УДК 519.6

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ ЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ НЕЛОКАЛЬНЫМ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

О.В. Глазырина, М.Ф. Павлова

Аннотация

Рассмотрена первая краевая задача для параболического уравнения с вырождающимся по градиенту пространственным оператором, зависящим также от интегральной характеристики решения. Доказана теорема о сходимости явной разностной схемы при минимальных предположениях на гладкость исходных данных.

Ключевые слова: параболическое уравнения, монотонный оператор, нелокальный оператор, явная разностная схема, устойчивость, сходимость.

В работе в ограниченной области $\Omega \subset R^n$ рассматривается начально-краевая задача для параболического уравнения с пространственным оператором вида

$$(Lu)(x,t) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\big(a_i(x,u(x,t))k_i(x,\nabla u(x,t),(Bu)(t))\big), \quad x \in \Omega,\ t \in (0,T), \tag{1}$$

где ∇u – градиент u, (Bu) – нелокальная характеристика решения:

$$Bu(t) = \int\limits_{\Omega'} g(x)u(x,t)\,dx. \tag{2}$$

Здесь g – известная функция, Ω' – область, принадлежащая Ω или совпадающая с ней.

Следует отметить, что нелинейные параболические уравнения с операторами вида (1) в случае, когда коэффициенты k_i зависят лишь от x и ∇u, изучены достаточно хорошо. Приведем лишь наиболее значимые с нашей точки зрения результаты. В работах [1–5] исследованы свойства дифференциальной задачи, доказаны теоремы существования и единственности обобщенного решения. Изучению приближенных методов решения, в частности, сходимости разностных схем посвящены работы [6–8].

Более поздние исследования показали, что в приложениях возникают также задачи, в которых пространственный оператор зависит от нелокальной характеристики решения. Например, в работах [9, 10] исследуется математическая модель процесса распространения популяции бактерий, содержащая параболическое уравнение с пространственным оператором

$$(Lu)(x,t) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\big(a((Bu)(t))\nabla u(x,t)\big), \tag{3}$$

где B – оператор вида (2), a – заданная нелинейная функция.

Работы [11, 12] являются по сути продолжением и обобщением полученных в [9, 10] результатов. В [11] доказана теорема существования обобщенного решения начально-краевой задачи для уравнения

$$\frac{\partial \varphi(u)}{\partial t} + Lu = f. \tag{4}$$

Здесь L – определенный равенством (1) оператор с нелокальной характеристикой более общего по сравнению с (2) вида. В [12] доказана теорема единственности решения начально-краевой задачи для уравнения (4) при $\varphi(u) = u$ и при некоторых дополнительных условиях на оператор L.

В настоящей работе доказана теорема о сходимости явной разностной схемы для параболического уравнения с пространственным оператором вида (1), (2).

1. Постановка задачи

Пусть Ω – ограниченная область пространства R^n, Γ – граница области Ω, $Q_T = \Omega \times (0,T)$. В области Q_T рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i(x,u)k_i(x,\nabla u, Bu)) = f, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T), \tag{5}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad u(x,t) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0,T]. \tag{6}$$

Здесь a_i, k_i, u_0 – заданные функции, B – оператор вида (2).

В дальнейшем будем предполагать, что $a_i(x,\xi_0)$, $k_i(x,\xi,\nu)$, $i = 1,\ldots,n$, непрерывны по всем аргументам и при любых значениях $x \in \Omega$, $\xi_0, \nu \in R$, $\xi^1, \xi^2, \xi \in R^n$ удовлетворяют условиям

$$0 < \beta_0 \le a_i(x,\xi_0) \le \beta_1, \tag{7}$$

$$| k_i(x,\xi,\nu) | \le d_0 \sum_{j=1}^{n} | \xi_j |^{p-1} + d_1, \quad d_0 > 0, \quad d_1 \ge 0, \quad p > 1, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,\xi_0)k_i(x,\xi,\nu)\xi_i \ge d_2 \sum_{i=1}^{n} | \xi_i |^p - d_3, \quad d_2 > 0, \quad d_3 \geqslant 0, \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,\xi_0)(k_i(x,\xi^1,\nu) - k_i(x,\xi^2,\nu))(\xi_i^1 - \xi_i^2) \ge 0. \tag{10}$$

Отметим, что из условий (7), (8) следует, что оператор L, действующий из $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ в $W_{p'}^{-1}(\Omega)$, где $p' = p/(p-1)$, является ограниченным. Условия (9), (10) обеспечивают соответственно коэрцитивность и монотонность по градиенту оператора L.

Определение 1. Функцию $u \in L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)) \bigcap L_\infty(0,T;L_\alpha(\Omega))$ такую, что

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{п. вс. в } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L_{p'}(0,T;W_{p'}^{-1}(\Omega)), \tag{11}$$

назовем обобщенным решением задачи (5), (6), если для любой функции v из пространства $L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega))$ справедливо следующее интегральное тождество

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \right\rangle dt + \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)k_i(x,\nabla u, Bu)\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx\,dt = \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=0}^{n} f_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx\,dt. \tag{12}$$

Здесь $\langle g, v\rangle$ – значение функционала g из $W_{p'}^{-1}(\Omega)$ на элементе v из $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$, $\dfrac{\partial v}{\partial x_0} \equiv v$, функции f_i, $i = 0, \ldots, n$, такие, что $f = f_0 - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i} f_i$.

Заметим, что из результатов работы [11] следует существование обобщенного решения задачи (5), (6) при любых $f \in L_{p'}(0, T; W_{p'}^{-1}(\Omega))$ и $u_0 \in L_2(\Omega) \bigcap \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$. В работе [12] была доказана единственность обобщенного решения задачи (5), (6) при условии, что оператор L – сильно-монотонный и $a_i \equiv 1$.

2. Вспомогательные результаты и обозначения

Лемма 1. *Пусть $g(x) \in L_{p_1}(\Omega')$. Тогда оператор*

$$B:\ L_p(0, T; \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)) \bigcap L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \to L_{\widetilde{p}}(0, T)$$

является непрерывным

1) *при* $\widetilde{p} \in [1, +\infty)$, *если* $p_1 \geq 2$;
2) *при* $\widetilde{p} = p$, *если* $(1 \leq p_1 < 2) \wedge (p \geq n)$;
3) *при* $\widetilde{p} = p$, *если* $(p < n) \wedge \left(\dfrac{np}{np - n + p} < 2\right) \wedge \left(\dfrac{np}{np - n + p} \leq p_1 < 2\right)$.

Доказательство. Пусть $p_1 \geq 2$. По неравенству Коши – Буняковского

$$|(Bu)(t)| = \left|\int\limits_{\Omega'} g(x)\, u(x, t)\, dx\right| \leq \|g\|_{L_2(\Omega')}\, \|u(t)\|_{L_2(\Omega)}.$$

Так как $u \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega))$, то $\|Bu\|_{L_\infty(0,T)} \leq \|g\|_{L_2(\Omega')}\, \|u\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}$. Утверждение 1 доказано.

Рассмотрим случай 2. Если $p \geq n$, то, как известно, $L_p(0, T; \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)) \subset L_\infty(\Omega)$. Следовательно,

$$|(Bu)(t)| \leq \|g\|_{L_1(\Omega')}\, \|u(t)\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \|g\|_{L_1(\Omega')}\, \|u(t)\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)},$$

а потому $\|Bu\|_{L_p(0,T)} \leq \|g\|_{L_1(\Omega')}\, \|u\|_{L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega))}$.

Для случая 3 имеем $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega) \subset L_r(\Omega)$, где $r = np/(n - p)$ при $p < n$. Следовательно, для непрерывности оператора B необходимо, чтобы $p_1 \geq r'$, где r' – число, удовлетворяющее равенству $1/r + 1/r' = 1$. Нетрудно видеть, что

$$r' = \frac{r}{r - 1} = \frac{np}{np - n + p}.$$

Поэтому если $\dfrac{np}{np - n + p} < 2$, то при $\dfrac{np}{np - n + p} \leq p_1 < 2$ справедлива оценка

$$|(Bu)(t)| \leq \|g\|_{L_{r'}(\Omega')}\, \|u(t)\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)},$$

из которой следует, что $\|Bu\|_{L_p(0,T)} \leq \|g\|_{L_{r'}(\Omega')}\, \|u\|_{L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega))}$. Лемма доказана.

□

В дальнейшем будем предполагать, что область Ω – n-мерный параллелепипед: $\overline{\Omega} = \{x \in R_n : 0 \le x_i \le l_i,\, i = 1, 2, \dots, n.\}$. На Ω построим равномерную сетку $\overline{\omega}_h$ с шагом h_i по i-му направлению, $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n)$, $h = \min\limits_{1 \le i \le n} h_i$. Будем предполагать, что существует константа c такая, что $\overline{h} \le ch$, $\overline{h} = \max\limits_{1 \le i \le n} h_i$. Обозначим

$$\overline{\omega}_h = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \overline{\Omega} : \ x_i = jh_i,\ j = 0, \dots, N_i,\ N_i = \frac{l_i}{h_i} \right\},$$

$$\gamma_h = \overline{\omega}_h \cap \Gamma, \quad \omega_h = \overline{\omega}_h \backslash \gamma_h.$$

На $[0, T]$ построим равномерную сетку с шагом τ:

$$\overline{\omega}_\tau = \left\{ t \in [0, T] : \ t = j\tau,\ j = 0, \dots, M,\ M = \frac{T}{\tau} \right\}, \quad \omega_\tau = \overline{\omega}_\tau \backslash \{0\}.$$

Пусть H – пространство сеточных функций, определенных на $\overline{\omega}_h$, $\overset{\circ}{H}$ – множество сеточных функций, равных нулю на границе γ_h.

Введем n-мерный вектор $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, координаты которого могут принимать значения ± 1. Для сеточной функции y определим разностные отношения $\partial_{r_i} y$ по формуле

$$\partial_{r_i} y = \begin{cases} y_{x_i}, & r_i = +1, \\ y_{\overline{x}_i}, & r_i = -1; \end{cases} \quad \nabla_r y = (\partial_{r_1} y, \partial_{r_2} y, \dots, \partial_{r_n} y).$$

Обозначим через $H_r(x)$ ячейку сетки, содержащую все точки сетки, участвующие в записи выражения $\nabla_r y(x) = (\partial_{r_1} y(x), \partial_{r_2} y(x), \dots, \partial_{r_n} y(x))$, ω_r – множество точек сетки $\overline{\omega}_h$, в которых определена операция ∇_r.

В H введем скалярные произведения

$$(y, v)_r = \sum_{x \in \omega_r} \operatorname{mes}\big(H_r(x)\big) y(x) v(x),$$

$$[y, v] = 2^{-n} \sum_r (y, v)_r,$$

а также нормы

$$\|y\|_p = [|y|^p, 1]^{1/p}, \quad \|y\|_{+p} = \left(2^{-n} \sum_r \left(\sum_{i=1}^n |\partial_{r_i} y|^p, 1 \right)_r \right)^{1/p},$$

$$\|y\| = [y, y]^{1/2}, \quad \|y\|_{-p'} = \sup_{z \ne 0} \frac{\big|[y, z]\big|}{\|z\|_{+p}}.$$

В дальнейшем будем использовать следующие восполнения сеточных функций.

Пусть $z \in H$, через $\Pi_r z$ будем обозначать функцию, постоянную в каждой ячейке сетки и определенную следующим образом

$$\Pi_r z(x') = z(x), \quad \text{где } \ x \in \omega_r : \ x' \in H_r(x).$$

Для сеточных функций аргумента t введем два кусочно-постоянных восполнения

$$(\Pi^- w)(t') = w(t), \quad \text{где } \ t = k\tau : \ (k-1)\tau < t' \le k\tau,$$
$$(\Pi^+ w)(t') = w(t), \quad \text{где } \ t = k\tau : \ k\tau \le t' < (k+1)\tau.$$

Если $z(x, t)$ – сеточная функция, определенная на $\overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$, то для нее определим следующие восполнения

$$\Pi_r^\pm z(x, t) = (\Pi_r z(x, t))^\pm = \Pi_r z^\pm(x, t).$$

3. Построение и исследование явной разностной схемы

Для задачи (5), (6) рассмотрим явную разностную схему

$$y_t(x,t) + Ay(x,t) = \varphi(x,t), \quad x \in \omega_h, \quad t \in \overline{\omega}_\tau \backslash \{T\}, \tag{13}$$

$$y(x,0) = y_0(x), \quad y\,|_{\gamma_h} = 0.$$

Здесь A – разностный оператор, действующий из $\overset{\circ}{H}$ в $\overset{\circ}{H}$ и определяемый соотношением

$$[Ay, w] = \frac{1}{2^n}\sum_r \sum_{i=1}^n (a_i(x,y)k_i(x, \nabla_r y, B_h y), \partial_{r\,i} w)_r,$$

где $B_h y(t) = B(2^{-n}\sum\limits_r \Pi_r y(t))$, y_0 – разностный аналог u_0 такой, что

$$\Pi_r y_0 \to u_0 \quad \text{в} \quad L_2(\Omega), \tag{14}$$

φ – сеточная функция, являющаяся аппроксимацией правой части исходного уравнения, которую определим следующим образом

$$[\varphi, v] = \frac{1}{2^n}\sum_r \sum_{i=0}^n (\varphi_{ir}, \partial_{r_i} v)_r \quad \forall\, v \in \overset{\circ}{H},$$

где

$$\partial_{r_0} v \equiv v, \quad \varphi_{ir}(x,t) = \frac{1}{\tau\ \mathrm{mes}\big(H_r(x)\big)} \int\limits_t^{t+\tau} \int\limits_{H_r(x)} f_i(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Лемма 2. *Пусть $u_0 \in L_2(\Omega)$ и $f \in L_q(0,T; W_{p'}^{-1}(\Omega))$, где $q = \max\{2, p'\}$. Шаги сеток $\overline{\omega}_\tau$ и $\overline{\omega}_h$ удовлетворяют условию*

$$\tau \le \begin{cases} c\,\dfrac{h^2}{4n^{2/p}}, & 1 < p < 2, \\ c\,\dfrac{h^{p+n(p-2)/2}}{2^p n}, & p \ge 2. \end{cases} \tag{15}$$

Тогда для решения явной разностной схемы имеют место следующие априорные оценки:

$$\sum_{t=0}^{t'} \tau \|y\|_{+p}^p \le c \quad \forall\, t' \in \bar{\omega}_\tau, \tag{16}$$

$$\max_{t' \in \bar{\omega}_\tau} \|y(t')\|^2 \le c \quad \forall\, t' \in \bar{\omega}_\tau, \tag{17}$$

$$\sum_{t=0}^{t'} \tau^2 \|y_t\|^2 \le c \quad \forall\, t' \in \bar{\omega}_\tau \backslash \{T\}, \tag{18}$$

$$\frac{1}{k\tau}\sum_{t=0}^{T-k\tau} \tau \|y(t+k\tau) - y(t)\|^2 \le c \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots, M. \tag{19}$$

Доказательство. Умножим обе части (13) скалярно в H на $2\tau\widehat{y}$. Воспользовавшись очевидными соотношениями $[Ay, \widehat{y}] = [Ay, y] + \tau[Ay, y_t]$, а также $[\varphi, \widehat{y}] = [\varphi, y] + \tau[\varphi, y_t]$, результат запишем в виде

$$2\tau[y_t, \widehat{y}] + 2\tau[Ay, y] = 2\tau[\varphi, y] + 2\tau^2[\varphi, y_t] - 2\tau^2[Ay, y_t]. \tag{20}$$

Учитывая условие (9), из равенства (20) нетрудно получить

$$\|\widehat{y}\|^2 - \|y\|^2 + \tau^2\|y_t\|^2 + 2\tau d_2\|y\|^p_{+p} - 2\tau d_3 \operatorname{mes}\Omega \le$$
$$\le 2\tau[\varphi, y] + 2\tau^2[\varphi, y_t] - 2\tau^2[Ay, y_t]. \quad (21)$$

Оценим правую часть неравенства (21). Для оценки первых двух слагаемых применим неравенство Гельдера, ε-неравенство, разностный аналог неравенства Фридрихса. В результате будем иметь

$$[\varphi, y] = \frac{1}{2^n}\sum_r\sum_{i=0}^n(\varphi_{ir}, \partial_{r_i}y)_r \le \frac{1}{\varepsilon_1 p'}\frac{1}{2^n}\sum_r\sum_{i=0}^n\|\varphi_{ir}\|^{p'}_{p'} + \frac{\varepsilon_1}{p}(1+c_\Omega)\|y\|^p_{+p}, \quad (22)$$

$$\tau^2[\varphi, y_t] \le \frac{1}{2\varepsilon_2^2}\frac{1}{2^n}\sum_r\sum_{i=0}^n\tau\|\varphi_{ir}\|^2_{p'} + \frac{\varepsilon_2^2\tau^3}{2}\Big(\|y_t\|^2_{+p} + \|y_t\|^2_p\Big) \le$$
$$\le \frac{1}{2\varepsilon_2^2}\frac{1}{2^n}\sum_r\sum_{i=0}^n\tau\|\varphi_{ir}\|^2_{p'} + \frac{\varepsilon_2^2\tau^3}{2}(1+c_\Omega)\lambda^2\|y_t\|^2. \quad (23)$$

Здесь c_Ω – постоянная из разностного аналога неравенства Фридрихса, λ – из оценки вида

$$\|y\|_{+p} \le \lambda\|y\|, \quad (24)$$

где $\lambda = \dfrac{c\,n^{1/p}}{h^{(1+n(p-2)/2p)}}$, если $p \ge 2$, и $\lambda = \dfrac{c\,n^{1/p}}{h}$, если $1 < p < 2$.

Из условия (8) следует

$$2\tau^2[Ay, y_t] \le 2\tau^2\beta_1 n(d_0\|y\|^{p-1}_{+p} + d_1)\|y_t\|_{+p} = 2\tau^2\beta_1 n d_0\|y\|^{p-1}_{+p}\|y_t\|_{+p} +$$
$$+ 2\tau^2\beta_1 n d_1\|y_t\|_{+p} \equiv I + 2\tau^2\beta_1 n d_1\|y_t\|_{+p} \le I + \tau^3\|y_t\|^2_{+p} + c_1\tau, \quad (25)$$

где $c_1 = \beta_1^2 n^2 d_1^2$.

Используя (22)–(25) для преобразования (21), нетрудно получить

$$\|\widehat{y}\|^2 - \|y\|^2 + \tau^2\|y_t\|^2 + 2\tau d_2\|y\|^p_{+p} - \tau d_3 \operatorname{mes}\Omega \le$$
$$\le \frac{1}{2^n}\sum_r\sum_{i=0}^n\tau\left(\frac{1}{2\varepsilon_2^2}\|\varphi_{ir}\|^2_{p'} + \frac{1}{\varepsilon_1 p'}\|\varphi_{ir}\|^{p'}_{p'}\right) +$$
$$+ \frac{\varepsilon_1}{p}(1+c_\Omega)2\tau\|y\|^p_{+p} + \frac{\varepsilon_2^2\tau^3}{2}(1+c_\Omega)\lambda^2\|y_t\|^2 + \tau^3\|y_t\|^2_{+p} + I + c_1\tau. \quad (26)$$

При $1 < p < 2$ оценим I следующим образом:

$$I \le \frac{\tau\varepsilon_3^{p'}}{p'}\|y\|^p_{+p} + \frac{\gamma^p\tau^{p+1}}{p\varepsilon_3^p}\|y_t\|^p_{+p} \le \frac{\tau\varepsilon_3^{p'}}{p'}\|y\|^p_{+p} + \frac{\gamma^p\tau}{p\varepsilon_3^p}\Big(\frac{\tau^2\|y_t\|^2_{+p}}{2/p} + \frac{2-p}{2}\Big) \le$$
$$\le \frac{\tau\varepsilon_3^{p'}}{p'}\|y\|^p_{+p} + \frac{\gamma^p\tau^3\lambda^2}{2\varepsilon_3^p}\|y_t\|^2 + c_2\tau, \quad (27)$$

где $\gamma = 2\beta_1 n d_0$.

Подставляя (27) в (26) и суммируя полученные неравенства по $t \in \overline{\omega}_\tau$ от 0 до t', будем иметь

$$\|y(t')\|^2 + \left(2d_2 - \frac{2\varepsilon_1}{p}(1 + c_\Omega^p) - \frac{\varepsilon_3^{p'}}{p'}\right)\sum_{t=0}^{t'}\tau\|y\|_{+p}^p +$$
$$+ \left(1 - \frac{\tau\varepsilon_2^2}{2}(2 + c_\Omega)\lambda^2 - \gamma^p\frac{\tau\lambda^2}{2\varepsilon_3^p}\right)\sum_{t=0}^{t'}\tau^2\|y_t\|^2 \le$$
$$\le C\left\{\sum_{t=0}^{t'}\frac{1}{2^n}\sum_r\sum_{i=0}^n\tau\left(\frac{1}{2\varepsilon_2^2}\|\varphi_{ir}\|_{p'}^2 + \frac{1}{\varepsilon_1 p'}\|\varphi_{ir}\|_{p'}^{p'}\right) + \|y_0\|^2 + 1\right\}, \quad (28)$$

где C – постоянная, не зависящая от h и τ. Условие (15) позволяет выбрать h, τ, ε_1, ε_2, ε_3 так, чтобы

$$\begin{aligned} &2d_2 - \frac{2\varepsilon_1}{p}(1 + c_\Omega^p) - \frac{\varepsilon_3^{p'}}{p'} \ge \delta_1 > 0, \\ &1 - \tau\left(\frac{\varepsilon_2^2}{2}(2 + c_\Omega)\lambda^2 - \gamma^p\frac{\lambda^2}{2\varepsilon_3^p}\right) \ge \delta_2 > 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Из последних неравенств и (28) следуют оценки (16)–(18).

Пусть теперь $p \ge 2$. Оценим I с помощью неравенств Гельдера и (24), в результате получим

$$I \le \tau^2\gamma\|y\|_{+p}^{p/2}\|y\|_{+p}^{(p-2)/2}\lambda\|y_t\| \le$$
$$\le \tau^2\gamma\|y\|_{+p}^{p/2}\lambda^{p/2}\|y\|^{(p-2)/2}\|y_t\| \le \frac{\tau\varepsilon_3^2}{2}\|y\|_{+p}^p + \frac{\tau^3\gamma^2\lambda^p}{2\varepsilon_3^2}\|y\|^{p-2}\|y_t\|^2. \quad (30)$$

Подставляя (30) в (26) и суммируя полученные неравенства по t от 0 до $t' \in \bar{\omega}_\tau$, будем иметь

$$\|y(t')\|^2 + \left(2d_2 - \frac{2\varepsilon_1}{p}(1 + c_\Omega^p) - \frac{\varepsilon_3^2}{2}\right)\sum_{t=0}^{t'}\tau\|y\|_{+p}^p +$$
$$+ \sum_{t=0}^{t'}\left(1 - \frac{\tau\varepsilon_2^2}{2}(2 + c_\Omega)\lambda^2 - \gamma^2\frac{\tau\lambda^p}{2\varepsilon_3^p}\|y(t)\|^{p-2}\right)\tau^2\|y_t\|^2 \le$$
$$\le C\left\{\sum_{t=0}^{t'}\frac{1}{2^n}\sum_r\sum_{i=0}^n\tau\left(\frac{1}{2\varepsilon_2^2}\|\varphi_{ir}\|_{p'}^2 + \frac{1}{\varepsilon_1 p'}\|\varphi_{ir}\|_{p'}^{p'}\right) + \|y_0\|^2 + 1\right\}. \quad (31)$$

Докажем сначала, что из (31) следует для любых $t' \in \bar{\omega}_\tau$ оценка вида

$$\|y(t')\|^2 \le \widetilde{c}\left(\sum_{t=0}^{T}\frac{1}{2^n}\sum_r\sum_{i=0}^n\tau\left(\frac{1}{2\varepsilon_2^2}\|\varphi_{ir}\|_{p'}^2 + \frac{1}{\varepsilon_1 p'}\|\varphi_{ir}\|_{p'}^{p'}\right) + \|y_0\|^2 + 1\right) = m^2, \quad (32)$$

где $\widetilde{c}$ – постоянная, не зависящая от h и τ. При $t' = 0$ оценка (32) выполняется. Предположим, что (32) справедлива для всех значений $t' \le t_1$; $t_1 \in \overline{\omega}_\tau \backslash \{T\}$. Докажем, что (32) имеет место при $t' = t_1 + \tau$. Для этого запишем неравенство (31) при $t' = t_1 + \tau$, в результате будем иметь

$$\|y(t')\|^2 + \left(2d_2 - \frac{2\varepsilon_1}{p}\,(1 + c_\Omega^p) - \frac{\varepsilon_3^{2'}}{2}\right)\sum_{t=0}^{t_1}\tau\|y\|_{+p}^p +$$
$$+ \left(1 - \frac{\tau\varepsilon_2^2}{2}\,(2 + c_\Omega)\lambda^2 - \gamma^2\,\frac{\tau\lambda^p}{2\varepsilon_3^p}\,m^{p-2}\right)\sum_{t=0}^{t_1}\tau^2\|y_t\|^2 \leq$$
$$\leq C\left\{\sum_{t=0}^{t_1}\frac{1}{2^n}\sum_r\sum_{i=0}^n\tau\left(\frac{1}{2\varepsilon_2^2}\|\varphi_{ir}\|_{p'}^2 + \frac{1}{\varepsilon_1 p'}\|\varphi_{ir}\|_{p'}^{p'}\right) + \|y_0\|^2 + 1\right\}. \quad (33)$$

Выбирая $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ h$ и τ так, чтобы

$$\begin{aligned} &2d_2 - \frac{2\varepsilon_1}{p}(1 + c_\Omega^p) - \frac{\varepsilon_3^2}{2} \geq \delta_1 > 0, \\ &1 - \frac{\tau\varepsilon^2}{2}(2 + c_\Omega)\lambda^2 - \gamma^2\frac{\tau\lambda^p}{2\varepsilon_3^p}m^{p-2} \geq \delta_2 > 0, \end{aligned} \quad (34)$$

получаем, что из (33) следует неравенство (32) при $t' = t_1 + \tau$, при этом $\widetilde{c} = \max\left\{2/(\varepsilon_1 p'),\, 1/\varepsilon_2^2,\, 1\right\}$. Следовательно, оценка (32) имеет место. Из (31) и (32) следуют (16)–(18). Заметим, что постоянная c в (15) выбирается так, чтобы были выполнены оценки (29), (34).

Докажем далее справедливость оценки (19). Для этого просуммируем обе части (13) по t от $\bar t$ до $\bar t + (k-1)\tau$, затем умножим полученное равенство скалярно в H на $\tau(y(\bar t + k\tau) - y(\bar t))$ и снова просуммируем по $\bar t$ от 0 до $T - k\tau$, обозначив через J левую часть, в результате будем иметь

$$J = -\frac{1}{k}\sum_{\bar t=0}^{T-k\tau}\ \sum_{t=\bar t}^{\bar t+(k-1)\tau}\tau[Ay(t), y(\bar t + k\tau) - y(\bar t\,)] +$$
$$+ \frac{1}{k}\sum_{\bar t=0}^{T-k\tau}\ \sum_{t=\bar t}^{\bar t+(k-1)\tau}\tau[\varphi(t), y(\bar t + k\tau) - y(\bar t\,)]. \quad (35)$$

Используя ограниченность оператора A и обобщенное неравенство Коши–Буняковского, нетрудно получить, что

$$J \leq \frac{1}{k}\sum_{\bar t=0}^{T-k\tau}\ \sum_{t=\bar t}^{\bar t+(k-1)\tau}\left\{\left(d_0\,\|\,y(t)\,\|_{+p}^{p-1} + d_1\right)\left(\|y(\bar t + k\tau)\|_{+p} + \|y(\bar t\,)\|_{+p}\right) +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2^n}\sum_r\sum_{i=0}^n\|\varphi_{ir}\|_{p'}\left(\|y(\bar t + k\tau)\|_{+p} + \|y(\bar t\,)\|_{+p}\right)\right\}. \quad (36)$$

Докажем, что правая часть неравенства (36) ограничена постоянной, не зависящей от τ и ε. Рассмотрим слагаемое вида

$$J_1 = \frac{1}{k}\sum_{\bar t=0}^{T-k\tau}\ \sum_{t=\bar t}^{\bar t+(k-1)\tau}d_0\,\|\,y(t)\,\|_{+p}^{p-1}\ \|y(\bar t + k\tau)\|_{+p}.$$

Оценивая его с помощью неравенства Гельдера, будем иметь

$$J_1 \le \frac{d_0}{k}\left(\sum_{\bar t=0}^{T-k\tau}\sum_{t=\bar t}^{\bar t+(k-1)\tau}\tau \parallel y(t)\parallel_{+p}^p\right)^{1/p'}\left(\sum_{\bar t=0}^{T-k\tau}\sum_{t=\bar t}^{\bar t+(k-1)\tau}\tau\|y(\bar t+k\tau)\|_{+p}^p\right)^{1/p} \le$$

$$\le \frac{d_0}{k}\left(k\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau \parallel y(t)\parallel_{+p}^p\right)^{1/p'}\left(k\sum_{\bar t=0}^{T-\tau}\tau\|y(\bar t)\|_{+p}^p\right)^{1/p}.$$

Из последнего неравенства и (16) следует, что J_1 ограничен сверху постоянной, не зависящей от τ и ε. Оценка остальных слагаемых проводится аналогично. Лемма доказана. □

Из априорных оценок (16), (17) следует ограниченность множества $\{\Pi_r^{\pm}y\}$ в пространствах $L_p(Q_T)$ и $L_\infty(0,T;L_2(\Omega)$, а также ограниченность множества $\{\Pi_r^{\pm}\partial_{r_i}y\}$ в пространстве $L_p(Q_T)$. В силу слабой компактности ограниченных множеств в рефлексивных пространствах и *-слабой компактности ограниченных множеств в $L_\infty(0,T;L_2(\Omega)$ существуют подпоследовательности $\{\vec h^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$, $\{\tau_m\}_{m=1}^{\infty}$[1] и элемент u, принадлежащий $L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega))\bigcap L_\infty(0,T;L_2(\Omega)$, такие, что при $\vec h^{(m)},\tau_m\to 0$

$$\Pi_r^{\pm}y \rightharpoonup u \text{ в } L_p(Q_T), \tag{37}$$

$$\Pi_r^{\pm}\partial_{r_i}y \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ в } L_p(Q_T), \tag{38}$$

$$\Pi_r^{\pm}y \to u \text{ *-слабо в } L_\infty(0,T;L_2(\Omega). \tag{39}$$

Используя оценки (16), (17), (19) и сеточный аналога теоремы компактности (см. [4][Лемма 9]), нетрудно убедиться в существовании подпоследовательностей $\{\vec h^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$, $\{\tau_m\}_{m=1}^{\infty}$, для которых наряду с (37), (38) справедливы также предельные соотношения вида

$$\Pi_r^{\pm}y \to u \text{ в } L_{p_0}(Q_T), \quad p_0=\min\{2,p\}, \tag{40}$$

$$\Pi_r^{\pm}y \to u \text{ п. вс. в } Q_T. \tag{41}$$

Заметим, что $L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega))\subset L_p(0,T;L_{\widetilde p}(\Omega))$, где $\widetilde p\le np/(n-p)$, если $n>p$, и $\widetilde p < +\infty$, если $n\le p$. Поэтому из оценок (16), (17) вытекает, что множество $\{\Pi_r^{\pm}y\}$ равномерно по h и τ ограничено в пространстве $L_p(0,T;L_{\widetilde p}(\Omega))\bigcap L_\infty(0,T;L_2(\Omega)$. Из этого факта и предельного соотношения (40) следует, что

$$\Pi_r^{\pm}y \to u \text{ в } L_{p^*}(0,T;L_{\widehat p}(\Omega)), \tag{42}$$

где $p^*<+\infty$, $\widehat p<2$, если $(n>p)$ и $(np/(n-p)\le 2)$; $\widehat p<np/(n-p)$, если $(n>p)$ и $(np/(n-p)>2)$; $\widehat p\in[2,+\infty)$, если $n\le p$.

Из определения оператора B_h и предельного соотношения (42) следует, что

$$\Pi^+B_h(y)\to Bu \text{ в } L_{p^*}(0,T) \tag{43}$$

если функция g, определяющая этот оператор, будет принадлежать $L_{p_1}(\Omega)$, где

$$p_1 > \begin{cases} 1, & n\le p,\\ np/(np-n+p), & (n>p)\wedge(np/(n-p)>2),\\ 2, & (n>p)\wedge(np/(n-p)\le 2).\end{cases} \tag{44}$$

[1] В дальнейшем за выбранными подпоследовательностями будем сохранять обозначения самих последовательностей.

Далее из условия (8) и оценки (16) вытекает ограниченность в $L_{p'}(Q_T)$ множества $\{\Pi_r^{\pm}(k_i(x,\nabla_r y, B_h y))\}$ при любом $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Поэтому найдутся $\overline{k}_i \in \in L_{p'}(Q_T)$ и последовательности $\{\vec{h}^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$, $\{\tau_m\}_{m=1}^{\infty}$ такие, что

$$\Pi_r^{\pm}(k_i(x,\nabla_r y, B_h y)) \rightharpoonup \overline{k}_i \text{ в } L_{p'}(Q_T). \tag{45}$$

Из непрерывности функции $a_i(x,\xi)$ и предельного соотношения (41) следует, что

$$\Pi_r^{\pm}(a_i(x,y)) \to a_i(x,u) \text{ п. вс. в } Q_T. \tag{46}$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы* 2, *кроме того, шаги* $\vec{h}$ *и* τ [2] *удовлетворяют условиям*

$$\tau\frac{n}{h^{p+n(p-2)/2}} \to 0, \quad \textit{если} \quad p \ge 2; \qquad \tau\frac{n^{2/p}}{h^2} \to 0, \quad \textit{если} \quad 1<p<2, \tag{47}$$

тогда функция u, *определенная соотношениями* (37)–(41), *является обобщенным решением задачи* (5), (6).

Доказательство. Пусть z_h и η_h – сеточные функции, определенные на $\overline{w}_h$ и $\overline{w}_\tau$ соответственно и совпадающие со значениями функции $z \in C_0^\infty(\Omega)$ и функции $\eta \in C^\infty(0,T)$ такой, что $\eta(T)=0$, на этих множествах.

Умножим равенство (13) скалярно в H на $\tau z_h \widehat{\eta}_\tau(t)$ и просуммируем по t от 0 до $T-\tau$. В результате будем иметь

$$\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau[y_t(t),z_h]\widehat{\eta}_\tau(t)+ \\ +\sum_{t=0}^{T-\tau}\frac{1}{2^n}\tau\sum_r\sum_{i=1}^{n}\big(a_i(x,y)k_i(x,\nabla_r y,B_h y),\partial_{r_i}z_h\big)_r\widehat{\eta}_\tau(t)=\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau[\varphi,z_h]\widehat{\eta}_\tau(t).$$

После преобразования первого слагаемого с помощью формулы суммирования по частям получим

$$\frac{1}{2^n}\sum_r\Big\{-\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\big(y,z_h\big)_r(\eta_\tau)_{\bar t}-\big(y_0,z_h\big)_r\eta_\tau(0)+ \\ +\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\sum_{i=1}^{n}\big(a_i(x,y)k_i(x,\partial_r y,B_h y),\partial_{r_i}z_h\big)_r\widehat{\eta}_\tau(t)\Big\}= \\ =\frac{1}{2^n}\sum_r\sum_{i=0}^{n}\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\big(\varphi_{ir},\partial_{r_i}z_h\big)_r\widehat{\eta}_\tau.$$

Последнее тождество, используя восполнения, запишем в виде

$$\frac{1}{2^n}\sum_r\bigg(-\int_{Q_T}\Pi^-{}_r y\Pi_r z_h\Pi^-(\eta_\tau)_{\bar t}-\int_{\Omega}\Pi_r y_0\Pi_r z_h\eta_\tau(0)dx+ \\ +\int_{Q_T}\sum_{i=1}^{n}\Pi_r^+\big(a_i(x,y)\,k_i(x,\nabla_r y,B_h y)\big)\,\Pi_r\partial_{r_i}z_h\,\Pi^-\eta_\tau\,dx\,dt\bigg)= \\ =\frac{1}{2^n}\sum_r\sum_{i=0}^{n}\int_{Q_T}\Pi_r^+\varphi_{ir}\,\Pi_r\partial_{r_i}z_h\,\Pi^-(\eta_\tau)\,dx\,dt. \tag{48}$$

[2] В дальнейшем будут использованы лишь выбранные последовательности $\{\vec{h}^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$, $\{\tau_m\}_{m=1}^{\infty}$, для которых справедливы соотношения (37)–(46). Поэтому для сокращения записей здесь и далее индекс m будем опускать.

Используя (48), теорему Лебега о предельном переходе, а также очевидные соотношения $\Pi_r \partial_{r_i} z_h \to \dfrac{\partial z}{\partial x_i}$ в $L_q(\Omega)$, $\Pi^{\pm}\eta_\tau \to \eta$ в $L_q(0,T)$ для любого $q \geq 1$, нетрудно показать, что

$$\Pi_r^- a_i(x,y)\, \Pi_r \partial_{r_i} z_h\, \Pi^- \eta_\tau \to a_i(x,u)\, \frac{\partial z}{\partial x_i}\, \eta \qquad \text{в} \quad L_p(Q_T). \tag{49}$$

Учитывая (14), (37)–(46), (49), в равенстве (48) перейдем к пределу при $h,\, \tau \to 0$. В результате получим

$$-\int\limits_0^T \int\limits_\Omega u\, z\, \frac{d\eta}{dt}\, dx\, dt - \int\limits_\Omega u_0\, z\, \eta(0)\, dx + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n a_i(x,u)\, \overline{k}_i\, \frac{\partial z}{\partial x_i}\, \eta\, dx\, dt =$$
$$= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i=0}^n f_i\, \frac{\partial z}{\partial x_i}\, \eta\, dx\, dt. \tag{50}$$

Далее докажем, что функция u имеет обобщенную производную $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ из пространства $L_{p'}(0,T; W_{p'}^{-1}(\Omega))$. С этой целью в (50) выберем функцию $\eta \in C_0^\infty(0,T)$. В результате получим

$$-\int\limits_0^T \left(\int\limits_\Omega u\, z\, dx \right) \frac{d\eta}{dt}\, dt = \int\limits_0^T \left[\int\limits_\Omega \left(\sum_{i=0}^n f_i\, \frac{\partial z}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n a_i(x,u)\, \overline{k}_i\, \frac{\partial z}{\partial x_i} \right) dx \right] \eta\, dt. \tag{51}$$

Поскольку $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$, то равенство (51) будет справедливо для любой функции $z \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$. Из (51) следует, что функция

$$\Phi(t) = \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=0}^n f_i\, \frac{\partial z}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n a_i(x,u)\, \overline{k}_i\, \frac{\partial z}{\partial x_i} \right) dx,$$

принадлежащая пространству $L_{p'}(0,T)$, является обобщенной производной функции $\overline{\Phi}(t) = \displaystyle\int\limits_\Omega uz\, dx$. Следовательно, по определению производной векторозначной функции, функция u имеет обобщенную производную $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L_{p'}(0,T; W_{p'}^{-1}(\Omega))$ и справедливо равенство

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\, z\, \eta\, dx\, dt + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n a_i(x,u)\, \overline{k}_i\, \frac{\partial z}{\partial x_i}\, \eta\, dx\, dt = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega f\, z\, \eta\, dx\, dt, \tag{52}$$

где $z \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$, $\eta \in C_0^\infty(0,T)$.

В силу плотности множества функций

$$\left\{ w \in L_p(0,T; \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)) : w(x,t) = \sum_{k=1}^m z_k(x) \eta_k(t),\ z_k \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega),\ \eta_k \in C_0^\infty(0,T),\ m \in N \right\}$$

в $L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega))$ из (52) следует справедливость равенства

$$\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\, w\, dx\, dt + \int_0^T\int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i(x,u)\,\overline{k}_i\, \frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx\, dt = \int_0^T\int_\Omega \sum_{i=0}^n f_i\, \frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx\, dt \tag{53}$$

для любых $w \in L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega))$.

Докажем далее, что $u(x,0) = u_0(x)$.

Полагая в (53) $w(x,t) = z(x)\eta(t)$, где z – произвольная функция из $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$, η – произвольная функция из $C^\infty(0,T)$ такая, что $\eta(T) = 0$, и, учитывая равенство (50), будем иметь

$$\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\, z\,\eta\, dx\, dt = -\int_0^T\int_\Omega u\, z\, \frac{d\eta}{dt}\, dx\, dt - \int_\Omega u_0\, z\,\eta(0)\, dx.$$

Из этого равенства и формулы интегрирования по частям следует, что

$$\int_\Omega (u_0(x) - u(x,0))\, z(x)\,\eta(0)\, dx = 0 \quad \forall\, z \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega). \tag{54}$$

В силу произвольности функции z из (54) вытекает, что $u_0(x) = u(x,0)$ почти всюду в Ω.

Осталось доказать, что

$$\int_0^T\int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i(x,u)\,\overline{k}_i\, \frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx\, dt = \int_0^T\int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i(x,u)\, k_i(x,\nabla u, Bu)\, \frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx\, dt. \tag{55}$$

Пусть v – снос в точках сетки $\bar\omega_\tau \times \bar\omega$ функции $\bar v \in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$. Рассмотрим неравенство вида

$$[(y-v)_t, \widehat{y} - \widehat{v}] + \frac{1}{2^n}\sum_r \sum_{i=1}^n \Big(a_i(x,y)\big(k_i(x,\nabla_r y, B_h y) - \\ - k_i(x,\nabla_r \widehat{v}, B_h y)\big), \partial_{r_i}(y - \widehat{v})\Big)_r \ge \frac{1}{2\tau}\|\widehat{y} - \widehat{v}\|^2 - \frac{1}{2\tau}\|y - v\|^2, \tag{56}$$

справедливость которого следует из свойства (10) и очевидного соотношения

$$[z_t, \widehat{z}] \ge \frac{1}{2\tau}\|\widehat{z}\|^2 - \frac{1}{2\tau}\|z\|^2 + \frac{\tau}{2}\|z_t\|^2.$$

Учитывая, что y – решение явной разностной схемы, неравенство (56) запишем в виде

$$-[v_t, \widehat{y} - \widehat{v}] + \frac{1}{2^n}\sum_r\sum_{i=1}^n \Big\{ \big(\varphi_{ir}, \partial_{r_i}(\widehat{y} - \widehat{v})\big)_r - \big(a_i(x,y)(k_i(x,\nabla_r\widehat{v}, B_h y), \partial_{r_i}(y - \widehat{v})\big)_r - \\ - \tau\,\big(a_i(x,y)(k_i(x,\nabla_r y, B_h y), \partial_{r_i} y_t\big)_r \Big\} \ge \frac{1}{2\tau}\|\widehat{y} - \widehat{v}\|^2 - \frac{1}{2\tau}\|y - v\|^2.$$

Последнее неравенство умножим на τ, просуммируем от 0 до $T-\tau$, результат, используя процедуру кусочно-постоянного восполнения, запишем в виде

$$\int\limits_{Q_T} \frac{1}{2^n}\sum_r \Big\{ -\Pi^+{}_r(v_t)\,\Pi^+{}_r(\widehat{y}-\widehat{v}) + \sum_{i=1}^n \Big\{ \Pi^+{}_r\varphi_{ir}\,\Pi^+{}_r\partial_{r_i}(\widehat{y}-\widehat{v}) -$$

$$- \Pi^+{}_r a_i(x,y)\,\Pi^+{}_r k_i(x,\nabla_r\widehat{v},B_h y)\,\Pi^+{}_r\partial_{r_i}(y-\widehat{v}) \Big\}\Big\}\,dx\,dt + \sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\,\big|[Ay,y_t]\big| \ge$$

$$\ge -\frac{1}{2}\,\Big\|\,\frac{1}{2^n}\sum_r \Pi_r(y_0-v(0))\,\Big\|^2_{L_2(\Omega)}. \quad (57)$$

Из условия (см. (14)) следует, что при $h\to 0$

$$-\frac{1}{2}\,\Big\|\,\frac{1}{2^n}\sum_r \Pi_r(y_0-v(0))\,\Big\|^2_{L_2(\Omega)} \to -\frac{1}{2}\,\big\|\,u_0-\bar{v}(0))\,\big\|^2_{L_2(\Omega)}. \quad (58)$$

Докажем далее, что

$$\lim_{\tau,h\to 0}\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^2\big|\,[Ay,y_t]\,\big| = 0. \quad (59)$$

Воспользовавшись ограниченностью оператора A (см. (8)) и неравенством Коши–Буняковского, будем иметь

$$J \equiv \sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^2\big|\,[Ay,y_t]\,\big| \le \sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^2\big(d_0\|y(t)\|_{+p}^{(p-1)}+d_1\big)\|y_t\|_{+p} \le$$

$$\le \tau^{1/2}\lambda\left(d_0\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|y(t)\|_{+p}^{2(p-1)}\right)^{1/2} + d_1T^{1/2}\right)\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^2\|y_t\|^2\right)^{1/2}. \quad (60)$$

Если $1<p<2$, то

$$\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|y(t)\|_{+p}^{2(p-1)}\right)^{1/2} \le c_1\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|y(t)\|_{+p}^{p}\right)^{(p-1)/p}.$$

Из последнего неравенства (60) и оценок (16)–(18) вытекает, что

$$J \le c_1\lambda\tau^{1/2}\left(\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|y(t)\|_{+p}^{p}\right)^{(p-1)/p}+1\right)\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^2\|y_t(t)\|^2\right)^{1/2} \le c_2(\tau\lambda^2)^{1/2}. \quad (61)$$

Из неравенства (61) и условия (24) следует (59).

Пусть теперь $p\ge 2$. Используя оценку (24), запишем следующую цепочку неравенств

$$\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|y(t)\|_{+p}^{2(p-1)}\right)^{1/2} = \left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|y(t)\|_{+p}^{p}\|y(t)\|_{+p}^{p-2}\right)^{1/2} \le$$

$$\le \lambda^{p/2-1}\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|y(t)\|_{+p}^{p}\|y(t)\|^{p-2}\right)^{1/2} \le$$

$$\le \lambda^{p/2-1}\max_{t'\in\bar{\omega}_\tau}\|y(t')\|^{p/2-1}\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|y(t)\|_{+p}^{p}\right)^{1/2}. \quad (62)$$

Учитывая оценки (62), (16)–(18), из (60) будем иметь

$$J \le c_1 \lambda^{p/2-1} \tau^{1/2} \left(\max_{t' \in \bar{\omega}_\tau} \|y(t')\|^{p/2-1} \left(\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \|y(t)\|_{+p}^p \right)^{1/2} + 1 \right) \times$$
$$\times \left(\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau^2 \|y_t(t)\|^2 \right)^{1/2} \le c_2 (\tau \lambda^{p-2})^{1/2}.$$

Из последнего неравенства и условия (24) следует (59).

Докажем далее, что

$$\Pi_r^+ \big(a_i(x,y)\, k_i(x, \nabla_r \widehat{v}, B_h y) \big) \;\to\; a_i(x,u)\, k_i(x, \nabla \bar{v}, Bu) \quad \text{в} \quad L_{p'}(Q_T). \tag{63}$$

Обозначим

$$J = \int\limits_{Q_T} \left| \Pi_r^+ \big(a_i(x,y)\, k_i(x, \nabla_r \widehat{v}, B_h y) \big) \;-\; a_i(x,u)\, k_i(x, \nabla \bar{v}, Bu) \right|^{p'} dx\, dt. \tag{64}$$

Используя предельные соотношения (43), (46), гладкость функции $\bar{v}$ и непрерывность $k_i(x, \xi, \nu)$ по каждому из аргументов, нетрудно убедиться в том, что подынтегральная функция в (64) стремится к 0 при $h,\, \tau \to 0$ почти всюду в Q_T. Кроме того, из оценки (8) следует, что

$$\left| \Pi_r^+ \big(a_i(x,y)\, k_i(x, \nabla_r \widehat{v}, B_h y) \big) \;-\; a_i(x,u)\, k_i(x, \nabla \bar{v}, Bu) \right|^{p'} \le$$
$$\le \left(d_0 \sum_{i=1}^n \left\{ \left| \partial_{r_i} \widehat{v} \right|^{p-1} + \left| \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} \right|^{p-1} \right\} + 2\, d_1 \right)^{p'}.$$

Правая часть последнего неравенства в силу гладкости $\bar{v}$ является интегрируемой по Q_T функцией, следовательно, по теореме Лебега о предельном переходе $J \to 0$ при $\tau,\ h \to 0$, то есть (63) справедливо.

Далее, из определения φ_{ir}, гладкости функции $\bar{v}$ и предельных соотношений (37)–(39), (63) следует, что при $h,\, \tau \to 0$

$$\frac{1}{2^n} \sum_r \sum_{i=1}^n \int\limits_{Q_T} \Pi^+{}_r \varphi_{ir}\, \Pi^+{}_r \partial_{r_i} (\widehat{y} - \widehat{v})\; dx\, dt \;=$$
$$= \frac{1}{2^n} \sum_r \sum_{i=1}^n \int\limits_{Q_T} f_i\, \Pi^+{}_r \partial_{r_i} (\widehat{y} - \widehat{v})\; dx\, dt \to \sum_{i=1}^n \int\limits_{Q_T} f_i\, \frac{\partial (u - \bar{v})}{\partial x_i}\, dx\, dt, \tag{65}$$

$$-\frac{1}{2^n} \sum_r \int\limits_{Q_T} \Pi^+{}_r (v_t)\, \Pi^+{}_r (\widehat{y} - \widehat{v})\; dx\, dt \;\to\; -\int\limits_{Q_T} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}\, (u - \bar{v})\, dx\, dt\,, \tag{66}$$

$$\frac{1}{2^n} \sum_r \sum_{i=1}^n \int\limits_{Q_T} \Pi^+{}_r a_i(x,y)\, \Pi^+{}_r k_i(x, \nabla_r \widehat{v}, B_h y)\, \Pi^+{}_r \partial_{r_i} (y - \widehat{v})\, dx\, dt \;\to$$
$$\to \sum_{i=1}^n \int\limits_{Q_T} a_i(x,u) k_i(x, \nabla v, Bu) \frac{\partial (u - \bar{v})}{\partial x_i}\, dx\, dt. \tag{67}$$

Используя предельные соотношения (58), (59), (65)–(67), в неравенстве (57) перейдем к пределу при $h, \tau \to 0$, в результате получим

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial(u-\bar v)}{\partial t}, u-\bar v\right\rangle dt + \int_{Q_T} \sum_{i=1}^n a_i(x,u)\Big(\overline{k}_i \,-\, k_i(x,\nabla \bar v, Bu)\Big)\frac{\partial(u-\bar v)}{\partial x_i}\,dx\,dt \ \geq$$

$$\geq -\frac{1}{2}\,\|\,u_0-\bar v(0))\,\|^2_{L_2(\Omega)}. \quad (68)$$

Напомним, что $\bar v$ – произвольная функция из $C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$. Это множество (см., например, [13][с. 174]) плотно в пространстве

$$W \;=\; \left\{ z\in L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)):\ \frac{\partial z}{\partial t}\in L_{p'}(0,T;W^{-1}_{p'}(\Omega))\right\}.$$

Учитывая это, выберем в (68) $\bar v = u-\lambda w$, где λ – произвольное положительное число, w – произвольная функция из W. В результате получим

$$\lambda\int_0^T \left\langle \frac{\partial w}{\partial t}, w\right\rangle dt + \int_{Q_T} \sum_{i=1}^n a_i(x,u)\Big(\overline{k}_i \,-\, k_i(x,\nabla (u-\lambda w), Bu)\Big)\frac{\partial w}{\partial x_i}\,dx\,dt \ \geq$$

$$\geq -\frac{\lambda}{2}\,\|\,w(0)\,\|^2_{L_2(\Omega)}. \quad (69)$$

Переходя к пределу в неравенстве (69) при $\lambda\to 0$, будем иметь

$$\int_{Q_T} \sum_{i=1}^n a_i(x,u)\Big(\overline{k}_i \,-\, k_i(x,\nabla u, Bu)\Big)\frac{\partial w}{\partial x_i}\,dx\,dt \ \geq\ 0.$$

В силу произвольности функции w из последнего неравенства вытекает равенство (55). Лемма доказана. □

Из лемм 2–4 следует справедливость следующей теоремы

Теорема 1. *Пусть функции* a_i, k_i *удовлетворяют условиям* (7)–(10) *и выполнены условия* (15), (47). *Тогда при любых* $f\in L_q(0,T;W^{-1}_{p'}(\Omega))$, $q=\max\{2,p'\}$, $u_0\in L_2(\Omega)$, $g\in L_{p_1}(\Omega')$, *где выбор параметра* p_1 *подчинен условию* (44), *любая подпоследовательность восполнений решения явной разностной схемы, удовлетворяющая условиям* (37)–(46), *сходится к обобщенному решению задачи* (5), (6).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-00955, 12-01-97022, 12-01-31515).

Summary

O.V. Glazyrina, M.F. Pavlova. Research on the Convergence of an Explicit Difference Scheme for a Parabolic Equation with a Nonlinear Nonlocal Spatial Operator.

We consider the first boundary value problem for a parabolic equation with a spatial operator degenerating with respect to the gradient. This operator also depends on the integral characteristic of the solution. We prove the convergence theorem for an explicit difference scheme under minimal assumptions on the smoothness of the initial data.

Keywords: parabolic equations, monotone operator, nonlocal operator, explicit difference scheme, stability, convergence.

Литература

1. *Дубинский Ю.А.* Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка // Усп. матем наук. – 1968. – Т. 23, Вып. 1. – С. 45–90.
2. *Дубинский Ю.А.* Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях // Матем. сборник. – 1965. – Т. 67, № 4. – С. 609–642.
3. *Raviart P.A.* Sur la résolution de certaines équations paraboliques non linéaires // J. Funct. Anal. – 1970. – V. 5, No 2. – P. 299–328.
4. *Alt H.W., Luckhaus S.* Quasilinear elliptic-parabolic differential equations // Math. Z. – 1983. – Bd. 183, H. 8. – S. 311–341.
5. *Otto F.* L^1-contraction and uniqueness for quasilinear elliptic-parabolic equations // J. Differ. Equations. – 1996. – V. 131, No 1. – P. 20–38.
6. *Федотов Е.М.* Об одном классе двухслойных нелинейных операторно-разностных схем с весами // Изв. вузов. Матем. – 1995. – № 4.– С. 739–752.
7. *Масловская Л.В.* О сходимости разностных методов для некоторых вырождающихся квазилинейных уравнений параболического типа // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1972. – Т. 12, № 6. – С. 1444–1455.
8. *Майорова М.Е., Павлова М.Ф.* О сходимости явных разностных схем для одного вариационного неравенства теории нестационарной фильтрации // Изв. вузов. Матем. – 1997. – № 7. – С. 53–65.
9. *Chipot M., Molinet L.* Asymptotic behavior of some nonlocal diffusion problems // Appl. Anal. – 2001. – V. 80, No 3–4. – P. 279–315.
10. *Chipot M., Lovat B.* Existence and uniqueness results for a class of nonlocal elliptic and parabolic problems // Dynam. Cont. Dis. Ser. A. – 2001. – V. 8, No 1. – P. 35–51.
11. *Pavlova M.F.* On the solvability of nonlocal nonstationary problems with double degeneration // Differ. Equations. – 2011. – V. 47, No 8. – P. 1161–1175.
12. *Glazyrina O.V., Pavlova M.F.* The unique solvability of a certain nonlocal nonlinear problem with a spatial operator strongly monotone with respect to the gradient // Russ. Math. (Iz. VUZ). – 2012. – No 3. – P. 83–86.
13. *Гаевский Х., Грегер К., Захареас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

Поступила в редакцию
30.09.13

Глазырина Ольга Владимировна – аспирант кафедры вычислительной математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *glazyrina-olga@ya.ru*

Павлова Мария Филипповна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *mpavlova@kpfu.ru*