для контроля ориентации главных осей искусственного спутника;

- прецизионный бортовой градиентометр для измерения вторых производных геопотенциала с ошибкой 10 (-3) Этвеш.

В процессе подготовки космической программы рассматривались два варианта конструкции градиентометра: индуктивный (сверхпроводящий) и емкостной. По ряду технических причин в качестве реализуемого варианта был выбран емкостной градиентометр, состоящий из трех высокочувствительных акселерометров (см. рис. 2б). Каждый из этих акселерометров представляет собой пару пробных масс, располагающихся на близком расстоянии (около 0.5 м) симметрично относительно центра масс ИСЗ вдоль одной из трех взаимно перпендикулярных главных осей летательного аппарата (так называемая «конфигурация алмазного кристалла»).

В ходе эксперимента планируется измерять относительные ускорения каждой пары пробных масс, что позволит определять лишь диагональные элементы тензора (1) вторых производных гравитационного потенциала.

Принципиально важной составляющей проекта является непрерывная (каждые 10 секунд) высокоточная привязка спутника GOCE к ИСЗ созвездий космических навигационно-геодезических систем GPS и ГЛОНАСС, одновременно решающая две задачи. Во-первых, обеспечивается высокоточная пространственная привязка каждого градиентометрического измерения, что позволяет в уравнениях поправок (33) принимать $d\overline{X}=0$. Во-вторых, прямоугольные координаты спутника GOCE рассматриваются как псевдоизмерения, выполненные методом межспутникового слежения по схеме «высокий-низкий» (HL-SST) в системе высокоорбитальных ИСЗ систем GPS или ГЛОНАСС и низкоорбитального спутника GOCE. Такого рода псевдоизмерения

обладают высокой информативностью с точки зрения оценивания низкочастотной компоненты модели гравитационного потенциала Земли и потому обрабатываются далее совместно с данными градиентометрических измерений.

Ожидаемое время существования спутника GOCE на рабочей орбите – около двух лет, при этом период активных измерений включает два сеанса по 6 месяцев, разделенных периодом гибернации длительностью около 5 месяцев.

Обработка результатов космического эксперимента, как уже указывалось в работе [1], может быть выполнена либо в рамках пространственного (space-wise), либо в рамках временного (time-wise) подходов. Напомним, что пространственный SW-подход предполагает обработку предварительно отнесенных к узлам регулярной пространственной сетки измерений в системе координат, жестко связанной с телом вращающейся Земли. Идеология временного TW-подхода основывается на представлении массива измерений в виде дискретных временных рядов, в силу чего моменты измерений соотносятся с точками орбитальной системы координат. Понятно, что аналитический вид уравнений наблюдений и уравнений поправок будет определяться выбранным способом обработки. В то же время, независимо от него мы можем в конечном итоге записать систему уравнений поправок в виде:

$$\overline{L}=A\overline{X}, \tag{51}$$

где $\overline{L}$ – вектор свободных членов уравнений поправок, а $\overline{X}$ – вектор искомых неизвестных параметров модели геопотенциала. Оценка неизвестных выполняется по методу наименьших квадратов:

$$\tilde{\bar{X}}=\left(A^T P A\right)^{-1} A^T P \bar{L}, \qquad (52)$$

где P – весовая матрица, как обычно формируемая, исходя из ошибок измерений и наших представлений об их корреляции друг с другом.

Начиная разговор о перспективах развития метода спутниковой градиентометрии необходимо указать на его неразрывную связь с методом межспутникового слежения. В самом деле, орбитальную конфигурацию из двух ИСЗ всегда возможно рассматривать как гигантский однокомпонентный градиентометр, с базой, равной расстоянию между спутниками, играющими роль пробных гравиметрических масс. На языке математики это обстоятельство может быть записано, исходя из формулы (10) пособия [1]:

$$\bar{e}^T(s)\cdot\Im\cdot\bar{e}(s)=(\Delta\bar{a}\cdot\bar{e}(s))+\frac{1}{s}\left[(\Delta\bar{v}\cdot\Delta\bar{v})-(\dot{s})^2\right], \qquad (53)$$

где s - межспутниковое расстояние (дальность);

$\dot{s}$ - скорость изменения межспутниковой дальности;

$\bar{e}(s)$ - орт направления s ;

$\Delta\bar{v}$ - вектор относительной линейной скорости спутников;

$\Delta\bar{a}$ - вектор относительного ускорения спутников.

Левая часть формулы (53) представляет собой градиент силы притяжения вдоль прямой s , а тензор $\Im$ вторых производных относится к средней точке этой прямой. Заметим также, что выражение (53) справедливо для произвольного расположения искусственных спутников в пространстве.

В будущем, с целью повышения пространственного и временного разрешения, а также точности моделей гравитационного поля, целесообразно выполнение межспутниковых измерений в системе (группировке) нескольких близких спутников, обращающихся вокруг некоего общего центра, который, в свою очередь, обращается по круговой геоцентрической орбите. Напомним, что в этом случае относительное движение близких спутников описывается системами уравнений (30) и (31), приведенными нами в уже цитировавшемся выше пособии [1].

Завершая обсуждение проблемы применения новых дифференциальных спутниковых методов динамической космической геодезии, необходимо подчеркнуть, что только методы измерений в спутниковых системах с изменяемой геометрией расположения элементов в состоянии обеспечить прецизионную точность оценивания искомых параметров модели геопотенциала, а также ее высокое пространственное и временное разрешение, доставляющее необходимую информацию для мониторинга геодинамических процессов. Заметим также, что дифференциальные спутниковые методы обладают универсальными свойствами, обеспечивающими эффективность их применения для исследования Луны и других тел Солнечной системы.