УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2019, Т. 161, кн. 4 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 543–551 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 519.87 doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.543-551

СТРАТЕГИИ КОНСТАНТНОГО РЕБАЛАНСИРОВАНИЯ С НАИМЕНЬШИМ РИСКОМ

М.Д. Миссаров, Е.П. Шустова

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

В работе изучены числовые характеристики стратегий константного ребалансирования портфеля из одного безрискового и двух рисковых активов. Константное ребалансирование означает, что текущий капитал в конце каждого периода распределяется по всем активам следующего периода в одних и тех же пропорциях, при этом не допускается ввод и вывод капитала из инвестиционного процесса. В предложенной модели непрерывные процентные ставки рисковых активов в разные периоды независимы друг от друга, но задаются одинаковым двумерным гауссовским распределением для всех периодов. Построен алгоритм вычисления стратегии константного ребалансирования с заданным математическим ожиданием конечного капитала и минимальной дисперсией этого капитала.

Ключевые слова: стратегия константного ребалансирования, непрерывные процентные ставки, гауссовское и логнормальное двумерные распределения, математическое ожидание и дисперсия конечного капитала

Введение

В настоящей работе мы исследуем стратегии константного ребалансирования портфеля из трех активов в течение n последовательных одинаковых временных периодов при некоторых модельных предположениях на поведение курсов этих активов. Под одним временным периодом мы понимаем месяц, квартал, год. Предполагается, что перевод капитала из одного актива в другой может производиться только в конце очередного периода перед началом следующего.

Пусть S_0 – начальный капитал, который инвестируется в три актива, один из которых – безрисковый, а два других – рисковые. Актив называется безрисковым, если за один период времени он вырастает неслучайным образом. Если в безрисковый актив вложена величина A_0, то за один период капитал вырастает в e^{r_0} раз: $A_1 = A_0 e^{r_0}$. Здесь мы используем понятие непрерывного процента r_0, общепринятого в литературе по финансовой математике [1]. Предполагается, что на протяжении всех n периодов процентная ставка r_0 не меняется, так что в конце последнего n-го периода капитал, вложенный в безрисковый актив, станет равным $A_n = A_0 e^{r_0 n}$. Актив называется рисковым, если сумма B_0, вложенная в него, за один период изменяется случайным образом: $B = B_0\eta_1$, где η_1 – случайная величина.

Предположим, что безрисковая процентная ставка равна r_0, а процентные ставки двух рисковых активов равны ς_1 и ς_2 соответственно, где пара случайных величин $(\varsigma_1, \varsigma_2)$ задается двумерным гауссовским распределением $N(\mu, \Sigma)$, вектор средних значений величин $(M\varsigma_1, M\varsigma_2) = \mu = (\mu_1, \mu_2)$, а матрица ковариаций есть

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

где $\sigma_i^2 = D\varsigma_i$ – дисперсия величины ς_i, $i = 1, 2$, ρ – коэффициент корреляции между ς_1 и ς_2.

Если B_0 и C_0 – капиталы, вложенные в первый и второй рисковые активы, соответственно, то в конце первого периода они изменятся следующим образом: $B_1 = B_0\eta_1$, $C_1 = C_0\eta_2$, где пара случайных величин $\eta_1 = e^{\varsigma_1}$, $\eta_2 = e^{\varsigma_2}$ имеет двумерное логнормальное распределение $\Lambda_2(\mu, \Sigma)$ [2].

В качестве примера в роли безрискового актива можно взять банковсий депозит в рублях, а в качестве рисковых активов – суммы в евро и долларах. Предполагается, что рублевая сумма хранится на депозите под непрерывную процентную ставку r_0, а процентные ставки ς_1 и ς_2 колеблются около средних значений μ_1 и μ_2 как гауссовские случайные величины с матрицей ковариаций Σ и коррелируют друг с другом.

Стратегия константного ребалансирования [3] задается вектором $a = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, где $\alpha_i \geq 0$, $i = 0, 1, 2$, $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Здесь α_0 – доля текущего капитала, вкладываемая в 0-й (безрисковый) актив в начале каждого периода, α_1 и α_2 – доли текущего капитала, вкладываемые соответственно в 1-й и 2-й рисковые активы в начале каждого периода. Предполагается, что все активы измеряются в единицах 0-го актива по текущему курсу и капитал из любого актива может быть переведен в любой другой без транзакционных издержек.

Кроме того, предполагается, что ввод дополнительного капитала или вывод капитала из инвестиционного процесса не допускается. Такие стратегии называются самофинансируемыми [1].

Пусть S_i – значение капитала в конце i-го периода, $i = 1, 2, \ldots n$. Тогда мы получаем соотношения

$$S_i = \left(\alpha_0 e^{r_0} + \alpha_1 \eta_1^{(i)} + \alpha_2 \eta_2^{(i)}\right) S_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots n.$$

Предполагается, что все пары случайных величин $\eta_1^{(i)}$, $\eta_2^{(i)}$ имеют двумерное логнормальное распределение $\Lambda_2(\mu, \Sigma)$ с одними и теми же числовыми характеристиками и набор случайных пар $\left(\eta_1^{(1)}, \eta_2^{(1)}\right), \left(\eta_1^{(2)}, \eta_2^{(2)}\right), \ldots \left(\eta_1^{(n)}, \eta_2^{(n)}\right)$ является набором независимых случайных пар.

Обозначим $\xi^{(i)}(a) = \alpha_0 e^{r_0} + \alpha_1 \eta_1^{(i)} + \alpha_2 \eta_2^{(i)}$. Тогда $\xi^1(a), \ldots, \xi^n(a)$ являются независимыми случайными величинами, и значение всего капитала в конце n-го периода зависит от стратегии a

$$S_n(a) = \left(\prod_{i=1}^{n} \xi^{(i)}(a)\right) S_0.$$

Множество всех векторов $a = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ образует двумерный симплекс Δ и в дальнейшем мы будем отождествлять множество всех стратегий константного ребалансирования с множеством Δ.

Заметим, что поскольку все случайные величины $\xi^{(i)}(a)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ имеют одинаковое распределение, то

$$MS_n(a) = \left(\prod_{i=1}^{n} M\xi^{(i)}(a)\right) S_0 = \left(M\xi^{(1)}(a)\right)^n S_0,$$

где

$$M\xi^{(1)}(a) = \alpha_0 e^{r_0} + \alpha_1 M\eta_1^{(1)} + \alpha_2 \eta_2^{(1)}. \tag{1}$$

Величины $\eta_1^{(i)}$ и $\eta_2^{(i)}$ имеют логнормальные распределения с параметрами (μ_1, σ_1^2) и (μ_2, σ_2^2) соответственно.

В этом случае (см. [2]) $M\eta_1^{(1)} = \exp(r_1)$, $M\eta_2^{(1)} = \exp(r_2)$, где $r_1 = \mu_1 + \dfrac{1}{2}\sigma_1^2$, $r_2 = \mu_2 + \dfrac{1}{2}\sigma_2^2$.

Если мы ставим задачу нахождения константной ребалансированной стратегии с максимальным значением математического ожидания конечного капитала, то, как видно из формулы (1), нужно вычислить $\max\{r_0, r_1, r_2\}$ и вложить весь капитал в тот актив, на котором достигается этот максимум.

1. Стратегии константного ребалансирования с наименьшим риском

Рассмотрим следующую задачу: при фиксированном математическом ожидании капитала в конце периода n найти стратегию константного ребалансирования с наименьшей дисперсией этого капитала. В финансовой математике стандартное отклонение (квадратный корень из дисперсии) доходности инвестиции называется риском этой инвестиции [4, 5]. Поэтому минимизация дисперсии конечного капитала эквивалентна минимизации риска инвестиционной стратегии. Таким образом, мы решаем задачу: при условии

$$MS_n(a) = K \tag{2}$$

найти

$$\arg\min_{a\in\Delta} DS_n(a). \tag{3}$$

Из условия независимости и одинаковой распределенности случайных величин $\xi^{(1)}(a), \dots \xi^{(n)}(a)$ следует,что

$$MS_n(a) = \left(M\xi^{(1)}(a)\right)^n S_0 = K,$$

$$\begin{aligned} DS_n(a) &= MS_n^2(a) - (MS_n(a))^2 = \\ &= M\left(\xi^{(1)}(a)\dots\xi^{(n)}(a)\right)^2 S_0^2 - K^2 = \left(M\left(\xi^{(1)}(a)\right)^2\right)^n S_0^2 - K^2. \end{aligned}$$

Так как $M\xi^{(1)}(a) = (K/S_0)^{1/n}$, задача (2), (3) эквивалентна задаче: при условии

$$M\xi^{(1)}(a) = m, \quad m = (K/S_0)^{1/n} \tag{4}$$

найти

$$\arg\min_{a\in\Delta} M(\xi^{(1)}(a))^2. \tag{5}$$

Так как $M(\xi^{(1)}(a))^2 = D\xi^{(1)}(a) + (M\xi^{(1)}(a))^2$, задача (4), (5) эквивалентна задаче: при условии $M\xi^{(1)}(a) = m$, найти

$$\arg\min_{a\in\Delta} D\xi^{(1)}(a).$$

Таким образом, построение стратегии константного ребалансирования с заданным математическим ожиданием конечного капитала и наименьшей дисперсией этого капитала для n периодов в условиях нашей модели сводится к построению такой стратегии для одного периода.

Если случайный вектор (η_1, η_2) имеет двумерное логнормальное распределение $\Lambda_2(\mu, \Sigma)$ с параметрами $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ и матрицей ковариаций

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

то математические ожидания величин η_1 и η_3 равны (см. [2]):

$$M\eta_1 = \exp(\mu_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2), \quad M\eta_2 = \exp(\mu_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2),$$

дисперсии этих величин равны

$$D\eta_1 = \exp(2\mu_1 + \sigma_1^2)\{\exp(\sigma_1^2) - 1\}, \quad D\eta_2 = \exp(2\mu_2 + \sigma_2^2)\{\exp(\sigma_2^2) - 1\},$$

а ковариация величин η_1 и η_3 равна

$$Cov(\eta_1, \eta_2) = \exp\left(\mu_1 + \mu_2 + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\right)\{\exp(\rho\sigma_1\sigma_2) - 1\}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered} m_0 = e^r, \quad m_1 = \exp(\mu_1 + \frac{1}{2}\,\sigma_1^2), \quad m_2 = \exp(\mu_2 + \frac{1}{2}\,\sigma_2^2), \\ z_1 = \exp(\sigma_1^2) - 1, \quad z_2 = \exp(\sigma_2^2) - 1, \quad z_{12} = \exp(\rho\sigma_1\sigma_2) - 1, \\ d_1 = \frac{m_1 - m_0}{m_2 - m_0}\cdot\frac{m_2}{m_1}z_2 - z_{12}, \quad d_2 = \frac{m_2 - m_0}{m_1 - m_0}\cdot\frac{m_1}{m_2}z_1 - z_{12}. \end{gathered} \tag{6}$$

В дальнейшем мы будем опускать верхний индекс в обозначении случайной величины $\xi^{(1)}(a):\ \xi^{(1)}(a) \equiv \xi(a)$.

Естественно предположить, что $m > m_0$, так как в противном случае существует стратегия $a = (1, 0, 0)$ (то есть $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$), для которой $M\xi(a) = m_0 \geq m$, $D\xi(a) = 0$.

Без ограничения общности будем считать, что $m_2 > m_1$. Тогда интересным является случай, когда $m_2 > m_0$. Если $m_0 \geq m_2$, то опять стратегия $a = (1, 0, 0)$ имеет среднее значение $M\xi(a) = m_0$ с дисперсией $D\xi(a) = 0$. Другими словами, вложение всего капитала в безрисковый актив дает большее среднее значение капитала, чем любая стратегия, имеющая ненулевые доли рисковых активов. В случае $m_0 \geq m_2$ максимально достижимое значение $M\xi(a)$ по всем константным стратегиям равно m_0, и поэтому, при $m > m_0$ задача не имеет решения.

В настоящей работе мы рассмотрим случай, когда $m_2 > m_1 > m_0$. Вариант, когда $m_0 = m_1$, является более простым, и здесь мы его опустим.

Теорема 1. *Пусть $m_2 > m_1 > m_0$, $m > m_0$ и выполнены следующие условия:*

$$\rho \leq \frac{1}{\sigma_1\sigma_2}\left(1 + \ln\left(\min\left\{\frac{(m_1 - m_0)}{(m_2 - m_0)}\cdot\frac{m_2}{m_1}z_2, \quad \frac{(m_2 - m_0)}{(m_1 - m_0)}\cdot\frac{m_1}{m_2}z_1\right\}\right)\right) \tag{7}$$

и

$$m \leq \min\left\{m_1 + (m_1 - m_0)\frac{d_2}{d_1},\ m_2 + (m_2 - m_0)\frac{d_1}{d_2},\right.$$
$$\left. m_0 + \frac{(m_1 - m_0)(m_2 - m_0)(d_1 + d_2)}{d_1(m_2 - m_0) + d_2(m_1 - m_0)}\right\}. \tag{8}$$

Тогда стратегией, удовлетворяющей условию $M\xi(a) = m$ и имеющей наименьшую дисперсию, будет являться стратегия $a^0 = (\alpha_0^0, \alpha_1^0, \alpha_2^0)$, где

$$\alpha_1^0 = \frac{(m - m_0)}{(m_1 - m_0)}\cdot\frac{d_1}{d_1 + d_2}, \quad \alpha_2^0 = \frac{(m - m_0)}{(m_2 - m_0)}\cdot\frac{d_2}{d_1 + d_2}, \quad \alpha_0^0 = 1 - \alpha_1^0 - \alpha_2^0.$$

Доказательство. Пусть $a = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$. Решим сначала задачу вида: при $M\xi(a) = m$, найти $\arg\min D\xi(a)$ при условии

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1. \tag{9}$$

В этом случае доли капиталов могут принимать и отрицательные значения. Используя введенные обозначения (6), условие $M\xi(a) = M(\alpha_0 e^{r_0} + \alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2) = m$ можем переписать в виде

$$\alpha_0 m_0 + \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 = m, \tag{10}$$

а дисперсию – в виде

$$D\xi(a) = \alpha_1^2 D\eta_1 + \alpha_2^2 D\eta_2 + 2\alpha_1\alpha_2 Cov(\eta_1, \eta_2) = \\ = \alpha_1^2 m_1^2 z_1 + \alpha_2^2 m_2^2 z_2 + 2\alpha_1\alpha_2 m_1 m_2 z_{12}.$$

Решив уравнения (9), (10), получим $\alpha_2 = c_0 - c_1\alpha_1$, где $c_0 = \dfrac{m - m_0}{m_2 - m_0}$, $c_1 = \dfrac{m_1 - m_0}{m_2 - m_0}$. Тогда

$$D\xi(a) = \alpha_1^2 \left(D\eta_1 + c_1^2 D\eta_2 - 2c_1 Cov(\eta_1, \eta_2)\right) + \\ + 2\alpha_1 \left(c_0 Cov(\eta_1, \eta_2) - c_0 c_1 D\eta_2\right) + c_0^2 D\eta_2, \tag{11}$$

где $Cov(\eta_1, \eta_2)$ – ковариация величин η_1, η_2.

Обозначим функцию в правой части соотношения (11) через $f(\alpha_1)$. Легко видеть, что минимум квадратичной функции f достигается в точке

$$\alpha_1^0 = \frac{c_0(c_1 D\eta_2 - Cov(\eta_1, \eta_2))}{D\eta_1 + c_1^2 D\eta_2 - 2c_1 Cov(\eta_1, \eta_2)}.$$

Используя обозначения (6), после ряда преобразований получим, что минимум функции $D\xi(a)$ при условиях (9), (10) достигается в точке $a^0 = (\alpha_0^0, \alpha_1^0, \alpha_2^0)$, где

$$\alpha_1^0 = \frac{m - m_0}{m_1 - m_0} \cdot \frac{d_1}{d_1 + d_2}, \quad \alpha_2^0 = \frac{m - m_0}{m_2 - m_0} \cdot \frac{d_2}{d_1 + d_2}, \quad \alpha_0^0 = 1 - \alpha_1^0 - \alpha_2^0.$$

Если точка a^0 попадает в симплекс Δ, то получим решение поставленной задачи. Необходимо проверить выполнение следующих условий: $0 \le \alpha_1^0 \le 1$, $0 \le \alpha_2^0 \le 1$, а также

$$\alpha_1^0 + \alpha_2^0 \le 1. \tag{12}$$

Заметим, что

$$d_1 + d_2 = \frac{m_1 - m_0}{m_2 - m_0} \cdot \frac{m_2}{m_1} z_2 + \frac{m_2 - m_0}{m_2 - m_0} \cdot \frac{m_1}{m_2} z_1 - 2z_{12} \ge 0,$$

так как $m_2 > m_1 > m_0$, то

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m_1 - m_0}{m_2 - m_0} \cdot \frac{m_2}{m_1} z_2 + \frac{m_2 - m_0}{m_2 - m_0} \cdot \frac{m_1}{m_2} z_1\right) \ge (z_1 z_2)^{1/2}$$

и

$$z_1 z_2 = \left(\exp(\sigma_1^2) - 1\right) \left(\exp(\sigma_2^2) - 1\right) \ge (exp(\rho\sigma_1\sigma) - 1)^2$$

при любом $\rho \le 1$.

Так как $m_1 > m_0$, то условия $\alpha_1^0 \geq 0$ и $\alpha_2^0 \geq 0$ эквивалентны условиям $d_1 \geq 0$ и $d_2 \geq 0$, которые, в свою очередь, эквивалентны условиям

$$z_{12} \leq \frac{m_1 - m_0}{m_2 - m_0} \cdot \frac{m_2}{m_1} z_2 \tag{13}$$

и

$$z_{12} \leq \frac{m_2 - m_0}{m_1 - m_0} \cdot \frac{m_1}{m_2} z_1. \tag{14}$$

Используя выражения (6) для величин $z_1,\ z_2,\ z_{12}$, получим, что условия (13), (14) выполнены тогда и только тогда, когда

$$\rho \leq \frac{1}{\sigma_1\sigma_2}\left(1 + \ln\left(\min\left\{\frac{m_1 - m_0}{m_2 - m_0} \cdot \frac{m_2}{m_1} z_2, \frac{m_2 - m_0}{m_1 - m_0} \cdot \frac{m_1}{m_2} z_1\right\}\right)\right). \tag{15}$$

Проверим теперь, что выполнены условия

$$\alpha_1^0 \leq 1, \quad \alpha_2^0 \leq 1. \tag{16}$$

Так как $m_1 > m_0,\ m_2 > m_0$ и $d_1 > 0,\ d_2 > 0$, то условия (16) эквивалентны неравенству

$$m \leq \min\left\{m_1 + (m_1 - m_0)\frac{d_2}{d_1},\ m_2 + (m_2 - m_0)\frac{d_1}{d_2}\right\}. \tag{17}$$

Наконец, рассмотрим условие (12). Заметим, что

$$\alpha_1^0 + \alpha_2^0 = \frac{m - m_0}{m_1 - m_0} \cdot \frac{d_1}{d_1 + d_2} + \frac{m - m_0}{m_2 - m_0} \cdot \frac{d_2}{d_1 + d_2} = \frac{m - m_0}{d_1 + d_2}\left(\frac{d_1}{m_1 - m_0} + \frac{d_2}{m_2 - m_0}\right).$$

Следовательно, условие выполняется $\alpha_1^0 + \alpha_2^0 \leq 1$ тогда и только тогда, когда

$$m \leq \frac{(m_1 - m_0)(m_2 - m_0)(d_1 + d_2)}{d_1(m_2 - m_0) + d_2(m_1 - m_0)} + m_0. \tag{18}$$

Таким образом, при выполнении условий (15), (17), (18) точка a^0 попадает в симплекс Δ, и стратегией, минимизирующей дисперсию $D\xi(a)$ при фиксированном значении $M\xi(a) = m$, будет стратегия a^0. Теорема доказана. □

Если же условия (7), (8) теоремы 1 не выполняются, то такую стратегию надо искать на границе симплекса Δ, потому что точка a^0 единственного глобального минимума функции $D\xi(a)$ при условиях (9), (10) не принадлежит симплексу.

Теорема 2. *Пусть не выполнено хотя бы одно из условий* (7), (8) *теоремы* 1. *Рассмотрим три стратегии*

$$a^1 = \left(\frac{m_2 - m}{m_2 - m_0}, 0, \frac{m - m_0}{m_2 - m_0}\right),$$

$$a^2 = \left(\frac{m_1 - m}{m_1 - m_0}, \frac{m - m_0}{m_1 - m_0}, 0\right),$$

$$a^3 = \left(0, \frac{m_2 - m}{m_2 - m_1}, \frac{m - m_1}{m_2 - m_1}\right).$$

Тогда

$$D\xi(a^1) = \left(\frac{m - m_0}{m_2 - m_0}\right)^2 m_2^2\ z_2$$

$$D\xi(a^2) = \left(\frac{m - m_0}{m_1 - m_0}\right)^2 m_1^2\ z_1,$$

$$D\xi(a^3) = \left(\frac{m_2 - m_0}{m_2 - m_1}\right)^2 m_1^2\ z_1 + \left(\frac{m - m_1}{m_2 - m_1}\right)^2 m_2^2\ z_2 + 2\frac{m_2 - m}{m_2 - m_1}\cdot\frac{m - m_1}{m_2 - m_1} m_1 m_2\ z_{12}.$$

При $m_1 \le m \le m_2$ *стратегией, удовлетворяющей условию* $M\xi(a) = m$ *и имеющей наименьшую дисперсию, будет являться стратегия*

$$a^* = \arg\min\{D\xi(a^1), D\xi(a^3)\},$$

а при $m < m_1$ *такой стратегией будет*

$$a^* = \arg\min\{\mathrm{D}\xi(\mathrm{a}^1), \mathrm{D}\xi(\mathrm{a}^2)\}.$$

Доказательство. Если хотя бы одно из условий (7), (8) теоремы 1 не выполняется, то стратегии с минимальной дисперсией надо искать на границе симплекса Δ, так как функция $D\xi(a)$ при условиях (9), (10) имеет единственный минимум и он лежит вне симплекса. Действительно, если стратегия с минимальной дисперсией лежала бы внутри симплекса, то функция $D\xi(a)$ имела бы еще один локальный минимум внутри симплекса Δ, что противоречит единственности минимума функции $D\xi(a)$.

Указанные выше границы задаются тремя отрезками

$$I_1 = \{a \in \Delta : \alpha_1 = 0, \alpha_0 + \alpha_2 = 1\},$$

$$I_2 = \{a \in \Delta : \alpha_2 = 0, \alpha_0 + \alpha_1 = 1\},$$

$$I_3 = \{a \in \Delta : \alpha_0 = 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}.$$

Пусть $a \in I_1$. Тогда из условий $\alpha_0 + \alpha_2 = 1$ и $\alpha_0 m_0 + \alpha_2 m_2 = m$ следует, что

$$\alpha_0 = \frac{m_2 - m}{m_2 - m_0}, \quad \alpha_2 = \frac{m - m_0}{m_2 - m_0}. \tag{19}$$

Поскольку $\alpha_2 \le 1$, формулы (19) накладывают на параметр m дополнительное ограничение $m \le m_2$.

Рассмотрим стратегию

$$a^1 = \left(\frac{m_2 - m}{m_2 - m_0}, 0, \frac{m - m_0}{m_2 - m_0}\right).$$

Тогда дисперсия этой стратегии равна

$$D\xi(a^1) = \left(\frac{m_2 - m}{m_2 - m_0}\right)^2\ m_2^2\ z_2.$$

Если $a \in I_2$, то стратегией, удовлетворяющей условиям (9), (10), является стратегия

$$a^2 = \left(\frac{m_1 - m}{m_1 - m_0}, \frac{m - m_0}{m_1 - m_0}, 0\right).$$

При этом на параметр m должно быть наложено условие $m \le m_1$.

Дисперсия этой стратегии равна

$$D\xi(a^2) = \left(\frac{m - m_0}{m_1 - m_0}\right)^2 \, m_1^2 \, z_1.$$

Если $a \in I_3$, то стратегией, удовлетворяющей условиям (9), (10), является стратегия

$$a^3 = \left(0, \frac{m_2 - m}{m_2 - m_1}, \frac{m - m_1}{m_2 - m_1}\right).$$

При этом на параметр m должно быть наложено условие $m_1 \leq m \leq m_2$.

Дисперсия этой стратегии равна

$$D\xi(a^3) = \left(\frac{m_2 - m_0}{m_2 - m_1}\right)^2 m_1^2 \, z_1 + \left(\frac{m - m_1}{m_2 - m_1}\right)^2 m_2^2 \, z_2 + 2\frac{m_2 - m}{m_2 - m_1} \cdot \frac{m - m_1}{m_2 - m_1} \, m_1 \, m_2 \, z_{12}.$$

Теорема доказана. □

Вместе теоремы 1 и 2 описывают алгоритм построения стратегии константного ребалансирования с заданным математическим ожиданием конечного капитала и наименьшим возможным риском.

Литература

1. *Shiryaev A.N.* Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory. – World Sci., 1999. – 852 p. – doi: 10.1142/3907.

2. Lognormal Distributions: Theory and Application / Ed. by E.L. Crow, K. Shimizu. – N. Y.; Basel: Marsel Dekker, 1987. – XIV, 387 p.

3. *Li B., Hoi S.C.H.* Online portfolio selection: A survey // ACM Comput. Surv. – 2014. – V. 46, No 3. – Art. 35, P. 1–36. – doi: 10.1145/2512962.

4. *Миссаров М.Д.* Введение в финансовую математику. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2010. – 68 с.

5. *Connor G., Goldberg L.R., Korajczyk R.A.* Portfolio Risk Analysis. – Princeton: Princeton Univ. Press, 2010. – 400 p. – doi: 10.1515/9781400835294.

Поступила в редакцию
25.07.19

Миссаров Мукадас Дмухтасибович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой анализа данных и исследования операций

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *moukadas.missarov@kpfu.ru*

Шустова Евгения Петровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры анализа данных и исследования операций

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *evgeniyashustova@yandex.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA. SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2019, vol. 161, no. 4, pp. 543–551

doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.543-551

Constant Rebalancing Strategies with Minimal Risk

M.D. Missarov, E.P. Shustova***

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: **moukadas.missarov@kpfu.ru*, ***evgeniyashustova@yandex.ru*

Received July 25, 2019

Abstract

The numerical characteristics of constant rebalancing strategies for a portfolio of one risk-free and two risky assets were studied. Constant rebalancing means that the current capital at the end of each period is distributed over all assets of the next period in the same (constant) proportions. In this case, the input and output of the capital from the investment process is not allowed. In the proposed model, the continuous interest rates of risky assets in different periods are independent of each other and determined by the same two-dimensional Gaussian distribution for all periods. An algorithm for constructing the constant rebalancing strategy with a given mathematical expectation of capital at the end of the last period and a minimal variance of this capital was developed.

Keywords: constant rebalancing strategy, continuous interest rates, Gaussian and lognormal two-dimensional distributions, mathematical expectation and variance of terminal capital

References

1. Shiryaev A.N. *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory.* World Sci., 1999. 852 p. doi: 10.1142/3907.
2. Crow E.L., Shimizu K. (Eds.) *Lognormal Distributions: Theory and Application.* New York, Basel, Marsel Dekker, 1987. XIV, 387 p.
3. Li B., Hoi S.C.H. Online portfolio selection: A survey. *ACM Comput. Surv.*, 2014, vol. 46, no. 3, art. 35, pp. 1–36. doi: 10.1145/2512962.
4. Missarov M.D. *Vvedenie v finansovuyu matematiku* [Introduction to Financial Mathematics]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 2010. 68 p. (In Russian)
5. Connor G., Goldberg L.R., Korajczyk R.A. *Portfolio Risk Analysis.* Princeton, Princeton Univ. Press, 2010. 400 p. doi: 10.1515/9781400835294.

***Для цитирования*:** *Миссаров М.Д., Шустова Е.П.* Стратегии константного ребалансирования с наименьшим риском // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2019. – Т. 161, кн. 4. – С. 543–551. – doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.543-551.

***For citation*:** Missarov M.D., Shustova E.P. Constant rebalancing strategies with minimal risk. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 161, no. 4, pp. 543–551. doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.543-551. (In Russian)