

УДК 539.3

## ОБОБЩЕННАЯ ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

*Е.Ю. Михайлова<sup>1</sup>, Д.В. Тарлаковский<sup>1,2</sup>, Г.В. Федотенков<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, 125993, Россия*

<sup>2</sup>*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, 119192, Россия*

### Аннотация

Предложена обобщенная линейная модель динамики тонкой упругой оболочки постоянной толщины, учитывающая поворот и обжатие нормального к срединной поверхности оболочки волокна. Используется система координат, включающая криволинейные координаты срединной поверхности и отсчитываемая от срединной поверхности в направлении внешней нормали расстояние (нормальная координата). Найдены связи пространственных метрики и ковариантных производных с аналогичными параметрами срединной поверхности.

Поле перемещений оболочки и все характеристики рассматриваются в линейном приближении по нормальной координате. Показано, что перемещения любой точки оболочки определяются тангенциальными и нормальными перемещениями срединной поверхности, двумя углами поворота нормального волокна и его деформацией, а деформированное состояние оболочки задается тензорами тангенциальной деформации и изменения кривизны и деформацией нормального волокна. С помощью линеаризации уравнений совместности деформаций для сплошной среды получены три аналогичных уравнения для тонкой оболочки. Для их построения использовано квадратичное приближение перемещений.

Получены формулы для потенциальной и кинетической энергии, а также для работы внешних сил. Показано, что учет поворота нормального волокна и обжатия приводит к появлению дополнительных внутренних силовых факторов – дополнительного момента и нормальной силы. При этом к стандартным внешним силовым факторам добавлены распределенные моменты. Физический закон построен для анизотропного материала, обладающего симметрией относительно срединной поверхности без принятия обычно используемой статической гипотезы о ненадавливании волокон.

Уравнения движения построены с помощью принципа Гамильтона и состоят из шести тензорных соотношений. Из этого принципа выведены и естественные граничные условия. Показано, из построенной модели как частные случаи вытекают модели Кирхгофа – Лява и типа Тимошенко.

**Ключевые слова:** упругая оболочка, поворот и обжатие нормального волокна, анизотропия, уравнения движения, совместность деформаций

### Введение

Основы теории пластин и оболочек были заложены в XIX–XX вв. крупными учеными в области математики и механики, среди которых О. Коши, С. Пуассон, Б. де Сен Венан, Г. Кирхгоф. В 1874 г. Г. Ароном впервые была предпринята попытка вывода уравнений теории оболочек из уравнений теории упругости на основе метода Кирхгофа. Рождение современной теории оболочек связано с работами А. Лява, А. Бэссета и Х. Лэмба. В дальнейшее развитие теории оболочек большой вклад внесли С.А. Амбарцумян, В.В. Болотин, И.Н. Векуа, В.З. Власов,

И.И. Ворович, К.З. Галимов, А.Л. Гольденвейзер, Э.И. Григолюк, Н.А. Кильчевский, А.И. Лурье, Х.М. Муштари, В.В. Новожилов, П.М. Огибалов, Ю.Н. Работнов, С.П. Тимошенко, К.Ф. Черных, И.Я. Штаерман, П.М. Нахди, Э. Рейсснер и другие видные ученые. Подробные обзоры становления и развития классической теории оболочек даны, например, в монографиях [1, 2].

Очевидно, что в условиях современного развития науки и технологий прикладное значение теории оболочек будет только усиливаться. В современных конструкциях все более широкое применение находят композитные, синтетические и другие неметаллические материалы. Отличительной особенностью этих материалов является повышенная податливость при сдвиговых деформациях. При этом даже небольшие по величине касательные напряжения существенно влияют на общую деформацию. Расчет пластин и оболочек из таких материалов по классическим теориям может приводить к большим погрешностям [1, 3].

Уточненные теории необходимо использовать при расчетах трехслойных пластин и оболочек, состоящих, как правило, из тонких несущих слоев и слоя заполнителя между ними [4–6]. Здесь для получения точных результатов решения необходимо учитывать эффекты обжатия и сдвига в заполнителе.

Отметим еще нестационарные задачи, связанные с проблемами распространения волн, вызванных быстроизменяющейся нагрузкой, и нестационарные контактные задачи, которые также требуют привлечения теорий, более точных, чем классическая теория Кирхгофа – Лява [7–9].

Еще одним бурно развивающимся в настоящее время направлением является наномеханика, объекты изучения которой имеют наноразмерную структуру. Основной сложностью при разработке теорий, адекватно описывающих механическое поведение наноразмерных структур, является то, что их механические свойства существенно отличаются от свойств привычной сплошной среды. Это происходит потому, что при уменьшении размера частиц доля атомов, расположенных на их поверхности, и их вклад в свойства объекта становятся существенными и растут с дальнейшим уменьшением размеров. На этом размерном уровне может также начать проявляться действие законов квантовой механики. Следует отметить, что многие нанобъекты по своим геометрическим параметрам близки к стержням, пластинам и оболочкам. Поэтому современная наука находится в активном поиске новых уточненных теорий пластин и оболочек, способных описать механику наноструктур. Например, в работе [10] авторами предлагается учесть влияние поверхностного натяжения, которое проявляется у нанобъектов, для уточнения их свойств.

Из вышеизложенного совершенно ясно, что с фундаментальной точки зрения процесс развития теорий оболочек нельзя считать законченным, поскольку в технике непрерывно возникают новые конструкции, расчет которых в рамках существующих вариантов теорий оказывается невозможным. В этой связи естественными направлениями развития стали неклассические теории оболочек с учетом сдвиговых деформаций и поперечного обжатия [11–18], а также нелинейные теории оболочек [19–22]. Из уточненных линейных теорий пластин и оболочек наибольшее распространение получили следующие.

Теория Тимошенко – Рейсснера, разработанная Э. Рейсснером на основе идей С.П. Тимошенко [11], учитывает сдвиг и инерцию нормального к срединной поверхности оболочки волокна. Уточненные динамические теории, основанные на модели С.П. Тимошенко, представлены в обзоре [1].

Для анизотропных оболочек широкое применение нашли теории С.А. Амбарцумяна. Первая из них [12] основана на гипотезах, предложенных В.В. Новожиловым [23]. Вторая теория, разработанная этим ученым, является итерационной.

В ее основе заложены более жесткие гипотезы [13]. В ней пренебрегается поперечной деформацией и поперечным нормальным напряжением, а при определении деформаций сдвига используются касательные напряжения, определяемые по классической теории Кирхгофа – Лява.

Заслуживает внимания также уточненная итерационная теория оболочек В.А. Родионовой, Б.Ф. Титаева и К.Ф. Черныха, представленная в работе [17]. Она основана на гипотезах о том, что поперечные нормальные и касательные напряжения распределены по толщине по кубическому и квадратичному законам соответственно; нормальные и тангенциальные составляющие вектора перемещений распределены по толщине оболочки по законам полинома второй и третьей степени соответственно. При построении теории напряжения и перемещения определяются в виде рядов по полиномам Лежандра от координаты, отсчитываемой вдоль нормали к срединной поверхности.

Для расчета оболочек средней толщины применяется уточненная теория О.М. Паляя О.М., В.Е. Спиро [18]. В ее основе заложена гипотеза прямой нормали и предположение о том, что косинус угла наклона нормальных к срединной поверхности деформированной оболочки волокон равен осредненному углу поперечного сдвига.

В настоящей работе с общих позиций анизотропии и материала и без введения дополнительных гипотез, кроме гипотезы прямой нормали, изложена обобщенная математическая теория оболочек с учетом сдвига и поперечного обжатия. Выведены основные энергетические соотношения, уравнения движения, начальные и граничные условия. Впервые получены уравнения совместности деформаций для обобщенного варианта теории оболочек.

### 1. Геометрия и метрика оболочки

Рассматривается тонкая оболочка толщины  $h$  с гладкой ориентированной срединной поверхностью ( $\mathbf{r}$  – радиус-вектор в  $\mathbb{R}^3$ )

$$\Pi : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\xi^1, \xi^2), \quad (\xi^1, \xi^2) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

ограниченной кривой

$$\Gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}_\Gamma(\tau) = \mathbf{r}_0(\xi^1(\tau), \xi^2(\tau)), \quad (\xi^1(\tau), \xi^2(\tau)) \in \partial D, \quad \tau \in [\alpha, \beta].$$

Толщина оболочки полагается малой:

$$h/\lambda \ll 1, \quad \lambda = \min(d, R_{1*}, R_{2*}), \quad d = \sup_{A, B \in \Gamma} \inf_{\widehat{AB} \subset \Pi} |\widehat{AB}|, \quad R_{k*} = \inf_{M \in \Pi} R_k(M),$$

где  $R_k(M)$  – главные радиусы кривизны поверхности  $\Pi$  в точке  $M$ .

Ковариантный базис  $\mathfrak{e}_j$ , компоненты  $g_{ij}$  метрического тензора соответствующего риманова пространства и единичный нормальный вектор  $\mathbf{n}$  внешней нормали к поверхности  $\Pi$  определяются стандартным образом [24] (все латинские индексы здесь и далее принимают значения 1, 2):

$$\mathfrak{e}_j = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \xi^j}, \quad g_{ij} = (\mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_j), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}, \quad \mathbf{N} = [\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2]. \quad (1)$$

В занимаемой оболочкой области  $G \subset \mathbb{R}^3$  с границей  $\partial G = \Pi_- \cup \Pi_+ \cup \Pi_b$ , где  $\Pi_+$ ,  $\Pi_-$  и  $\Pi_b$  – внешняя, внутренняя и боковая поверхности, вводим криволинейные координаты  $\xi^1, \xi^2, z$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\xi^1, \xi^2) + z\mathbf{n}(\xi^1, \xi^2), \quad (\xi^1, \xi^2) \in D, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}. \quad (2)$$

Отсюда с использованием (1) и деривационных уравнений [25] находим пространственный базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . (здесь и далее по повторяющимся латинским индексам проводится суммирование от 1 до 2):

$$\mathbf{e}_j = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^j} = q_j^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{n}, \quad q_j^i = \delta_j^i - z b_j^i, \quad (3)$$

где  $\delta_j^i$  – символ Кронекера;  $b_j^i$  – компоненты тензора кривизны срединной поверхности.

Этому базису соответствует пространственный метрический тензор

$$\tilde{g}_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{ij} - 2b_{ij}z, \quad \tilde{g}_{13} = \tilde{g}_{23} = 0, \quad \tilde{g}_{33} = 1, \quad (4)$$

третий инвариант  $\tilde{g}$  которого связан со вторым инвариантом  $g$  тензора  $g_{ij}$  следующим образом:

$$\tilde{g} = \det(\tilde{g}_{ij})_{2 \times 2} = 1 - 4Hz, \quad g = \det(g_{ij})_{2 \times 2}. \quad (5)$$

Здесь и далее, если не оговорено противное, отбрасываются слагаемые со степенями  $z$  и  $h$  выше первой, и приближенные равенства заменяются точными.

С учетом этого соглашения обращаем равенства (3) и находим контравариантные компоненты пространственного метрического тензора:

$$\mathfrak{e}_j = p_j^i \mathbf{e}_i, \quad p_j^i = \delta_j^i + z b_j^i, \quad \tilde{g}^{ij} = g^{ij} + 2z b^{ij}. \quad (6)$$

Граничные поверхности оболочки определяются равенствами

$$\Pi_{\pm} : \mathbf{r} = \mathbf{r}_{\pm}(\xi^1, \xi^2) = \mathbf{r}_0(\xi^1, \xi^2) \pm \frac{h}{2} \mathbf{n}, \quad (\xi^1, \xi^2) \in D, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Pi_b : \mathbf{r} = \mathbf{r}_b(\tau, z) = \mathbf{r}_{\Gamma}(\tau) + z \mathbf{n}(\xi^1(\tau), \xi^2(\tau)), \\ (\xi^1, \xi^2) \in \partial D, \quad \tau \in [\alpha, \beta], \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Соответствующие им ковариантные базисы, компоненты метрических тензоров и их вторые инварианты находятся по формулам

$$\mathfrak{e}_{\pm i} = \mathbf{e}_i|_{z=\pm h/2}, \quad g_{\pm ij} = (\mathfrak{e}_{\pm i}, \mathfrak{e}_{\pm j}) = \tilde{g}_{ij}|_{z=\pm h/2}, \quad (9)$$

$$g_{\pm} = \det(g_{\pm ij})_{2 \times 2} = (1 \mp 2Hh)g,$$

$$\mathfrak{e}_{b1} = \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial t} = \mathbf{e}_i \xi^{i'}, \quad \mathfrak{e}_{b2} = \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial z} = \mathbf{n}, \quad (10)$$

$$g_{b11} = (\mathfrak{e}_{b1}, \mathfrak{e}_{b1}) = \tilde{g}_{ij} \xi^{i'} \xi^{j'}, \quad g_{b12} = 0, \quad g_{b22} = 1, \quad g_b = \det(g_{bij}) = g_{b11},$$

где штрихами обозначены производные по параметру  $\tau$ ;  $H = (b_1^1 + b_2^2)/2$  – средняя кривизна поверхности  $\Pi$ .

## 2. Деформированное состояние оболочки

Прежде всего отметим, что из записанных выше соотношений вытекают используемые далее следующие связи между координатами  $\tilde{u}_i, \tilde{u}_3$  и  $\hat{u}_i, \hat{u}_3$  вектора перемещений, а также между компонентами  $\tilde{d}_{ij}, \tilde{d}_{i3}, \tilde{d}_{3i}, \tilde{d}_{33}$  и  $\hat{d}_{ij}, \hat{d}_{i3}, \hat{d}_{3i}, \hat{d}_{33}$  тензора дисторсии в базисах  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$  и  $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathbf{n}$  соответственно [24]:

$$\tilde{u}_j = q_j^i \hat{u}_i = \hat{u}_j - z b_j^i \hat{u}_i, \quad \tilde{u}^3 = \hat{u}^3 = \tilde{u}_3 = \hat{u}_3 = u_3;$$

$$\begin{aligned} \hat{d}_{kl} &= p_k^i p_l^j \tilde{d}_{ij} = \tilde{d}_{kl} + z \left( b_k^i \tilde{d}_{il} + b_l^j \tilde{d}_{kj} \right), \\ \hat{d}_{k3} &= p_k^i \tilde{d}_{i3} = \tilde{d}_{k3} + z b_k^i \tilde{d}_{i3}, \quad \hat{d}_{3k} = p_k^i \tilde{d}_{3i} = \tilde{d}_{3k} + z b_k^i \tilde{d}_{3i}, \quad \hat{d}_{33} = \tilde{d}_{33} = d_{33}. \end{aligned} \tag{11}$$

Кроме того, вычисляем компоненты тензора дисторсии в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$  [24]:

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{ij} &= \tilde{\nabla}_i \tilde{u}_j = \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \xi^i} - \tilde{\Gamma}_{ij}^k \tilde{u}_k - \tilde{\Gamma}_{ij}^3 u_3, \quad \tilde{d}_{i3} = \tilde{\nabla}_i u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial \xi^i} - \tilde{\Gamma}_{i3}^k \tilde{u}_k - \tilde{\Gamma}_{i3}^3 u_3, \\ \tilde{d}_{3i} &= \tilde{\nabla}_3 \tilde{u}_i = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial z} - \tilde{\Gamma}_{3i}^k \tilde{u}_k - \tilde{\Gamma}_{3i}^3 u_3, \quad \tilde{d}_{33} = \tilde{\nabla}_3 u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial z} - \tilde{\Gamma}_{33}^k \tilde{u}_k - \tilde{\Gamma}_{33}^3 u_3. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k, \tilde{\Gamma}_{ij}^3, \tilde{\Gamma}_{i3}^k, \tilde{\Gamma}_{i3}^3$  и  $\tilde{\Gamma}_{33}^3$  – символы Кристоффеля второго рода. Находим их, определяя сначала с использованием (4) и деривационных уравнений символы Кристоффеля первого рода:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ij,m} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{g}_{im}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial \tilde{g}_{jm}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial \xi^m} \right) = \Gamma_{ij,m} - z \left( \nabla_j b_{im} + 2\Gamma_{ij}^k b_{km} \right), \\ \tilde{\Gamma}_{ij,3} &= b_{ij} - z c_{ij}, \quad \tilde{\Gamma}_{i3,m} = -\tilde{\Gamma}_{im,3}, \quad \tilde{\Gamma}_{33,i} = \tilde{\Gamma}_{i3,3} = \tilde{\Gamma}_{33,3} = 0, \quad c_{ij} = b_i^k b_{kj}, \end{aligned}$$

где  $\Gamma_{ij,m}$  и  $\Gamma_{ij}^k$  – символы Кристоффеля в пространстве, соответствующем срединной поверхности.

В результате в силу (4) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ij}^k &= \tilde{g}^{km} \tilde{\Gamma}_{ij,m} = \Gamma_{ij}^k - z \nabla_i b_j^k, \\ \tilde{\Gamma}_{ij}^3 &= \tilde{g}^{33} \tilde{\Gamma}_{ij,3} = b_{ij} - z c_{ij}, \quad \tilde{\Gamma}_{i3}^3 = \tilde{\Gamma}_{33}^3 = \tilde{\Gamma}_{33}^3 = 0, \quad \tilde{\Gamma}_{i3}^k = \tilde{g}^{km} \tilde{\Gamma}_{i3,m} = -b_i^k - z c_i^k. \end{aligned} \tag{13}$$

Подставляя теперь (13) в (12), приходим к равенствам

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{ij} &= \nabla_i \hat{u}_j - b_{ij} u_3 + z \left( c_{ij} u_3 - b_i^k \nabla_k \hat{u}_j \right), \\ \tilde{d}_{i3} &= \frac{\partial u_3}{\partial \xi^i} + b_i^k \hat{u}_k, \quad \tilde{d}_{3i} = \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial z} - z b_i^k \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial z}, \quad \tilde{d}_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z}. \end{aligned}$$

Их использование в (11) приводит к следующим формулам для компонент тензора дисторсии в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$ :

$$\begin{aligned} \hat{d}_{ij} &= \nabla_i \hat{u}_j - b_{ij} u_3 + z \left( b_i^k \nabla_k \hat{u}_j - c_{ij} u_3 \right), \\ \hat{d}_{i3} &= \frac{\partial u_3}{\partial \xi^i} + b_i^k \hat{u}_k + z \left( b_i^k \frac{\partial u_3}{\partial \xi^k} + c_i^l \hat{u}_l \right), \quad \hat{d}_{3i} = \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial z}, \quad \hat{d}_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z}. \end{aligned} \tag{14}$$

Далее, с учетом малости толщины оболочки раскладываем  $\hat{u}_j$  и  $\hat{u}_3$  в степенные ряды по  $z$ , ограничиваясь линейным приближением:

$$\hat{u}_i = u_i(\xi^1, \xi^2) + \psi_i(\xi^1, \xi^2) z, \quad u_3 = w(\xi^1, \xi^2) + \psi_3(\xi^1, \xi^2) z. \tag{15}$$

Отметим, что эти равенства соответствуют гипотезе прямой нормали с учетом ее поворота. При этом определяемый равенствами

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + z(\boldsymbol{\psi} + \psi_3 \mathbf{n}), \quad \mathbf{u}_0 = u_i \mathbf{e}^i + w \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\psi} = \psi_i \mathbf{e}^i \tag{16}$$

вектор  $\mathbf{u}$  есть вектор перемещений точек оболочки. Здесь  $\mathbf{u}_0$  – вектор перемещений срединной поверхности,  $u_i$  и  $w$  – тангенциальные и нормальное перемещения, а, как достаточно просто показать, координаты вектора  $\boldsymbol{\psi}$  определяют угол между нормальными волокнами в деформированном и недеформированном состояниях.

Используя теперь формулы (14) и (15), находим компоненты тензора деформаций [24]

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2} (\hat{d}_{ij} + \hat{d}_{ji}) = \varepsilon_{ij} + z\kappa_{ij}, & \hat{\varepsilon}_{33} &= \hat{d}_{33} = \psi_3, \\ \hat{\varepsilon}_{i3} &= \frac{1}{2} (\hat{d}_{i3} + \hat{d}_{3i}) = \frac{1}{2}\theta_i + \frac{1}{2}z (b_i^k \theta_k + \nabla_i \psi_3),\end{aligned}\quad (17)$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (\alpha_{ij} + \alpha_{ji}), & \kappa_{ij} &= \frac{1}{2} (\beta_{ij} + \beta_{ji}), \\ \alpha_{ij} &= \nabla_i u_j - b_{ij} w, & -\vartheta_i &= \frac{\partial w}{\partial \xi^i} + b_i^k u_k, & \theta_k &= \psi_k - \vartheta_k, \\ \beta_{ij} &= \nabla_i \psi_j - b_{ij} \psi_3 + b_i^k \nabla_k u_j - c_{ij} w = \nabla_i \psi_j - b_{ij} \psi_3 + b_i^k \alpha_{kj}.\end{aligned}\quad (18)$$

Таким образом, поле перемещений и деформированное состояние оболочки полностью определяется следующими кинематическими параметрами:  $u_1, u_2, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3$  и  $\varepsilon_{ij}, \kappa_{ij}$ .

Отсюда следует, что величина  $\psi_3$  есть относительное удлинение нормального волокна («обжатие» оболочки). Нетрудно показать, что координаты вектора  $\boldsymbol{\theta} = \theta_i \boldsymbol{\varepsilon}^i$  определяют угол между нормальным вектором и материальным волокном в деформированном состоянии. Несложно также убедиться в том, что тензоры  $\varepsilon_{ij}$  и  $\kappa_{ij}$  характеризуют изменения метрического тензора и тензора кривизны срединной поверхности. Поэтому будем использовать следующую терминологию:  $\varepsilon_{ij}$  и  $\kappa_{ij}$  – тензоры тангенциальных деформаций и изменения кривизны.

Из построенных кинематических соотношений в качестве вариантов получаются наиболее распространенные модели оболочек. При  $\psi_3 = 0$  получаем модель типа Тимошенко, а если дополнительно положить  $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ , то приходим к модели Кирхгофа–Лява (см., например, [2]).

### 3. Уравнения совместности деформаций оболочки

Для построения уравнений совместности деформаций оболочки используем соответствующие уравнения механики сплошной среды для малых деформаций в принятых выше обозначениях [24]:

$$\tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_k \tilde{\varepsilon}_{jl} + \tilde{\nabla}_j \tilde{\nabla}_l \tilde{\varepsilon}_{ik} = \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_l \tilde{\varepsilon}_{jk} + \tilde{\nabla}_j \tilde{\nabla}_k \tilde{\varepsilon}_{il}, \quad (19)$$

где совокупность индексов  $ijkl$  принимает значения 1212, 1313, 2323, 1223, 1213, 1323.

Для получения искомого результата необходимо деформации  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$  выразить через кинематические параметры оболочки. С этой целью сначала аналогично (11) находим их связь с деформациями  $\hat{\varepsilon}_{ij}$  в базисе  $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \mathbf{n}$  (напомним, что все операции выполняются с точностью до линейных по  $z$  слагаемых)

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \hat{\varepsilon}_{ij} - z (b_j^n \hat{\varepsilon}_{in} + b_i^m \hat{\varepsilon}_{mj}), \quad \tilde{\varepsilon}_{i3} = \hat{\varepsilon}_{i3} - z b_i^m \hat{\varepsilon}_{m3}, \quad \tilde{\varepsilon}_{33} = \hat{\varepsilon}_{33},$$

а затем, используя (16), получаем равенства

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} + z (\nu_{ij} - b_j^n \varepsilon_{in}), \quad 2\tilde{\varepsilon}_{i3} = \theta_i + z \nabla_i \psi_3, \quad \tilde{\varepsilon}_{33} = \psi_3, \quad \nu_{ij} = \kappa_{ij} - b_i^m \varepsilon_{mj}. \quad (20)$$

После подстановки этих соотношений в (19) приходим к равенству нулю линейных по переменной  $z$  функций, что эквивалентно равенству нулю коэффициентов при  $z^0$  и  $z^1$ . Однако в соотношения (19) при  $ijkl = 1313, 2323, 1323$  входят вторые производные по  $z$ . Поэтому равенства (19) не могут быть удовлетворены в рамках

используемого линейного приближения. Нельзя считать также справедливыми вытекающие из уравнений (19) при  $ijkl = 1223, 1213$  равенства коэффициентов при  $z^1$ , поскольку в этих соотношениях присутствуют первые производные по  $z$ .

Следовательно, можно рассматривать только четыре уравнения: два соотношения, следующие из (19) при  $ijkl = 1212$ , и два уравнения, вытекающие из равенства коэффициентов при  $z^0$  в случаях  $ijkl = 1223, 1213$ . Для оценки возможности точного удовлетворения этим уравнениям, в отличие от (15), (17), будем учитывать члены второго порядка по  $z$  (приближенное равенство по-прежнему заменяется точным):

$$\hat{u}_i = u_i + \psi_i z + \frac{1}{2} \psi_{i2} z^2, \quad u_3 = w + \psi_3 z + \frac{1}{2} \psi_{32} z^2. \quad (21)$$

Данное представление, вообще-то, противоречит использованным выше линейным приближениям. Однако оно находится в рамках традиционных допущений теории оболочек, и, кроме того, позволяет по крайней мере убедиться в том, что коэффициенты при  $z^2$  не будут входить в окончательный результат.

Используя (21), получаем следующую модификацию равенств (20):

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} + z(\nu_{ij} - b_j^n \varepsilon_{in}), \quad 2\tilde{\varepsilon}_{i3} = \theta_i + z(\nabla_i \psi_3 + \psi_{i2}), \quad \tilde{\varepsilon}_{33} = \psi_3 + \psi_{32} z.$$

Теперь, используя правила ковариантного дифференцирования и формулы (13), находим необходимые первые производные:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_j \tilde{\varepsilon}_{kl} &= A_{jkl} + zB_{jkl} - \frac{1}{2} z(b_{jk} \psi_{l2} + b_{jl} \psi_{k2}), \\ \tilde{\nabla}_j \tilde{\varepsilon}_{k3} &= A_{jk3} + zB_{jk3} + z\left(\frac{1}{2} \nabla_j \psi_{k2} - b_{jk} \psi_{32}\right), \\ \tilde{\nabla}_j \tilde{\varepsilon}_{33} &= A_{j33} + zB_{j33} + z(\nabla_j \psi_{32} + b_j^m \psi_{m2}), \\ \tilde{\nabla}_3 \tilde{\varepsilon}_{kl} &= A_{3kl} + zB_{3kl}, \quad \tilde{\nabla}_3 \tilde{\varepsilon}_{k3} = A_{3k3} + zB_{3k3} + \frac{1}{2}(\psi_{k2} + z b_k^m \psi_{m2}). \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} A_{jkl} &= \nabla_j \varepsilon_{kl} - \frac{1}{2}(b_{jk} \theta_l + b_{jl} \theta_k), \\ B_{jkl} &= \nabla_j(\nu_{lk} - b_k^n \varepsilon_{ln}) + \varepsilon_{ml} \nabla_j b_k^m + \varepsilon_{km} \nabla_j b_l^m + \frac{1}{2}(c_{jk} \theta_l + c_{jl} \theta_k - b_{jk} \nabla_l \psi_3 - b_{jl} \nabla_k \psi_3), \\ A_{3kl} &= \kappa_{kl}, \quad B_{3kl} = b_k^m \nu_{lm} + b_l^m \nu_{km}, \quad A_{jk3} = b_j^m \varepsilon_{km} + \frac{1}{2} \nabla_j \theta_k - b_{jk} \psi_3, \\ B_{jk3} &= b_j^m \nu_{km} + \frac{1}{2}(\nabla_j \nabla_k \psi_3 + \theta_m \nabla_j b_k^m) + c_{jk} \psi_3, \\ A_{j33} &= 2A_{3j3} = \nabla_j \psi_3 + b_j^m \theta_m, \quad B_{j33} = 2B_{3j3} = b_j^m \nabla_m \psi_3 + c_j^m \theta_m. \end{aligned}$$

Далее вычисляем вторые ковариантные производные

$$\begin{aligned} \nabla_i \tilde{\nabla}_j \tilde{\varepsilon}_{kl} &= G_{ijkl} + zD_{ijkl} - zF_{ijkl}, \quad \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_j \tilde{\varepsilon}_{k3} = G_{ijk3} + zD_{ijk3} + E_{ijk3} + zF_{ijk3}, \\ \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_3 \tilde{\varepsilon}_{kl} &= G_{i3kl} + zD_{i3kl} + E_{i3kl} + zF_{i3kl}, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} G_{ijkl} &= \nabla_i A_{jkl} - b_{ij} A_{3kl} - b_{ik} A_{j l 3} - b_{il} A_{j k 3}, \\ D_{ijkl} &= \nabla_i B_{jkl} + \nabla_i b_j^m A_{mkl} + \nabla_i b_k^m A_{jml} + \nabla_i b_l^m A_{jkm} + \\ &\quad + c_{ij} A_{3kl} + c_{ik} A_{j l 3} + c_{il} A_{j k 3} - b_{ij} B_{3kl} - b_{ik} B_{j l 3} - b_{il} B_{j k 3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{ijk3} &= \nabla_i A_{jk3} + b_i^m A_{jkm} - b_{ij} A_{3k3} - b_{ik} A_{j33}, \\
D_{ijk3} &= \nabla_i B_{jk3} + A_{mk3} \nabla_i b_j^m + A_{jm3} \nabla_i b_k^m + c_i^m A_{jkm} + b_i^m B_{jkm} + \\
&\quad + c_{ij} A_{3k3} + c_{ik} A_{j33} - b_{ij} B_{3k3} - b_{ik} B_{j33}, \\
G_{i3kl} &= \nabla_i A_{3kl} + b_i^m A_{mkl} - b_{ik} A_{33l} - b_{il} A_{33k}, \\
D_{i3kl} &= \nabla_i B_{3kl} + c_i^m A_{mkl} + b_i^m B_{mkl} + A_{3ml} \nabla_k b_i^m + A_{3km} \nabla_l b_i^m + \\
&\quad + c_{ik} A_{33l} + c_{il} A_{33k} - b_{ik} B_{33l} - b_{il} B_{33k}, \\
F_{ijkl} &= -\frac{1}{2} [b_{ik} \nabla_j \psi_{l2} + b_{il} \nabla_j \psi_{k2} + \nabla_i (b_{jk} \psi_{l2} + b_{jl} \psi_{k2})] + (b_{ik} b_{jl} + b_{il} b_{jk}) \psi_{32}, \\
E_{ijk3} &= -\frac{1}{2} b_{ij} \psi_{k2}, \quad E_{i3kl} = -\frac{1}{2} (b_{ik} \psi_{l2} + b_{il} \psi_{k2}), \quad F_{i3kl} = -\frac{1}{2} (b_{ik} b_l^m + b_{il} b_k^m) \psi_{m2}, \\
F_{ijk3} &= \frac{1}{2} [\nabla_i \nabla_j \psi_{k2} - (b_i^m b_{jk} + b_{ij} b_k^m + 2b_{ik} b_j^m) \psi_{m2}] - [\nabla_i (b_{jk} \psi_{32}) + b_{ik} \nabla_j \psi_{32}].
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что для коэффициентов в (23) справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
F_{1122} + F_{2211} - F_{1212} - F_{2112} &\neq 0, \\
E_{1223} + E_{2312} - E_{1322} - E_{2213} &= 0, \quad E_{2113} + E_{1321} - E_{2311} - E_{1123} = 0,
\end{aligned}$$

из которых вытекает, что среди четырех уравнений, два из которых получаются из (19) при  $ijkl = 1212$ , и два, вытекающих из равенства коэффициентов при  $z^0$  в уравнениях (19) при  $ijkl = 1223, 1213$ , удовлетворяются только три соотношения. Они являются следствием равенства коэффициентов при  $z^0$  в этих уравнениях:

$$\begin{aligned}
G_{1122} + G_{2211} - G_{1212} - G_{2112} &= 0, \\
G_{1223} + G_{2312} - G_{1322} - G_{2213} &= 0, \quad G_{2113} + G_{1321} - G_{2311} - G_{1123} = 0.
\end{aligned}$$

Подстановка сюда соответствующих равенств из (22) и (23) с использованием дериационных уравнений приводит трем уравнениям совместности деформаций:

$$K_n(\varepsilon_{ij}, \kappa_{kl}) + L_n(\theta_i, \psi_3) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned}
K_0(\varepsilon_{ij}, \kappa_{kl}) &= \nabla_1 (\nabla_1 \varepsilon_{22} - \nabla_2 \varepsilon_{12}) + \nabla_2 (\nabla_2 \varepsilon_{11} - \nabla_1 \varepsilon_{12}) - l_b(\kappa_{ij}) + gK\varepsilon, \\
K_1(\varepsilon_{ij}, \kappa_{kl}) &= \nabla_2 \nu_{21} - \nabla_1 \nu_{22} + b_2^1 (\nabla_1 \varepsilon_{12} - \nabla_2 \varepsilon_{11}) - b_1^1 (\nabla_1 \varepsilon_{22} - \nabla_2 \varepsilon_{12}), \\
K_2(\varepsilon_{ij}, \kappa_{kl}) &= \nabla_1 \nu_{12} - \nabla_2 \nu_{11} + b_1^2 (\nabla_2 \varepsilon_{12} - \nabla_1 \varepsilon_{22}) - b_2^2 (\nabla_2 \varepsilon_{11} - \nabla_1 \varepsilon_{12}), \\
l_b(x_{ij}) &= b_{22} x_{11} - b_{12} (x_{12} + x_{21}) + b_{11} x_{22}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{kl} g^{kl}, \\
L_0(\theta, \psi_3) &= l_b(\nabla_i \theta_j) - 2gK\psi_3, \\
L_1(\theta, \psi_3) &= -gK\theta^1 + \frac{1}{2} \nabla_2 (\nabla_1 \theta_2 - \nabla_2 \theta_1) + b_{12} \nabla_2 \psi_3 - b_{22} \nabla_1 \psi_3, \\
L_2(\theta, \psi_3) &= -gK\theta^2 + \frac{1}{2} \nabla_1 (\nabla_2 \theta_1 - \nabla_1 \theta_2) + b_{12} \nabla_1 \psi_3 - b_{11} \nabla_2 \psi_3.
\end{aligned}$$

Здесь  $\varepsilon$  – первый инвариант тензора тангенциальных деформаций, а  $K$  – гауссова кривизна срединной поверхности, которая связана с тензором кривизны так [25]:

$$gK = b_{11} b_{22} - b_{12}^2.$$

Отметим, что при  $\theta = \mathbf{0}$  и  $\psi_3 = 0$  из (24) вытекают известные уравнения совместности деформаций для модели оболочки Кирхгофа – Лява [2].



4. Энергетические характеристики и работа внешних сил

Полагаем, что материал оболочки – однородный и процессы деформирования являются изотермическими или адиабатическими. Выражения для потенциальной и кинетической энергий оболочки, а также для работы внешних сил получим, отталкиваясь от соответствующих формул для трехмерного тела, с использованием предположения о малости толщины. При этом тройные интегралы в криволинейной системе координат  $\xi^1, \xi^2, z$  (2) от функции  $f$  в соответствии со спецификой области  $G$  сводим к повторным интегралам и, учитывая связь (5) инвариантов метрических тензоров, приходим к поверхностному интегралу

$$\begin{aligned} \iiint_G f(M) dV &= \iint_D \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 \int_{-h/2}^{h/2} (1 - 2Hz) f(\xi^1, \xi^2, z) dz = \\ &= \iint_{\Pi} dS \int_{-h/2}^{h/2} f(\xi^1, \xi^2, z) dz. \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда для потенциальной энергии оболочки получаем

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \iint_{\Pi} dS \int_{-h/2}^{h/2} (\hat{\sigma}^{ij} \hat{\varepsilon}_{ij} + 2\hat{\sigma}^{i3} \hat{\varepsilon}_{i3} + \hat{\sigma}^{33} \hat{\varepsilon}_{33}) dz = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\Pi} \left[ \hat{T}^{ij} \varepsilon_{ij} + M^{ij} \kappa_{ij} + \hat{Q}^i \theta_i + \mu^i (b_i^k \theta_k + \nabla_i \psi_3) + \hat{N} \psi_3 \right] dS, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{T}^{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \hat{\sigma}^{ij} dz, & M^{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \hat{\sigma}^{ij} dz, & \hat{Q}^i &= \int_{-h/2}^{h/2} \hat{\sigma}^{i3} dz, \\ \mu^i &= \int_{-h/2}^{h/2} z \hat{\sigma}^{i3} dz, & \hat{N} &= \int_{-h/2}^{h/2} \hat{\sigma}^{33} dz. \end{aligned}$$

Здесь  $\hat{\sigma}^{ij}, \hat{\sigma}^{i3}, \hat{\sigma}^{33}$  – компоненты тензора напряжений;  $\hat{T}^{ij}$  и  $M^{ij}$  – тензоры тангенциальных усилий и моментов,  $\hat{Q}^i$  и  $\mu^i$  – векторы перерезывающих усилий и дополнительных моментов, а  $\hat{N}$  – нормальное усилие.

Аналогично с использованием формулы (16) находим кинетическую энергию оболочки

$$E = \frac{\rho}{2} \iint_{\Pi} dS \int_{-h/2}^{h/2} (\dot{\mathbf{u}}_0 + \dot{\psi}z)^2 dz = \frac{\rho}{2} \iint_{\Pi} \left[ h (\dot{u}_i \dot{u}^i + \dot{w}^2) + I (\dot{\psi}_i \dot{\psi}^i + \dot{\psi}_3^2) \right] dS, \quad (27)$$

где  $\rho$  – плотность материала, точками обозначены производные по времени  $t$ ,  $I = h^3/12$ .

Работа действующих на оболочку внешних объемных  $\mathbf{F} = \hat{F}^j \mathbf{e}_j + F_3 \mathbf{n}$  и поверхностных  $\mathbf{P} = \hat{P}^j \mathbf{e}_j + P_3 \mathbf{n}$  сил для трехмерного тела записывается в виде [24]

$$A = \rho \iiint_G (\mathbf{F}, \mathbf{u}) dV + \iint_{\Pi_+} (\mathbf{P}, \mathbf{u}) dS + \iint_{\Pi_-} (\mathbf{P}, \mathbf{u}) dS + \iint_{\Pi_b} (\mathbf{P}, \mathbf{u}) dS.$$

Для преобразования первого слагаемого используем равенство (25), а поверхностные интегралы от функции  $f$  преобразовываем аналогичным образом с использованием (6)–(10):

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi_{\pm}} f(M) dS &= \iint_D f(\xi^1, \xi^2, \pm h/2) \sqrt{g_{\pm}} d\xi^1 d\xi^2 = \iint_{\Pi} f(M) dS, \\ \iint_{\Pi_b} f(M) dS &= \int_{\alpha}^{\beta} dt \int_{-h/2}^{h/2} f[\xi^1(\tau), \xi^2(\tau), z] \sqrt{g_b} dz = \int_{\Gamma} ds \int_{-h/2}^{h/2} f(\xi^1, \xi^2, z) dz. \end{aligned}$$

В результате приходим к равенству

$$A = \iint_{\Pi} (q^i u_i + m^i \psi_i + m \psi_3) dS + \int_{\Gamma} (T_{(0)}^i u_i + M_{(0)}^i \psi_i + Q_{(0)} w + \mu_{(0)} \psi_3) ds, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} q^i &= q_F^i + q_+^i + q_-^i, & m^i &= m_F^i + m_+^i + m_-^i, \\ q &= q_F + q_+ + q_-, & m &= m_F + m_+ + m_-, \\ q_F^i &= \rho \int_{-h/2}^{h/2} \hat{F}^i dz, & q_F &= \rho \int_{-h/2}^{h/2} \hat{F}_3 dz, & m_F^i &= \rho \int_{-h/2}^{h/2} z \hat{F}^i dz, & m_F &= \rho \int_{-h/2}^{h/2} z \hat{F}_3 dz, \\ q_{\pm}^i &= \hat{P}^i \Big|_{z=\pm h/2}, & q_{\pm} &= \hat{P}^3 \Big|_{z=\pm h/2}, & m_{\pm}^i &= \pm \frac{h}{2} q_{\pm}^i, & m_{\pm} &= \pm \frac{h}{2} q_{\pm}, \\ T_{(0)}^i &= \int_{-h/2}^{h/2} P^i \Big|_{\Gamma} dz, & M_{(0)}^i &= \int_{-h/2}^{h/2} z P^i \Big|_{\Gamma} dz, & Q_{(0)} &= \int_{-h/2}^{h/2} P_3 dz, & \mu_{(0)} &= \int_{-h/2}^{h/2} z P_3 dz. \end{aligned}$$

Здесь  $q^i \mathbf{e}_i + q \mathbf{n}$  и  $m^i \mathbf{e}_i + m \mathbf{n}$  – векторы поверхностных давления и отнесенных к единице площади моментов;  $T_{(0)}^i$  и  $M_{(0)}^i$  – касательные усилия и моменты относительно срединной поверхности, а  $Q_{(0)}$  и  $\mu_{(0)}$  – перерезывающее усилие и момент от него на боковой поверхности.

### 5. Физический закон для оболочки

Материал оболочки полагаем упругим анизотропным и обладающий симметрией относительно срединной поверхности, что эквивалентно следующим равенствам для компонентов тензора упругих постоянных [26] (символ, указывающий на их соответствие базису  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$ , значок здесь и далее):

$$C^{ijk3} = C^{i3kl} = C^{i333} = C^{33k3} = 0. \quad (29)$$

Достаточно просто показывается, что аналогичные соотношения имеют место и в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$ .

В предположении (29) закон Гука принимает следующий вид:

$$\hat{\sigma}^{ij} = C^{ijkl} \hat{\varepsilon}_{kl} + C^{ij33} \hat{\varepsilon}_{33}, \quad \hat{\sigma}^{i3} = 2C^{i3k3} \hat{\varepsilon}_{k3}, \quad \hat{\sigma}^{33} = C^{33kl} \hat{\varepsilon}_{kl} + C^{3333} \hat{\varepsilon}_{33}.$$

Подставляя сюда соотношения (17), получаем закон изменения напряжений по толщине оболочки:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^{ij} &= C^{ijkl} (\varepsilon_{kl} + z \kappa_{kl}) + C^{ij33} \psi_3, & \hat{\sigma}^{33} &= C^{33kl} (\varepsilon_{kl} + z \kappa_{kl}) + C^{3333} \psi_3, \\ \hat{\sigma}^{i3} &= C^{i3k3} [\theta_k + z (b_k^n \theta_n + \nabla_k \psi_3)]. \end{aligned}$$

Совместное рассмотрение этих равенств с формулами (17) приводит к физическому закону для оболочки

$$\begin{aligned} \hat{T}^{ij} &= h (C^{ijkl} \varepsilon_{kl} + C^{ij33} \psi_3), \quad M^{ij} = IC^{ijkl} \kappa_{kl}, \quad \hat{Q}^i = hC^{i3k3} \theta_k, \\ \mu^i &= IC^{i3k3} (b_k^i \theta_l + \nabla_k \psi_3), \quad \hat{N} = h (C^{33kl} \varepsilon_{kl} + C^{3333} \psi_3). \end{aligned} \quad (30)$$

### 6. Начально-краевая задача для оболочки

Для построения начально-краевой задачи для оболочки используем вариационное уравнение Гамильтона:

$$\delta H = \int_{t_1}^{t_2} (\delta I - \delta E) dt = 0, \quad \delta I = \delta W - \delta A, \quad \delta \mathbf{u}|_{t=t_1} = \delta \mathbf{u}|_{t=t_2} = \mathbf{0}, \quad (31)$$

где символ “ $\delta$ ” означает вариацию; моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  произвольны, но  $t_1 < t_2$ ;  $I$  – функционал Лагранжа.

Вариация работы внешних сил (28) имеет вид

$$\begin{aligned} \delta A &= \iint_{\Pi} (q^i \delta u_i + m^i \delta \psi_i + q \delta w + m \delta \psi_3) dS + \\ &+ \int_{\Gamma} (T_{(0)}^i \delta u_i + M_{(0)}^i \delta \psi_i + Q_{(0)} \delta w + \mu_{(0)} \delta \psi_3) ds. \end{aligned} \quad (32)$$

Вариацию потенциальной энергии находим из (26) с использованием кинематических соотношений (17) и физического закона (30)

$$\begin{aligned} \delta W &= \iint_{\Pi} (b_k^i Q^i \delta u_k + T^{ij} \nabla_i \delta u_j - b_{ij} T^{ij} \delta w + Q^i \nabla_i \delta w + \\ &+ M^{ij} \nabla_i \delta \psi_j + N \delta \psi_3 + \mu^i \nabla_i \delta \psi_3) dS, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$Q^i = \hat{Q}^i + b_j^i \mu^j, \quad T^{ij} = \hat{T}^{ij} + b_k^i M^{kj}, \quad N = \hat{N} - b_{ij} M^{ij}. \quad (34)$$

Отметим, что тензор  $T^{ij}$  в отличие от тензора  $\hat{T}^{ij}$  несимметричный.

Преобразовывая стандартным образом равенство (33) с помощью обобщенной теоремы Остроградского – Гаусса [27] с использованием (31) и (32), получаем вариацию функционала Лагранжа:

$$\begin{aligned} \delta I &= \iint_{\Pi} [(b_k^i Q^k - \nabla_j T^{ji} - q^i) \delta u_i - (\nabla_i Q^i + b_{ij} T^{ij} + q) \delta w + \\ &+ (Q^i - \nabla_j M^{ij} - m^i) \delta \psi_i + (N - \nabla_i \mu^i - m) \delta \psi_3] dS + \\ &+ \int_{\Gamma} [(T^{ji} \nu_j - T_{(0)}^i) \delta u_i + (Q^i \nu_i - Q_{(0)}) \delta w + \\ &+ (M^{ij} \nu_j - M_{(0)}^i) \delta \psi_i + (\mu^i \nu_i - \mu_{(0)}) \delta \psi_3] ds. \end{aligned} \quad (35)$$

Вариацию кинетической энергии получаем из (27):

$$\delta E = \rho \iint_{\Pi} [h (\dot{u}^i \delta \dot{u}_i + \dot{w} \delta \dot{w}) + I (\dot{\psi}^i \delta \dot{\psi}_i + \dot{\psi}_3 \delta \dot{\psi}_3)] dS.$$

Для интеграла от нее используем интегрирование по частям по времени. В результате имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta E dt = -\rho \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\Pi} \left[ h (\ddot{u}^i \delta u_i + \ddot{w} \delta w) + I (\ddot{\psi}^i \delta \psi_i + \ddot{\psi}_3 \delta \psi_3) \right] dS. \quad (36)$$

Подставляя теперь (35) и (36) в (31) и используя основную лемму вариационного исчисления [28], выводим уравнения движения оболочки:

$$\begin{aligned} \rho h \ddot{u}^i &= \nabla_j T^{ji} - b_j^i Q^j + q^i, & \rho h \ddot{w} &= \nabla_i Q^i + b_{ij} T^{ij} + q, \\ \rho I \ddot{\psi}^i &= \nabla_j M^{ij} - Q^i + m^i, & \rho I \ddot{\psi}_3 &= \nabla_i \mu^i - N + m. \end{aligned} \quad (37)$$

Для замыкания этой системы уравнений к ней нужно добавить физический закон (30) в совокупности с равенствами (34) и кинематические соотношения (18).

Полагая, что граница срединной поверхности имеет вид  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ , где кривые  $\Gamma_u$  и  $\Gamma_\sigma$  имеют общими только точки начал и концов, получаем «естественные» граничные условия как равенства, обращающие в нуль криволинейный интеграл в (35):

$$u_i|_{\Gamma_u} = u_{(0)i}, \quad w|_{\Gamma_u} = w_{(0)}, \quad \psi_i|_{\Gamma_u} = \psi_{(0)i}, \quad \psi_3|_{\Gamma_u} = \psi_{(0)3}, \quad (38)$$

$$T^{ji} \nu_j|_{\Gamma_\sigma} = T_{(0)}^i, \quad M^{ij} \nu_j|_{\Gamma_\sigma} = M_{(0)}^i, \quad Q^i \nu_i|_{\Gamma_\sigma} = Q_{(0)}, \quad \mu^i \nu_i|_{\Gamma_\sigma} = \mu_{(0)}. \quad (39)$$

Начальные условия принимаем в соответствии с порядком входящих в уравнения (37) производных:

$$\begin{aligned} u^i|_{t=t_0} &= f_u^i, \quad \dot{u}^i|_{t=t_0} = g_u^i, & w|_{t=t_0} &= f_w, \quad \dot{w}|_{t=t_0} = g_w, \\ \psi^i|_{t=t_0} &= f_\psi^i, \quad \dot{\psi}^i|_{t=t_0} = g_\psi^i, & \psi_3|_{t=t_0} &= f_{\psi_3}, \quad \dot{\psi}_3|_{t=t_0} = g_{\psi_3}. \end{aligned} \quad (40)$$

Правые части соотношений (38)–(40) полагаются заданными.

Таким образом, движение оболочки определяется начально-краевой задачей (18), (30), (34), (37)–(40).

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 14-49-00091.

#### Литература

1. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники, Сер. Механика деформируемых твердых тел. – М.: ВИНТИ, 1973. – Т. 5. – 273 с.
2. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.
3. Товстик П.Е. Неклассические модели балок, пластин и оболочек // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2008. – Т. 8. Вып. 3. – С. 72–85.
4. Starovoitov E.I., Kubenko V.D., Tarlakovskii D.V. Vibrations of circular sandwich plates connected with an elastic foundation // Russ. Aeronaut. – 1990 – V. 52, No 2. – P. 151–157. – doi: 10.3103/s1068799809020044.

5. *Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Tarlavovsky D.V.* Resonance Vibrations of a Circular Composite Plates on an Elastic Foundation // *Mech. Compos. Mater.* – 2015 – V. 51, No 5. – P. 561–570. – doi: 10.1007/s11029-018-9740-x.
6. *Paimushin V.N., Gazizullin R.K., Fedotenkov G.V.* Acoustic impact on the laminated plates placed between barriers // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* – 2016. – V. 158, No 1. – Art. 012075. – doi: 10.1088/1757-899X/158/1/012075.
7. *Tarlovskii D.V., Fedotenkov G.V.* Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells // *J. Mach. Manuf. Reliab.* – 2014. – V. 43, No 2. – P. 145–152. – doi: 10.3103/S1052618814010178.
8. *Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V.* Nonstationary axisymmetric problem of the impact of a spherical shell on an elastic half-space (initial stage of interaction) // *Mech. Solids.* – 2011. – V. 46, No 2. – P. 239–247. – doi: 10.3103/S0025654411020129.
9. *Tarlovskii D.V., Fedotenkov G.V.* Nonstationary 3D motion of an elastic spherical shell // *Mech. Solids.* – 2015. – V. 50, No 2. – P. 208–2017. – doi: 10.3103/S0025654415020107.
10. *Miller R.E., Shenoy V.B.* Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements // *Nanotechnology.* – 2000. – No 11. – P. 139–147. – doi: 10.1088/0957-4484/11/3/301.
11. *Reissner E.* On the form of variationally derived shell equations // *J. Appl. Mech.* – 1964. – V. 31, No 2. – P. 233–328.
12. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 448 с.
13. *Амбарцумян С.А.* К расчету двухслойных ортотропных оболочек. // *Изв. АН СССР. ОТН.* – 1957. – № 7. – С. 57–64.
14. *Пелех Б.Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наукова думка, 1973. – 248 с.
15. *Pietraszkiewicz W.* The resultant linear six-field theory of elastic shells: What it brings to the classical linear shell models // *ZAMM.* – 2016. – V. 96, No 8. – P. 899–915. – doi: 10.1002/zamm.201500184.
16. *Pietraszkiewicz W., Valle'e C.* A method of shell theory in determination of the surface from components of its two fundamental forms // *ZAMM.* – 2007. – V. 87, No 8-9. – P. 603–615. – doi: 10.1002/zamm.200710340.
17. *Родионова В.А., Тутаев Б.Ф., Черных К.Ф.* Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. – СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1996. – 280 с.
18. *Палий О.М., Спири В.Е.* Анизотропные оболочки в судостроении. Теория и расчет. – Л.: Судостроение, 1977. – 386 с.
19. *Галимов К.З., Паймушин В.Н., Терезулов И.Г.* Основания нелинейной теории оболочек. – Казань: Фэн, 1996. – 215 с.
20. *Паймушин В.Н.* Вариант нелинейной теории тонких оболочек типа Тимошенко // *Прикл. механика.* – 1986. – Т. 22, № 8. – С. 50–57.
21. *Paimushin V.N.* A study of elasticity and plasticity equations under arbitrary displacements and strains // *Mech. Solids.* – 2011. – V. 46, No 2. – P. 213–224. – doi: 10.3103/S0025654411020099.
22. *Paimushin V.N.* Relationships of the Timoshenko-type theory of thin shells with arbitrary displacements and strains // *J. Appl. Mech. Techn. Phys.* – 2014. – V. 55, No 5. – P. 843–856. – doi: 10.1134/S0021894414050149.
23. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1952. – 431 с.

24. Горшков А.Г., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Основы тензорного анализа и механика сплошной среды. – М.: Наука, 2000. – 214 с.
25. Позняк Э.Г., Шижин Е.В. Дифференциальная геометрия: первое знакомство. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 384 с.
26. Амензаде Ю.А. Теория упругости. – М.: Высш. шк., 1976. – 272 с.
27. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. – М.: Физматлит, 2004. – 472 с.
28. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. литер., 1961. – 228 с.

Поступила в редакцию  
09.02.18

---

**Михайлова Елена Юрьевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин»

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)  
Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 125993, Россия  
E-mail: [mihe16@yandex.ru](mailto:mihe16@yandex.ru)

**Тарлаковский Дмитрий Валентинович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией динамических испытаний; заведующий кафедрой «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин»

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)  
Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 125993, Россия  
НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова  
Мичуринский проспект, д. 1, г. Москва, 119192, Россия  
E-mail: [tdvhome@mail.ru](mailto:tdvhome@mail.ru)

**Федотенков Григорий Валерьевич**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин»; старший научный сотрудник лаборатории динамических испытаний

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)  
Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 125993, Россия  
НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова  
Мичуринский проспект, д. 1, г. Москва, 119192, Россия  
E-mail: [greghome@mail.ru](mailto:greghome@mail.ru)

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.  
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI  
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)  
2018, vol. 160, no. 3, pp. 561–577

## A Generalized Linear Model of Dynamics of Thin Elastic Shells

*E.Yu. Mihajlova<sup>a\*</sup>, D.V. Tarlakovskii<sup>a,b\*\*</sup>, G.V. Fedotenkov<sup>a,b\*\*\*</sup>*

<sup>a</sup>*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993 Russia*

<sup>b</sup>*Research Institute of Mechanics, Moscow State University, Moscow, 119192 Russia*

E-mail: \*mihe16@yandex.ru, \*\*tdvhome@mail.ru, \*\*\*greghome@mail.ru

Received February 9, 2018

### Abstract

A generalized linear model of the dynamics of a thin elastic shell of constant thickness, which takes into account the rotation and compression of the fiber sheath normal to the middle surface, has been proposed. A coordinate system has been used that includes the curvilinear coordinates of the median surface and the distance (normal coordinate) measured from the median surface in the direction of the outer normal. The connections of spatial metrics and covariant derivatives with analogous parameters of the middle surface have been found.

The field of displacements of the shell and all the characteristics have been considered in the linear approximation in the normal coordinate. It has been shown that the movements of any point of the shell are determined by the tangential and normal displacements of the middle surface, by two angles of rotation of the normal fiber and its deformation, and the deformed state of the envelope is specified by the tensors of tangential deformation and changes in curvature and deformation of the normal fiber. By means of the linearization of the equations of compatibility of deformations for a continuous medium, three analogous equations for a thin shell have been obtained. To prove their validity, the quadratic approximation of displacements has been used.

Formulas for the potential and kinetic energy have been obtained, as well as for the operation of external forces. It has been shown that taking into account the rotation of the normal fiber and compression leads to the appearance of additional internal force factors - an additional moment and normal force. In this case, distributed moments are added to standard external force factors. The physical law has been constructed for an anisotropic material that has symmetry relative to the median surface without adopting the commonly used static hypothesis of non-adherence of fibers.

The equations of motion have been constructed using the Hamiltonian principle. They consist of six tensor relations. From this principle, natural boundary conditions have been derived. It has been shown that the Kirchhoff–Love model and Tymoshenko type follow from the constructed model as special cases.

**Keywords:** elastic shell, rotation and compression of a normal fiber, anisotropy, equations of motion, compatibility of deformations

**Acknowledgments.** The study was supported by the Russian Science Foundation, project no. 14-49-00091.

### References

1. Grigolyuk E.I., Selezov I.T. Nonclassical theories of vibrations of bars, plates, and shells. *Itoġi Nauki Tekh., Ser.: Mekh. Deform. Tverd. Tel*, 1973, vol. 5. 273 p. (In Russian)

2. Novozhilov V.V., Chernych K.F., Michailovskii E.I. *Lineinaya teoriya tonkikh obolochek* [Linear Theory of Thin Shells]. Leningrad, Politekhnik, 1991. 656 p. (In Russian)
3. Tovstik P.E. On the non-classic models of beams, plates, and shells. *Izv. Sarat. Univ. Nov. Ser. Mat. Mekh. Inf.*, 2008, vol. 8, no. 3, pp. 72–85. (In Russian)
4. Starovoitov E.I., Kubenko V.D., Tarlakovskii D.V. Vibrations of circular sandwich plates connected with an elastic foundation. *Russ. Aeronaut.*, 1990, vol. 52, no. 2, pp. 151–157. doi: 10.3103/s1068799809020044.
5. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Tarlakovsky D.V. Resonance vibrations of a circular composite plates on an elastic foundation. *Mech. Compos. Mater.*, 2015, vol. 51, no. 5, pp. 561–570. doi: 10.1007/s11029-018-9740-x.
6. Paimushin V.N., Gazizullin R.K., Fedotenkov G.V. Acoustic impact on the laminated plates placed between barriers. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2016, vol. 158, no. 1, art. 012075, pp. 1–12. doi: 10.1088/1757-899X/158/1/012075.
7. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2014, vol. 43, no. 2, pp. 145–152. doi: 10.3103/S1052618814010178.
8. Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V. Nonstationary axisymmetric problem of the impact of a spherical shell on an elastic half-space (initial stage of interaction). *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 239–247. doi: 10.3103/S0025654411020129.
9. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Nonstationary 3D motion of an elastic spherical shell. *Mech. Solids*, 2015, vol. 50, no. 2, pp. 208–2017. doi: 10.3103/S0025654415020107.
10. Miller R.E., Shenoy V.B. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements. *Nanotechnology*, 2000, no. 11, pp. 139–147. doi: 10.1088/0957-4484/11/3/301.
11. Reissner E. On the form of variationally derived shell equations. *J. Appl. Mech.*, 1964, vol. 31, no. 2, pp. 233–328.
12. Ambartsumyan S.A. *Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek* [General Theory of Anisotropic Shells]. Moscow, Nauka, 1974. 448 p. (In Russian)
13. Ambartsumyan S.A. To the calculation of two-layer orthotropic shells. *Izv. Akad. Nauk SSSR OTN*, 1957, no. 7, pp. 57–64. (In Russian)
14. Pelekh B.L. *Teoriya obolochek s konechnoi sdvigovoi zhestost'yu* [Theory of Shells with Finite Shear Rigidity]. Kiev, Naukova Dumka, 1973. 248 p. (In Russian)
15. Pietraszkiewicz W. The resultant linear six-field theory of elastic shells: What it brings to the classical linear shell models. *ZAMM*, 2016, vol. 96, no. 8, pp. 899–915. doi: 10.1002/zamm.201500184.
16. Pietraszkiewicz W., Valle'e C. A method of shell theory in determination of the surface from components of its two fundamental forms. *ZAMM*, 2007, vol. 87, nos. 8–9, pp. 603–615. doi: 10.1002/zamm.200710340.
17. Rodionova V.A., Titaev B.F., Chernych K.F. *Prikladnaya teoriya anizotropnykh plastin i obolochek* [Applied Theory of Anisotropic Plates and Shells]. St. Petersburg, Izd. S.-Peterb. Univ., 1996. 280 p. (In Russian)
18. Paliy O.M., Spiro V.E. *Anizotropnye obolochki v sudostroenii. Teoriya i raschet* [Anisotropic Shells in Shipbuildings. Theory and Analysis]. Leningrad, Sudostroenie, 1977. 386 p. (In Russian)
19. Galimov K.Z., Paimushin V.N., Teregulov I.G. *Osnovaniya nelineinoi teorii obolochek* [Foundations of the Nonlinear Theory of Shells]. Kazan, Fen, 1996. 215 p. (In Russian)



20. Paimushin V.N. A version of the Timoshenko-type nonlinear theory of thin shells. *Prikl. Mekh.*, 1986, vol. 22, no. 8, pp. 50–57. (In Russian)
21. Paimushin V.N. A study of elasticity and plasticity equations under arbitrary displacements and strains. *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 213–224. doi: 10.3103/S0025654411020099.
22. Paimushin V.N. Relationships of the Timoshenko-type theory of thin shells with arbitrary displacements and strains. *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2014, vol. 55, no. 5, pp. 843–856. doi: 10.1134/S0021894414050149.
23. Novozhilov V.V. *Teoriya tonkikh obolochek* [Theory of Thin Shells]. Lenindgrad, Sudpromgiz, 1952. 431 p. (In Russian)
24. Gorshkov A.G., Rabinsky L.N., Tarlakovsky D.V. *Osnovy tenzornogo analiza i mekhanika sploshnoi sredy* [Fundamentals of Tensor Analysis and Continuum Mechanics]. Moscow, Nauka, 2000. 214 p. (In Russian)
25. Poznyak E.G., Shikin E.V. *Differentsial'naya geometriya: pervoe znakomstvo* [Differential Geometry. First Acquaintance]. Moscow, Izd. Mosk. Univ., 1990. 384 p. (In Russian)
26. Amenzade Yu.A. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, Vyssh. Shk., 1976. 272 p. (In Russian)
27. Gorshkov A.G., Medvedsky A.L., Rabinsky L.N., Tarlakovsky D.V. *Volny v sploshnykh sredakh* [Waves in Continuous Media]. Moscow, Fizmatlit, 2004. 472 p. (In Russian)
28. Gelfand I.M., Fomin S.V. *Calculus of Variations*. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall Inc., 1963. 232 p.

---

⟨ **Для цитирования:** Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Обобщенная линейная модель динамики тонких упругих оболочек // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2018. – Т. 160, кн. 3. – С. 561–577. ⟩

⟨ **For citation:** Mihajlova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. A generalized linear model of dynamics of thin elastic shells. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, vol. 160, no. 3, pp. 561–577. (In Russian) ⟩