

УДК 532.546

ЗАДАЧА \mathbb{R} -ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО КЛИНА В КЛАССЕ КУСОЧНО-МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Т.В. Никоненкова

Аннотация

В работе дано аналитическое решение задачи о возмущении заданного комплексного потенциала путем внесения в бесконечную изотропную среду инородного включения в виде прямоугольного клина.

Ключевые слова: голоморфные функции, гетерогенная среда, задача \mathbb{R} -линейного сопряжения.

Введение

Настоящая работа является непосредственным обобщением работы [1] и продолжением работ [2–4], посвященных аналитическому исследованию одной из общепринятых в теории гетерогенных сред математических моделей. Эта модель сводится к задаче об отыскании комплексного потенциала в неоднородной среде в классе кусочно-мероморфных функций с фиксированными главными частями по краевым условиям соответствующей задачи \mathbb{R} -линейного сопряжения. Известно, что решение подобных задач для неоднородной среды, состоящей из различных изотропных компонентов, представляет значительные математические трудности. Точные аналитические решения удается получить для немногих модельных задач для плоских, в основном двухфазных, сред, представляющих собой бесконечную однородную среду S_2 с инородным включением S_1 , ограниченным одной из кривых второго порядка. В настоящей работе изучается случай, когда таким включением является бесконечный прямоугольный клин.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача о возмущении заданного комплексного потенциала $f(z)$ путем внесения в бесконечную изотропную среду S_2 инородного включения S_1 – прямоугольного клина ($S_1 = \{z = x + iy, x > 0, y > 0\}$). Исследуется случай, когда у потенциала $f(z)$ имеется конечное число логарифмических особенностей и полюсов в конечных точках областей S_1 и S_2 .

Функция $F(z) = f'(z)$, комплексно-сопряженная с вектором скорости невозмущенного потока, как однозначная мероморфная функция с конечным числом полюсов в расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ является рациональной функцией. Предположим, что полюсы $F(z)$ не лежат на линии сопряжения областей S_1 и S_2 , тогда $F(z)$ может быть представлена в виде суммы $F(z) = F_1(z) + F_2(z)$. Здесь рациональные функции $F_1(z)$, $F_2(z)$ являются суммами простых дробей с полюсами в областях S_1 и S_2 соответственно, и следовательно, $F_1(\infty) = F_2(\infty) = 0$. Случай $F(\infty) \equiv V_0 = \text{const}$ в более общей ситуации был изучен в работе [1].

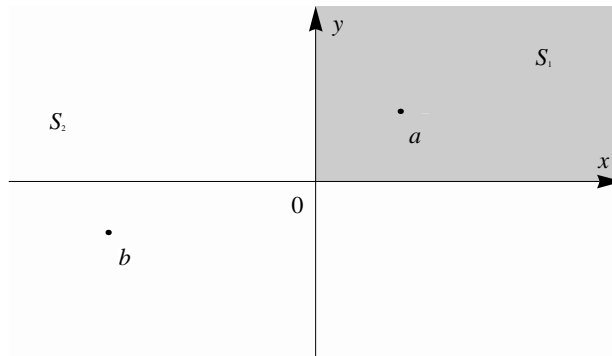


Рис. 1. Прямоугольный клин

Задача состоит в отыскании кусочно-мероморфной функции $v(z) = \{v_1(z), z \in S_1; v_2(z), z \in S_2\}$ по краевым условиям на линиях сопряжения областей S_1 и S_2 :

$$\begin{cases} v_1(x) = Av_2(x) - B\overline{v_2(x)}, & x > 0, \\ v_1(iy) = Av_2(iy) + B\overline{v_2(iy)}, & y > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Кусочно-мероморфное решение $v(z)$ задачи (1) ищется в виде суммы

$$v_j(z) = F_j(z) + v_{0j}(z),$$

где v_{0p} – неизвестные регулярные в области S_p функции, а $F_p(z)$ – известные главные части $v_p(z)$, $p = 1, 2$, исчезающие на бесконечности,

$$A = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2\rho_1}, \quad B = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2\rho_1}. \quad (2)$$

Здесь ρ_1 и ρ_2 – заданные положительные вещественные параметры, характеризующие физические свойства сред S_1 и S_2 соответственно (в частности, в электродинамике это коэффициент удельного сопротивления, в теории диффузии – коэффициент диффузии, в теплопроводности – коэффициент теплопроводности, и т. п.). У функций $v_{0p}(z)$, $v_{0p}(1/z)$, $p = 1, 2$, допускается наличие интегрируемых особенностей в начале координат:

$$|v_{0p}(z)| = o(|z|^{\pm 1}), \quad |z|^{\pm 1} \rightarrow \infty.$$

В дальнейшем, говоря о решении поставленной задачи в указанном классе функций, а также задач, к которым она будет последовательно приводиться в процессе решения, для краткости будем ссылаться на соответствующее краевое условие (например, задача (1)).

2. Решение краевой задачи (1)

Введем функции

$$V^+(z) = \begin{cases} v_{01}(z) - AF_2(z) - B\overline{v_{02}(-\bar{z})}, & z \in \overline{S_1}, \\ Av_{02}(z) - F_1(z) + B\overline{F_2(-\bar{z})}, & z \in \mathbb{C}^+ \setminus \overline{S_1}, \end{cases} \quad (3)$$

$$V^-(z) = Av_{02}(z) - F_1(z), \quad z \in \mathbb{C}^-, \quad (4)$$

голоморфные соответственно в верхней, $\mathbb{C}^+ = \{z : \text{Im } z > 0\}$, и нижней, $\mathbb{C}^- = \{z : \text{Im } z < 0\}$, полуплоскостях. Определим функцию

$$V(z) = \{V^+(z), \mathbb{C}^+; V^-(z), \mathbb{C}^-\},$$

кусочно-голоморфную в плоскости \mathbb{C} . Относительно последней с учетом (1), (3), (4) получим краевую задачу

$$\begin{aligned} V^-(x) - V^+(x) &= \Delta(\overline{V^+(-x)} + \overline{V^-(-x)}) + S(x), \quad x > 0, \\ V^+(x) &= V^-(x) + B\overline{F_2(-x)}, \quad x < 0, \end{aligned} \quad (5)$$

эквивалентную задаче (1), где

$$S(x) = \Delta(\overline{F_1(x)} + \overline{F_1(-x)}) + B(\overline{F_2(x)} - \Delta F_2(x)),$$

а $\Delta = B/A$, и следовательно, $|\Delta| < 1$.

Решение данной задачи в силу (3), (4) следует отыскивать в классе голоморфных в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ функций, для которых в начале координат и на бесконечности выполняется условие

$$|V(z)| = o(|z|^{\pm 1}), \quad |z|^{\pm 1} \rightarrow \infty.$$

Используя последние соотношения и те, что получаются из них заменой x на $-x$ и комплексным сопряжением, относительно четырехмерной вектор-функции $\Phi(z)$ с компонентами

$$\Phi_1(z) = V(z), \quad \Phi_2(z) = V(-z), \quad \Phi_3(z) = \overline{V(\bar{z})}, \quad \Phi_4(z) = \overline{V(-\bar{z})}, \quad (6)$$

придем к четырехмерной задаче Римана с краевыми условиями

$$\begin{cases} \Phi_2^+(x) = \Phi_2^-(x) - B\overline{F_2(x)}, \\ \Phi_4^+(x) = \Phi_4^-(x) + BF_2(x), \\ \Phi_1^-(x) - \Phi_1^+(x) = \Delta(\Phi_4^+(x) + \Phi_3^+(x)) + S(x), \\ \Phi_3^+(x) - \Phi_3^-(x) = \Delta(\Phi_2^-(x) + \Phi_1^-(x)) + \overline{S(x)}, \end{cases}$$

при $x > 0$ и

$$\begin{cases} \Phi_1^+(x) = \Phi_1^-(x) + B\overline{F_2(-x)}, \\ \Phi_3^+(x) = \Phi_3^-(x) - BF_2(-x), \\ \Phi_2^+(x) - \Phi_2^-(x) = \Delta(\Phi_3^-(x) + \Phi_4^-(x)) + S(-x), \\ \Phi_4^-(x) - \Phi_4^+(x) = \Delta(\Phi_1^+(x) + \Phi_2^+(x)) + \overline{S(-x)}, \end{cases}$$

при $x < 0$.

Перепишем последнюю задачу в векторной форме:

$$\Phi^+(x) = G\Phi^-(x) + H(x), \quad x > 0; \quad \Phi^+(x) = PGP\Phi^-(x) + P\overline{H(-x)}, \quad x < 0, \quad (7)$$

где постоянная невырожденная матрица G и перестановочная матрица P имеют вид

$$G = \begin{vmatrix} 1 - \Delta^2 & -\Delta^2 & -\Delta & -\Delta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \Delta & \Delta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad P = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (8)$$

а $H(x)$ – вектор-функция со следующими компонентами:

$$H(x) = (-\Delta \overline{S(x)} - S(x) - \Delta B F_2(x), -\overline{B F_2(x)}, \overline{S(x)}, B F_2(x)).$$

Решение задачи (7) в силу (6) должно удовлетворять условиям

$$\Phi(-z) \equiv P_1 \Phi(z), \quad \overline{\Phi(\bar{z})} \equiv P_2 \Phi(z), \quad \overline{\Phi(-\bar{z})} \equiv P \Phi(z), \quad (9)$$

где P_1, P_2 – перестановочные матрицы

$$P_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad P_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

а также условиям в нуле и на бесконечности:

$$|\Phi_j(z)| = o(|z|^{\pm 1}), \quad |z|^{\pm 1} \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Рассмотрим линейное преобразование

$$\Psi(z) = W^{-1} \Phi(z), \quad (10)$$

где W – матрица, приводящая матрицу G к нормальной жордановой форме J_1 . Матрицу PGP это преобразование приводит к треугольной матрице J_2 . С помощью замены (10) задача (7) приводится к эквивалентной задаче:

$$\Psi^+(x) = J_1 \Psi^-(x) + K_1(x), \quad x > 0; \quad \Psi^+(x) = J_2 \Psi^-(x) + K_2(x), \quad x < 0, \quad (11)$$

где

$$J_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}, \quad J_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda - 1 & \bar{\lambda} - 1 \\ 0 & 1 & \Delta & \Delta \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda} \end{vmatrix},$$

$$\lambda = (2 - \Delta^2 + i\Delta\sqrt{4 - \Delta^2})/2 = e^{\pi i \alpha}, \quad |\alpha| < 1/2, \quad (12)$$

$$K_1(x) = W^{-1} H(x), \quad K_2(x) = W^{-1} P \overline{H(-x)}, \quad (13)$$

$$W = \begin{vmatrix} 0 & -1 & \frac{(\bar{\lambda} - 1)}{\Delta} & \frac{(\lambda - 1)}{\Delta} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad W^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta}{\bar{\lambda} - \lambda} & \frac{\Delta}{\bar{\lambda} - \lambda} & \frac{1}{1 + \bar{\lambda}} & \frac{1}{1 + \bar{\lambda}} \\ \frac{\Delta}{\lambda - \bar{\lambda}} & \frac{\Delta}{\lambda - \bar{\lambda}} & \frac{1}{1 + \lambda} & \frac{1}{1 + \lambda} \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Принимая во внимание тождества (9), решение задачи (11) следует отыскивать в классе кусочно-голоморфных функций, удовлетворяющих условиям:

$$\Psi(-z) \equiv W^{-1} P_1 W \Psi(z), \quad \overline{\Psi(\bar{z})} \equiv W^{-1} P_2 W \Psi(z), \quad \overline{\Psi(-\bar{z})} \equiv W^{-1} P W \Psi(z), \quad (15)$$

при этом функции $\Psi(z)$ и $\Psi(1/z)$ допускают наличие интегрируемых особенностей в начале координат, то есть

$$|\Psi_j(z)| = o(|z|^{\pm 1}), \quad |z|^{\pm 1} \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (16)$$

Решение краевой задачи (11) следует начинать с отыскания последней компоненты – Ψ_4 . Относительно нее имеем краевую задачу Римана с разрывными коэффициентами

$$\Psi_4^+(x) = G_4(x)\Psi_4^-(x) + g_4(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$G_4(x) = \begin{cases} \lambda, & x > 0, \\ \bar{\lambda}, & x < 0, \end{cases} \quad g_4(x) = \begin{cases} K_{14}(x), & x > 0, \\ K_{24}(x), & x < 0, \end{cases}$$

где $K_{j4}(x)$ – четвертые компоненты вектор-функций $K_j(x)$, $j = 1, 2$, определенных формулами (13).

Умножая обе части равенства (17) на $\bar{\lambda}$ и факторизуя коэффициент $\bar{\lambda}G_4$ с помощью ветви функции $1/\chi(z) = 1/z^\alpha$, фиксированной в плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси условием $|\arg z| < \pi$, задачу (17) приводим к виду

$$\bar{\lambda}\Psi_4^+(x) = \frac{\chi^-(x)}{\chi^+(x)}\Psi_4^-(x) + \bar{\lambda}g_4(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Последнее условие может быть записано в виде

$$\bar{\lambda}\Psi_4^+(x)\chi^+(x) - T_4^+(x) = \Psi_4^-(x)\chi^-(x) - T_4^-(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где интеграл типа Коши

$$T_4(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\bar{\lambda}g_4(\tau)\chi^+(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad (18)$$

дает решение задачи о скачке

$$T_4^+(x) - T_4^-(x) = \bar{\lambda}g_4(x)\chi^+(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Следует заметить, что интеграл (18) сходится в силу того, что $g_4(x)$ – рациональная функция, исчезающая на бесконечности.

Учитывая, что Ψ_4 принадлежит классу кусочно-голоморфных функций, удовлетворяющих в нуле и на бесконечности условиям

$$|\Psi_4(z)| = o(|z|^{\pm 1}), \quad |z|^{\pm 1} \rightarrow \infty,$$

общее решение задачи (17) получим в виде

$$\Psi_4(z) = \begin{cases} \lambda(T_4(z) + c_4)/\chi(z), & \operatorname{Im} z > 0, \\ (T_4(z) + c_4)/\chi(z), & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}$$

где c_4 – произвольная комплексная константа.

Аналогично выписывается решение задачи Римана относительно Ψ_3 :

$$\Psi_3^+(x) = G_3(x)\Psi_3^-(x) + g_3(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$G_3(x) = \begin{cases} \bar{\lambda}, & x > 0, \\ \lambda, & x < 0, \end{cases} \quad g_3(x) = \begin{cases} K_{13}(x), & x > 0, \\ K_{23}(x), & x < 0, \end{cases}$$

где $K_{j3}(x)$ – третьи компоненты вектор-функций $K_j(x)$ ($j = 1, 2$).

Общее решение этой задачи представляется следующим образом

$$\Psi_3(z) = \begin{cases} \bar{\lambda}\chi(z)(T_3(z) + c_3), & \operatorname{Im} z > 0, \\ \chi(z)(T_3(z) + c_3), & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

Здесь функция $\chi(z) = z^\alpha$ факторизует коэффициент задачи λG_3 ,

$$T_3(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda g_3(\tau)}{\chi^+(\tau)(\tau - z)} d\tau, \quad (19)$$

а c_3 – произвольная комплексная константа.

Далее, подставляя $\Psi_3^-(x)$, $\Psi_4^-(x)$ в первые два условия (11), относительно $\Psi_1(z)$, $\Psi_2(z)$ получим две задачи о скачке

$$\Psi_1^+(x) - \Psi_1^-(x) = \begin{cases} K_{11}(x), & x > 0, \\ (\lambda - 1)\Psi_3^-(x) + (\bar{\lambda} - 1)\Psi_4^-(x) + K_{21}(x), & x < 0, \end{cases} \quad (20)$$

$$\Psi_2^+(x) - \Psi_2^-(x) = \begin{cases} K_{12}(x), & x > 0, \\ \Delta\Psi_3^-(x) + \Delta\Psi_4^-(x) + K_{22}(x), & x < 0. \end{cases} \quad (21)$$

Здесь $K_{j1}(x)$, $K_{j2}(x)$ – первый и второй компоненты вектор-функций $K_j(x)$ соответственно. Частные решения задач (20), (21) дают интегралы типа Коши

$$2\pi i T_1(z) = \int_0^\infty \frac{K_{11}(\tau)}{\tau - z} d\tau + \int_{-\infty}^0 \frac{(\lambda - 1)\Psi_3^-(\tau) + (\bar{\lambda} - 1)\Psi_4^-(\tau) + K_{21}(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad (22)$$

$$2\pi i T_2(z) = \int_0^\infty \frac{K_{12}(\tau)}{\tau - z} d\tau + \int_{-\infty}^0 \frac{\Delta\Psi_3^-(\tau) + \Delta\Psi_4^-(\tau) + K_{22}(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad (23)$$

где $\Psi_3^-(x) = \chi^-(x)(T_3^-(x) + c_3)$ и $\Psi_4^-(x) = (T_4^-(x) + c_4)/\chi^-(x)$. Интегралы (22), (23) в силу (16) принадлежат классу искомым функций, то есть удовлетворяют условиям

$$|T_{1,2}(z)| = o(|z|^{\pm 1}), \quad |z|^{\pm 1} \rightarrow \infty,$$

С учетом класса искомым функций решением задач (20), (21) будет

$$\Psi_1(z) = c_1 + T_1(z), \quad \Psi_2(z) = c_2 + T_2(z),$$

где c_1, c_2 – произвольные комплексные константы.

Чтобы найти решение задачи (11), а следовательно, задачи (1) в явном виде достаточно рассмотреть два случая расположения особенностей $F(z)$.

3. Случай, когда особенности заданного комплексного потенциала расположены в области S_1

Не уменьшая общности, достаточно исследовать случай потенциала с единственной особенностью в произвольной точке $a = re^{i\varphi}$, $0 < \varphi < \pi/2$, то есть когда

$$F_1(z) = \sum_{k=1}^n F_1^k(z), \quad \text{где } F_1^k(z) = \frac{a_k}{(z - a)^k}.$$

Свободные члены задачи (11) в этом случае в силу (13) будут иметь вид:

$$K_1(x) = \{0, 0, p_1\overline{M(x)} + p_2M(x), \overline{p_1M(x)} + \overline{p_2M(x)}\}, \quad (24)$$

$$K_2(x) = \{-\Delta^2\overline{M(x)} - \Delta M(x), \Delta\overline{M(x)}, p_3\overline{M(x)} + p_4M(x), \overline{p_3M(x)} + \overline{p_4M(x)}\}, \quad (25)$$

где $M(x) = F_1(-x) + F_1(x)$ и

$$p_1 = \Delta^2/(\lambda - \bar{\lambda}), \quad p_2 = \Delta/(\lambda + 1), \quad p_3 = -\lambda p_1, \quad p_4 = -\lambda p_2. \quad (26)$$

Прежде всего вычислим интеграл (18):

$$T_4(z) = \frac{\bar{\lambda}}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{K_{14}(\tau)\chi^+(\tau) d\tau}{\tau - z} + \frac{\bar{\lambda}}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}_-} \frac{K_{24}(\tau)\chi^+(\tau) d\tau}{\tau - z}.$$

Так как $\chi^-(t) = \bar{\lambda}^2 \chi^+(t)$ на \mathbb{R}_- , то справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{R}_-} \frac{K_{24}(\tau)\chi^+(\tau) d\tau}{\tau - z} = \frac{1}{1 - \bar{\lambda}^2} \int_{\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-} \frac{K_{24}(\tau)\chi(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad (27)$$

где \mathbb{R}_+^+ , \mathbb{R}_-^- – верхний и нижний берега разреза по отрицательной части вещественной оси соответственно.

Аналогично, на \mathbb{R}_+ получим

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{K_{14}(\tau)\chi^+(\tau) d\tau}{\tau - z} = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{K_{14}(\tau)\chi_1^+(\tau) d\tau}{\tau - z} = \frac{1}{1 - \lambda^2} \int_{\mathbb{R}_+^- \cup \mathbb{R}_+^+} \frac{K_{14}(\tau)\chi_1(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad (28)$$

где $\chi_1(z) = z^\alpha$ – ветвь, фиксированная в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ условием $0 < \arg z < 2\pi$, при этом $\chi_1^-(t) = \lambda^2 \chi_1^+(t)$, $t > 0$. Следует заметить, что функции $\chi_1(z)$ и $\chi(z)$ связаны соотношением

$$\chi_1(z) = \begin{cases} \chi(z), & \operatorname{Im} z > 0 \\ \lambda^2 \chi(z), & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases} \quad (29)$$

В силу теоремы Коши о вычетах интегралы в правых частях соотношений (27), (28) с учетом равенства $K_{24}(x) = -\bar{\lambda}K_{14}(x)$, которое вытекает из (24)–(26), и представления функции

$$K_{14}(x) = \sum_{k=1}^n \bar{p}_1 \left(\frac{(-1)^k \bar{a}_k}{(x + \bar{a})^k} + \frac{\bar{a}_k}{(x - \bar{a})^k} \right) + \bar{p}_2 \left(\frac{(-1)^k a_k}{(x + a)^k} + \frac{a_k}{(x - a)^k} \right)$$

равны сумме вычетов подынтегральных функций в простом полюсе $\tau = z$ и в полюсах порядка k в точках $\pm a$, $\pm \bar{a}$ ($k = 1, \dots, n$). Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}_+^- \cup \mathbb{R}_+^+} \frac{\chi_1(\tau) d\tau}{(\tau - z)(\tau - a)^k} = \frac{\chi_1(z)}{(z - a)^k} + \operatorname{res}_a \frac{\chi_1(\xi)}{(\xi - z)(\xi - a)^k},$$

где вычет в точке a находится стандартным образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_a \frac{\chi_1(\xi)}{(\xi - z)(\xi - a)^k} &= \frac{1}{(k-1)!} \lim_{\xi \rightarrow a} \left[\frac{\chi_1(\xi)}{\xi - z} \right]_{\xi}^{(k-1)} = \\ &= - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{C_{k-1}^j \chi_1^{(j)}(a) (k-1-j)!}{(k-1)! (z-a)^{k-j}} = \frac{-\chi_1(a)}{(z-a)^k} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{\alpha}{j} \left(\frac{z}{a} - 1 \right)^j, \end{aligned}$$

$\chi_1^{(j)}(a)$ – j -я производная функции $\chi_1(z)$ в точке $z = a$.

С учетом этих выкладок последний интеграл, обозначим его через q_k^1 , имеет вид:

$$q_k^1(z; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}_+^- \cup \mathbb{R}_+^+} \frac{\chi_1(\tau) d\tau}{(\tau - z)(\tau - a)^k} = \frac{\chi_1(z) - \chi_1(a)r_k(z/a; \alpha)}{(z - a)^k}, \quad (30)$$

где

$$r_k(z; \alpha) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{\alpha}{j} (z - 1)^j. \quad (31)$$

Аналогично на \mathbb{R}_-

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}_-^+ \cup \mathbb{R}_-^-} \frac{\chi(\tau) d\tau}{(\tau - z)(\tau - a)^k} = \frac{\chi(z) - \chi(a)r_k(z/a; \alpha)}{(z - a)^k} = q_k(z; a). \quad (32)$$

Интеграл (30) при $z \rightarrow a$ имеет предел, равный $\chi^{(k)}(a)/k!$, а для интеграла (32) этот предел равен $\chi_1^{(k)}(a)/k!$.

Таким образом, для интеграла Коши (18) получено представление

$$T_4(z) = \frac{\bar{\lambda}}{1 - \lambda^2} \sum_{k=1}^n \overline{p_1 a_k} (Q_k(z; \bar{a}) + (-1)^k Q_k(z; -\bar{a})) + \overline{p_2 a_k} (Q_k(z; a) + (-1)^k Q_k(z; -a)),$$

где p_j определяются соотношениями (26), а

$$Q_k(z; a) = q_k^1(z; a) + \lambda q_k(z; a).$$

Для интеграла (19) справедливо представление

$$\begin{aligned} 2\pi i T_3(z) &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\lambda K_{13}(\tau)}{\chi^+(\tau)(\tau - z)} d\tau + \int_{\mathbb{R}_-} \frac{\lambda K_{23}(\tau)}{\chi^+(\tau)(\tau - z)} d\tau = \\ &= \frac{\lambda}{1 - \bar{\lambda}^2} \int_{\mathbb{R}_+^- \cup \mathbb{R}_+^+} \frac{K_{13}(\tau)}{\chi_1(\tau)(\tau - z)} d\tau + \frac{\lambda}{1 - \lambda^2} \int_{\mathbb{R}_-^+ \cup \mathbb{R}_-^-} \frac{K_{23}(\tau)}{\chi(\tau)(\tau - z)} d\tau. \end{aligned} \quad (33)$$

На основании (13) для функций $K_{13}(x)$ и $K_{23}(x)$ вычисление интегралов (33) сводится к суммированию в точках $\pm a$, $\pm \bar{a}$ следующих интегралов

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}_+^- \cup \mathbb{R}_+^+} \frac{(\tau - a)^{-k} d\tau}{(\tau - z)\chi_1(\tau)} = \frac{\chi_1^{-1}(z) - \chi_1^{-1}(a)r_k(z/a; -\alpha)}{(z - a)^k} = \tilde{q}_k^1(z; a), \quad (34)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}_-^+ \cup \mathbb{R}_-^-} \frac{(\tau - a)^{-k} d\tau}{(\tau - z)\chi(\tau)} = \frac{\chi^{-1}(z) - \chi^{-1}(a)r_k(z/a; -\alpha)}{(z - a)^k} = \tilde{q}_k(z; a). \quad (35)$$

Таким образом, получили

$$T_3(z) = \frac{\lambda}{1 - \bar{\lambda}^2} \sum_{k=1}^n p_1 \overline{a_k} (\tilde{Q}_k(z; \bar{a}) + (-1)^k \tilde{Q}_k(z; -\bar{a})) + p_2 a_k (\tilde{Q}_k(z; a) + (-1)^k \tilde{Q}_k(z; -a)),$$

$$\tilde{Q}_k(z; a) = \tilde{q}_k^1(z; a) + \bar{\lambda} \tilde{q}_k(z; a).$$

Так как $K_{11}(x) = K_{12}(x) \equiv 0$, то интегралы (22), (23) есть сумма интегралов типа Коши по отрицательной вещественной полуоси с плотностями $\Psi_3^-(x) = \chi^-(x)(T_3^-(x) + c_3)$, $\Psi_4^-(x) = (T_4^-(x) + c_4)/\chi^-(x)$ и $K_{2j}(x)$ ($j = 1, 2$) соответственно.

Имеем

$$\int_{\mathbb{R}_-} \frac{K_{21}(\tau)}{\tau - z} d\tau = -\Delta \sum_{k=1}^n [\Delta \bar{a}_k (D_k(z; \bar{a}) + (-1)^k D_k(z; -\bar{a})) + a_k (D_k(z; a) + (-1)^k D_k(z; -a))], \quad (36)$$

$$\int_{\mathbb{R}_-} \frac{K_{22}(\tau)}{\tau - z} d\tau = \sum_{k=1}^n \Delta \bar{a}_k [D_k(z; \bar{a}) + (-1)^k D_k(z; -\bar{a})], \quad (37)$$

где $K_{2j}(\tau)$ ($j = 1, 2$) – j -й компонент вектор функции (25) и

$$D_k(z; a) = \int_{\mathbb{R}_-} \frac{(\tau - a)^{-k}}{\tau - z} d\tau = \frac{1}{(z - a)^k} \left(\ln \frac{z}{a} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(1 - z/a)^j}{j} \right). \quad (38)$$

Здесь $\ln \zeta$ – ветвь логарифма, фиксированная в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ условием $-\pi < \arg z < \pi$.

Легко доказать, что справедливы следующие равенства

$$\int_{\mathbb{R}_-} \frac{c_4 d\tau}{\chi^-(\tau)(\tau - z)} = \frac{2\pi i}{\bar{\lambda}^2 - 1} \frac{c_4}{\chi(z)}, \quad \int_{\mathbb{R}_-} \frac{\chi^-(\tau)c_3 d\tau}{\tau - z} = \frac{2\pi i}{\lambda^2 - 1} \chi(z)c_3. \quad (39)$$

Чтобы вычислить интегралы

$$\int_{\mathbb{R}_-} \frac{T_4^-(\tau) d\tau}{\chi^-(\tau)(\tau - z)}, \quad \int_{\mathbb{R}_-} \frac{\chi^-(\tau)T_3^-(\tau) d\tau}{\tau - z},$$

достаточно найти, используя представления функций Q_k , \tilde{Q}_k и формулы (31), (32), (35), (38), значения следующих двух интегралов:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_-} \frac{Q_k^-(\tau; a) d\tau}{\chi^-(\tau)(\tau - z)} &= \int_{\mathbb{R}_-} \frac{\chi_1^-(\tau) + \lambda \chi^-(\tau)}{\chi^-(\tau)(\tau - z)(\tau - a)^k} d\tau - \\ &- \sum_{j=0}^{k-1} \binom{\alpha}{j} \frac{\chi_1(a) + \lambda \chi(a)}{a^j} \int_{\mathbb{R}_-} \frac{(\tau - a)^{j-k} d\tau}{\chi^-(\tau)(\tau - z)} = (\lambda^2 + \lambda) D_k(z; a) - \\ &- \sum_{j=0}^{k-1} \binom{\alpha}{j} \frac{\chi_1(a) + \lambda \chi(a)}{a^j} \frac{2\pi i}{\bar{\lambda}^2 - 1} \tilde{q}_{k-j}(z; a), \quad (40) \end{aligned}$$

где $\chi_1(z)$ связана с $\chi(z)$ соотношением (29). Аналогично, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_-} \frac{\chi^-(\tau) \tilde{Q}_k^-(\tau; a) d\tau}{\tau - z} &= \\ &= (\bar{\lambda}^2 + \bar{\lambda}) D_k(z; a) - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{-\alpha}{j} \frac{\chi_1^{-1}(a) + \bar{\lambda} \chi^{-1}(a)}{a^j} \frac{2\pi i}{\lambda^2 - 1} q_{k-j}(z; a). \quad (41) \end{aligned}$$

Таким образом, значение интегралов $T_j(z)$ может быть выписано на основании соотношений (40), (41), формул (38), (39), а также интегралов типа Коши (36), (37).

Возвращаясь теперь к функции $\Psi(z)$ и требуя, чтобы выполнялись тождества (15), получим, что $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 \equiv 0$. Искомое решение задачи (5) на основании (6), (10), (14) удобно найти с помощью соотношения $V(z) = \Psi_2(-z)$. Отсюда с учетом (12) (2) и представления функции $F_1(z)$ находим

$$V(z) = \sum_{k=1}^n \left(\overline{F_1^k(-\bar{z})} L_k^1(z; \bar{a}) + \overline{F_1^k(\bar{z})} L_k^2(z; -\bar{a}) + F_1^k(-z) L_k^3(z; a) + F_1^k(z) L_k^4(z; -a) \right), \quad (42)$$

$$L_k^i(z; a) = l_i R_k(z/a; \alpha) + \bar{l}_i R_k(z/a; -\alpha), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$R_k(z; \alpha) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{-\alpha}{j} (-z-1)^j \left[(-z)^\alpha - \sum_{m=0}^{k-j-1} \binom{\alpha}{m} (-z-1)^m \right], \quad (43)$$

$$l_1 = \bar{\lambda} l_2, \quad l_2 = \frac{\Delta(\lambda-1)}{(\bar{\lambda}-\lambda)^2}, \quad l_3 = \lambda l_4, \quad l_4 = -\frac{\bar{\lambda}\Delta^2}{(\bar{\lambda}-\lambda)^2}. \quad (44)$$

Здесь функция $\chi(z) = z^\alpha$, фиксированная в плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси условием $|\arg z| < \pi$, удовлетворяет равенствам

$$\chi(-z) = e^{\mp\pi\alpha i} \chi(z), \quad z \in \mathbb{C}^\pm.$$

Используя теперь формулы (3), (4), выпишем решение задачи (1) в случае, когда комплексный потенциал имеет особенность внутри включения S_1 :

$$v_1(z) = F_1(z) + V^+(z) + \Delta(\overline{V^+(-\bar{z})} + \overline{F_1(-\bar{z})}), \quad z \in S_1,$$

$$v_2(z) = \begin{cases} F_1(z)/A + V^+(z)/A, & z \in \mathbb{C}^+ \setminus \overline{S_1}, \\ F_1(z)/A + V^-(z)/A, & z \in \mathbb{C}^-, \end{cases}$$

где $V^+(z) = \{V(z), \text{Im } z > 0\}$, $V^-(z) = \{V(z), \text{Im } z < 0\}$ – функции, аналитические в верхней и в нижней полуплоскостях соответственно, причем по построению функция $v_2(z)$ непрерывна на \mathbb{R}_- и, следовательно, голоморфна в S_2 .

4. Случай расположения особенностей потенциала $f(z)$ в области S_2

Пусть $b = re^{i\varphi}$, $\pi/2 < \varphi < 2\pi$ и

$$F_2(z) = \sum_{k=1}^n F_2^k(z), \quad \text{где } F_2^k(z) = \frac{b_k}{(z-b)^k},$$

тогда свободные члены задачи (8) в силу (13) будут иметь вид:

$$K_1(x) = \{BF_2(x), -\overline{BF_2(x)}, p_1\overline{F_2(x)} + p_2F_2(x), \overline{p_1F_2(x)} + \overline{p_2F_2(x)}\}, \quad (45)$$

$$K_2(x) = \{-\Delta\overline{BF_2(-x)} + B(\Delta^2 - 1)F_2(-x), \overline{BF_2(-x)} - B\Delta F_2(-x), p_3\overline{F_2(-x)} + p_4F_2(-x), \overline{p_3F_2(-x)} + \overline{p_4F_2(-x)}\}, \quad (46)$$

где

$$p_1 = B(\bar{\lambda} + 1)\Delta/(\lambda - \bar{\lambda}), \quad p_2 = B, \quad p_3 = -\lambda p_1, \quad p_4 = \Delta\lambda p_1 - B. \quad (47)$$

Так же, как и в предыдущем случае, последовательно найдем значения интегралов типа Коши $T_j(z)$, $j = 1, 2, 3, 4$. На основании соотношений (27)–(32) и (45), (46) выпишем значение интеграла (18):

$$T_4(z) = \frac{1}{\bar{\lambda} - \lambda} \sum_{k=1}^n \bar{b}_k \left(\overline{p_1 \bar{\lambda}^2} q_k^1(z; \bar{b}) - \overline{p_3} (-1)^k q_k(z; -\bar{b}) \right) + \\ + b_k \left(\overline{p_2 \bar{\lambda}^2} q_k^1(z; b) - \overline{p_4} (-1)^k q_k(z; -b) \right),$$

где коэффициенты p_j определяются по формулам (47). Далее, используя формулы (33)–(35), получим, что интеграл (19) равен

$$T_3(z) = \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} \sum_{k=1}^n \bar{b}_k \left(p_1 \lambda^2 \tilde{q}_k^1(z; \bar{b}) - p_3 (-1)^k \tilde{q}_k(z; -\bar{b}) \right) + \\ + b_k \left(p_2 \lambda^2 \tilde{q}_k^1(z; b) - p_4 (-1)^k \tilde{q}_k(z; -b) \right).$$

Подставляя теперь функции $\Psi_3^-(x) = \chi^-(x)(T_3^-(x) + c_3)$ и $\Psi_4^-(x) = (T_4^-(x) + c_4)/\chi^-(x)$ в интегралы (22), (23), найдем значения интегралов $T_1(z)$, $T_2(z)$ в явном виде. В отличие от предыдущего случая, в условиях (20), (21) свободные члены $K_{11}(x)$ и $K_{12}(x)$ тождественно не равны нулю, поэтому частные решения (22), (23) этих задач содержат интегралы по \mathbb{R}_+ , которые в силу (38), (45), (46) имеют вид

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{K_{11}(\tau) d\tau}{\tau - z} = \frac{-B}{(-1)^k} \sum_{k=1}^n b_k D_k(-z; -b), \quad \int_{\mathbb{R}_+} \frac{K_{12}(\tau) d\tau}{\tau - z} = \frac{B}{(-1)^k} \sum_{k=1}^n \bar{b}_k D_k(-z; -\bar{b}).$$

Интегралы по отрицательной вещественной полуоси в (22), (23) вычисляются точно так же, как и в предыдущем случае, с использованием формул (30)–(32), (34)–(39).

Поскольку справедливы соотношения (15), имеем, как и выше, что $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 \equiv 0$ и искомая функция $V(z) = \Psi_2(-z)$ имеет вид

$$V(z) = \sum_{k=1}^n \left(\overline{F_2^k(-\bar{z})} L_k^1(z; \bar{b}) + \overline{F_2^k(\bar{z})} L_k^2(z; -\bar{b}) \right) + \\ + F_2^k(-z) L_k^3(z; b) + F_2^k(z) L_k^4(z; -b) + \overline{F_2(-\bar{z})} B \begin{cases} I_C^-(b), & \text{Im } z > 0, \\ -I_C^+(b), & \text{Im } z < 0, \end{cases} \quad (48)$$

где I_C – характеристическая функция множества C :

$$I_C(x) = \begin{cases} 1, & x \in C, \\ 0, & x \notin C, \end{cases} \quad (49)$$

$$L_k^j(z; b) = l_j R_k(z/b; \alpha) + \bar{l}_j R_k(z/b; -\alpha), \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

$R_k(z/b; w)$ выражается по формуле (43) и

$$l_1 = \lambda^{\mp 1} l_2, \quad l_2 = \frac{B(1 - \bar{\lambda})}{(\bar{\lambda} - \lambda)^2}, \quad l_3 = \lambda^{\pm 1} l_4, \quad l_4 = \frac{-B\Delta}{(\bar{\lambda} - \lambda)^2}, \quad b \in \mathbb{C}^\pm. \quad (50)$$

Частное решение исходной задачи (1) в случае, когда комплексный потенциал имеет особенности в S_2 , теперь может быть найдено на основании соотношений (3), (4). Общее же решение составит сумма двух частных решений, соответствующих внутреннему и внешнему расположениям особенностей.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Если заданный комплексный потенциал $f(z)$ имеет лишь конечное число особенностей, не лежащих на линии сопряжения областей S_1 и S_2 , и $F(z) = F_1(z) + F_2(z)$, где $F_1(z)$, $F_2(z)$ – суммы простых дробей $F(z)$ с полюсами в S_1 , S_2 соответственно, тогда решение задачи (1) находится по формулам*

$$v_1(z) = F_1(z) + V^+(z) + \Delta(\overline{V^+(-\bar{z})} + \overline{F_1(-\bar{z})}) + (A - B\Delta)F_2(z), \quad z \in S_1, \quad (51)$$

$$v_2(z) = F_2(z) + F_1(z)/A + \begin{cases} V^+(z)/A - \Delta\overline{F_2(-\bar{z})}, & z \in \mathbb{C}^+ \setminus \overline{S_1}, \\ V^-(z)/A, & z \in \mathbb{C}^-, \end{cases} \quad (52)$$

где кусочно-голоморфная функция $V(z) = \{V^+(z), \mathbb{C}^+; V^-(z), \mathbb{C}^-\}$ есть сумма двух частных решений (42) и (48).

Замечание 1. Следует отметить, что функция $v_2(z)$, определенная формулой (52), в силу (5) непрерывна на \mathbb{R}_- и, следовательно, голоморфна в S_2 .

Замечание 2. В частном случае, когда заданный комплексный потенциал имеет в качестве особенностей лишь логарифмические особенности в конечных точках $z_1 \in S_1$ и $z_2 \in S_2$, то есть

$$F_1(z) = \frac{c_1}{z - z_1}, \quad F_2(z) = \frac{c_2}{z - z_2}, \quad (53)$$

искмое решение задачи (1) находится по формулам (51), (52), где кусочно-голоморфная функция $V(z) = \{V^+(z), z \in \mathbb{C}^+; V^-(z), z \in \mathbb{C}^-\}$ на основании формул (42), (48) имеет вид:

$$V(z) = V_1(z) + V_2(z) + \overline{F_2(-\bar{z})} B \begin{cases} I_{\mathbb{C}^-}(z_2), & \text{Im } z > 0, \\ -I_{\mathbb{C}^+}(z_2), & \text{Im } z < 0, \end{cases} \quad (54)$$

где $I_{\mathbb{C}}$ – характеристическая функция вида (49),

$$\begin{cases} V_i(z) = \overline{F_i(-\bar{z})}L^1(z; \bar{z}_i) + \overline{F_i(\bar{z})}L^2(z; -\bar{z}_i) + F_i(-z)L^3(z; z_i) + F_i(z)L^4(z; -z_i), \\ L^j(z; z_i) = l_j(z_i)R(z/z_i, \alpha) + \overline{l_j(z_i)}R(z/z_i, -\alpha), \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad i = 1, 2, \end{cases} \quad (55)$$

где коэффициенты $l_j(z_1)$, $l_j(z_2)$ определяются формулами (44) и (50) соответственно, а

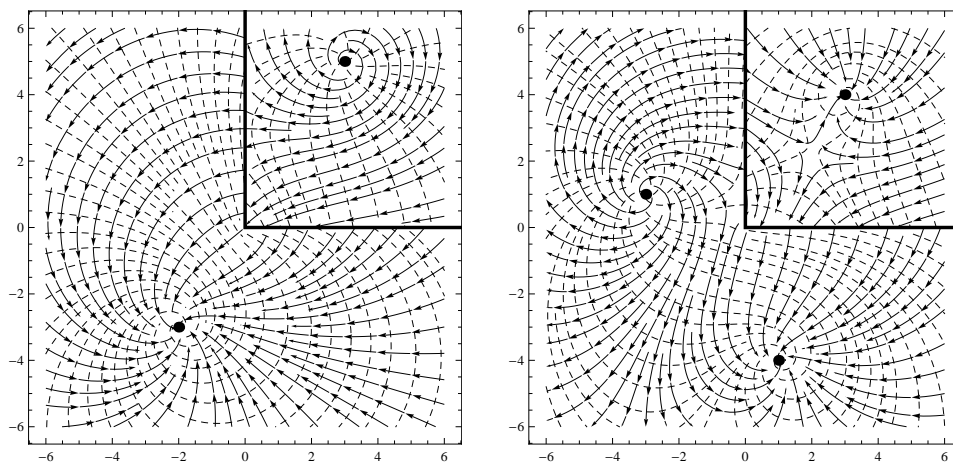
$$R(z; \alpha) = e^{\mp \pi \alpha i} z^\alpha - 1, \quad z \in \mathbb{C}^\pm. \quad (56)$$

Пример. Пусть $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 10$. На рис. 2 приведены распределения линий тока и эквипотенциалей, полученные с помощью формул (53)–(56). Левый рисунок соответствует случаю вихре-источника в точке $z_1 = 3 + 5i$ и вихре-стока в точке $z_2 = -2 - 3i$, когда

$$F_1(z) = \frac{1 + 3i}{z - 3 - 5i}, \quad F_2(z) = \frac{-2 - i}{z + 2 + 3i}.$$

На правом рисунке приведена картина поля в случае вихреисточника в точке $z_2^1 = -3 + i$ и двух вихресток в точках $z_1 = 3 + 4i$, $z_2^2 = 1 - 4i$:

$$F_1(z) = \frac{-3 + i}{z - 3 - 4i}, \quad F_2(z) = \frac{-2 - i}{z - 1 + 4i} + \frac{2 + 3i}{z + 3 - i}.$$

Рис. 2. $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 10$

Замечание 3. В случае вырождения среды в однородную, когда $\rho_1 = \rho_2$, имеем в силу (2), (12), что $\Delta = 0$, $\alpha = 0$, и формулы (48), (51), (52) приводят к результату

$$v_1(z) = v_2(z) = F_1(z) + F_2(z).$$

Summary

T.V. Nikonenkova. \mathbb{R} -Linear Conjugation Problem for a Rectangular Wedge in the Class of Piecewise Meromorphic Functions.

The paper presents an analytical solution for the problem of perturbation of a given complex potential by inserting a foreign inclusion of the form of a rectangular wedge into an infinite isotropic medium.

Key words: holomorphic functions, heterogeneous medium, \mathbb{R} -linear conjugation problem.

Литература

1. *Обносов Ю.В.* Решение задачи \mathbb{R} -линейного сопряжения теории композитов для одной трехкомпонентной среды // Изв. вузов. Матем. – 1996. – № 5. – С. 63–72.
2. *Obnosov Yu.V.* A generalized Milne-Thomson theorem // Appl. Math. Lett. – 2006. – V. 19, No 6. – P. 581–586.
3. *Obnosov Yu.V., Nikonenkova T.V.* Solution of an \mathbb{R} -linear conjugation problem on the case of hyperbolic interface // Lithuanian Math. J. – 2008. – V. 48, No 3. – P. 322–331.
4. *Обносов Ю.В.* Краевые задачи теории гетерогенных сред. Многофазные среды, разделенные кривыми второго порядка. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2009. – 205 с.

Поступила в редакцию
16.01.12

Никоненкова Татьяна Владимировна – аспирант кафедры дифференциальных уравнений Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: nikaatv@rambler.ru