УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2019, Т. 161, кн. 4 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 536–542 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 517.954 doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.536-542

АНАЛОГ ФОРМУЛЫ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ

Д.Б. Кац, Б.А. Кац

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Дифференциальные уравнения Бельтрами представляют собою одно из наиболее естественных обобщений уравнений Коши – Римана комплексного анализа. Соответственно, их решения являются близким обобщением голоморфных функций. Решение многих задач комплексного анализа основано на использовании интегральной формулы Коши, то есть интегрального представления аналитических функций контурными интегралами по границе области голоморфности. В частности, на этом представлении основано решение краевой задачи Римана для голоморфных функций, доказательство теоремы Пенлеве об устранении особенностей аналитических функций и многие другие результаты. А.Б. Тунгатаров получил аналог такого представления решений для одного простого частного случая уравнения Бельтрами (так называемых бета-аналитических функций). Представление Тунгатарова было затем использовано Р. Абреу-Блайя, Х. Бори-Рейес и Д. Пенья-Пенья для решения задач Римана, Пенлеве и др. для этих функций. В настоящей работе строятся такие интегральные представления для решений более обширных классов уравнений Бельтрами, во многих отношениях аналогичные интегральной формуле Коши для аналитических функций, и даются их приложения в задачах указанных выше типов.

Ключевые слова: уравнение Бельтрами, формула Коши, интегральное представление

Введение

Уравнение Бельтрами имеет вид

$$\overline{\partial}\phi = \mu\partial\phi, \quad |\mu(z)| < 1,$$

где, как обычно,

$$\overline{\partial} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \partial := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Это уравнение хорошо известно и имеет множество приложений (см., например, [1–3]).

В нашей работе [4] рассмотрен следующий частный случай этого уравнения. Пусть в области Δ комплексной плоскости задана аналитическая функция $f(z)$, отличная от постоянной. Положим

$$g(z) := f(z)|f(z)|^{2\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Эта функция является одним из решений уравнения Бельтрами

$$\overline{\partial}\phi = \beta\,\frac{f}{\overline{f}}\,\frac{\overline{f}'}{f'}\,\partial\phi, \quad \beta := \frac{\alpha}{1+\alpha}. \tag{1}$$

При $f(z) \equiv z$ это уравнение рассматривал А.Б. Тунгатаров [5].

В работе [4] для решений уравнения (1) в области $D \subset \Delta$ с кусочно гладкой границей Γ предложено представление

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i(1-\beta)} \int\limits_{\Gamma} \frac{\phi(t) f'(t)\,dt}{f(t) - f(z)\,|f(z)/f(t)|^{2\alpha}} + \\ \frac{\beta}{2\pi i(1-\beta)} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\phi(t)\overline{f'(t)\,dt}}{\overline{f(t)}(f(t) - f(z)\,|f(z)/f(t)|^{2\alpha})}, \tag{2}$$

которое можно рассматривать как аналог интегральной формулы Коши для решений уравнения (1). Доказательство его справедливости состоит из двух частей: сначала оно устанавливается для однолистных функций f, а затем для неоднолистных. К сожалению, во вторую часть доказательства вкралась неточность, на которую указал Е. Емельянов, за что мы чрезвычайно ему благодарны.

Таким образом, представление (2) справедливо в случае, когда функция f однолистна, и это доказано в сообщении [4]. Здесь мы покажем, что для неоднолистной функции f оно может видоизмениться.

Настоящая статья построена следующим образом. Сначала мы устраним указанную выше неточность и получим точную форму интересующего нас интегрального представления, а затем обсудим некоторые его приложения.

1. Интегральная формула Коши

Как уже отмечалось, в случае однолистной функции f представление (2) доказано в [4]. Здесь мы приведем рассуждение, которое можно использовать как для однолистных, так и для неоднолистных функций f.

Обозначим $h = f/f'$, $\overline{\partial}^{\beta} = \overline{\partial} - \beta\,\dfrac{h}{\overline{h}}\,\partial$. Пусть D – конечная область с кусочногладкой жордановой границей Γ, и замыкание D лежит в Δ. Будем считать, что функции ϕ и ψ непрерывно дифференцируемы в $D \setminus E$, где множество E состоит из конечного числа точек области D, причем $\overline{\partial}^{\beta}\psi \equiv 0$ в $D \setminus E$. Тогда

$$\overline{\partial}\,\frac{\phi\psi}{h} - \beta\partial\,\frac{\phi\psi}{\overline{h}} = \frac{\phi\overline{\partial}\psi + \psi\overline{\partial}\phi}{h} - \beta\,\frac{\phi\partial\psi + \psi\partial\phi}{\overline{h}} = \frac{\phi}{h}\,\overline{\partial}^{\beta}\psi + \frac{\psi}{h}\,\overline{\partial}^{\beta}\phi,$$

и тождество

$$\frac{\psi}{h}\,\overline{\partial}^{\beta}\phi = \overline{\partial}\,\frac{\phi\psi}{h} - \beta\partial\,\frac{\phi\psi}{\overline{h}}$$

справедливо во всех точках, в которых все его члены имеют смысл.

Будем считать, что функция $h(z)$ не имеет ни нулей, ни полюсов на кривой Γ, а N и P – это множества ее нулей и полюсов, лежащих внутри D. Оба эти множества состоят из конечного числа точек. Для $w \in D$ обозначим $B_w = \{z : |z-w| < \varepsilon\}$, $\gamma_w = \partial B_w$, где $\varepsilon > 0$ настолько мало, что круги B_w полностью лежат в D. Положим $E' := E \bigcup N \bigcup P$, $D' = D \setminus \bigcup\limits_{w\in E'} B_w$. При естественных ограничениях формула Грина дает

$$\iint\limits_{D'} \frac{\psi(\zeta)}{h(\zeta)} \overline{\partial}^{\beta} \phi(\zeta)\, dx_\zeta\, dy_\zeta = \frac{1}{2i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\phi(t)\psi(t)}{h(t)}\, dt + \frac{\beta}{2i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\phi(t)\psi(t)}{\overline{h(t)}}\, d\bar{t}$$
$$- \sum_{w \in E'} \left(\frac{1}{2i} \int\limits_{\gamma_w} \frac{\phi(t)\psi(t)}{h(t)}\, dt + \frac{\beta}{2i} \int\limits_{\gamma_w} \frac{\phi(t)\psi(t)}{\overline{h(t)}}\, d\bar{t} \right). \quad (3)$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. Если в точке w функция h имеет полюс, то пределы последних двух интегралов равны нулю. Если эта точка есть простой нуль h, то в пределе эти интегралы дают

$$\pi \frac{\phi(w)\psi(w)}{h'(w)} - \pi\beta \frac{\phi(w)\psi(w)}{\overline{h'(w)}}.$$

Кратных нулей функция h иметь не может, а ее производная $h' = 1 - \dfrac{ff''}{(f')^2}$ равна единице в точках, где функция f обращается в нуль. Таким образом, предел финальной части суммы в (3) в точках множества N равен

$$\pi(1-\beta) \sum_{w \in N} \phi(w)\psi(w),$$

а точки множества P дают нулевой вклад в этот предел.

Теперь зафиксируем точку $z \in D$ и положим

$$\phi(\zeta) := \frac{g(\zeta)}{g(\zeta) - g(z)}.$$

Эта функция удовлетворяет условию $\overline{\partial}^{\beta} \phi = 0$ всюду в D, за исключением точек обращения в нуль ее знаменателя. Такие точки образуют множество $E = \{\zeta \in D : f(\zeta) = f(z)\}$, то есть это множество f-конгруэнтных z точек в области D.

В точках множества N эта функция ϕ обращается в нуль; тогда обращается в нуль и последняя сумма. Двойной интеграл в формуле (3) также равен нулю. Несложные вычисления пределов остальных слагаемых в этой формуле приводят к такому результату.

Теорема 1. *Пусть $D \subset \Delta$ есть конечная область с кусочно-гладкой границей Γ, а заданная в Δ непостоянная голоморфная функция $f(z)$ не обращается в нуль на Γ. Тогда для любого решения $\phi(z)$ уравнения Бельтрами* (1) *в области D справедливо равенство*

$$\sum_{\zeta \in E} \phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i(1-\beta)} \int\limits_{\Gamma} \frac{\phi(t) f'(t)\, dt}{f(t) - f(z)\, |f(z)/f(t)|^{2\alpha}} +$$
$$+ \frac{\beta}{2\pi i(1-\beta)} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\phi(t)\overline{f'(t)\, dt}}{\overline{f(t)}(f(t) - f(z)\, |f(z)/f(t)|^{2\alpha})}, \quad (4)$$

В левой части суммирование ведется по множеству всех f-конгруэнтных z точек области D, включая саму точку z.

Замечание 1. Если функция f однолистна, то равенство (4) превращается в представление (2). В свою очередь, при $f(z) \equiv z$ это представление совпадает с полученным А.Б. Тугатаровым в работе [5].

Замечание 2. Если точка z лежит вне области D, то равенство (4) приобретает вид

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\phi(t) f'(t)\, dt}{f(t) - f(z)\, |f(z)/f(t)|^{2\alpha}} + \beta \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\phi(t)\overline{f'(t)\, dt}}{\overline{f(t)}(f(t) - f(z)\, |f(z)/f(t)|^{2\alpha})} = 0.$$

Замечание 3. Если функция $\phi(t)$ задана лишь на Γ, то сумму интегралов в левой части предыдущего равенства можно использовать в качестве интеграла типа Коши для уравнения (1). Простая проверка показывает, что функция

$$\Phi(z) = \int\limits_{\Gamma} \frac{\phi(t) f'(t)\, dt}{f(t) - f(z)\, |f(z)/f(t)|^{2\alpha}} + \beta \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\phi(t)\overline{f'(t)\, dt}}{\overline{f(t)}(f(t) - f(z)\, |f(z)/f(t)|^{2\alpha})}$$

удовлетворяет уравнению Бельтрами (1) в $\Delta \setminus \Gamma$.

2. Некоторые приложения

Представление (4) – это аналог интеграла Коши. Многие фундаментальные результаты комплексного анализа получены на его основе. Полученное нами представление создает возможности доказательства аналогов этих результатов для решений уравнений Бельтрами введенного нами класса. Мы убедимся в этом на примере теоремы Пенлеве.

Пенлеве установил следующее: если функция $F(z)$ непрерывна в области G и голоморфна в $G \setminus \Gamma$, где Γ – лежащая в G спрямляемая кривая, то эта функция голоморфна в D (см. [6, 7]).

Мы получим аналог этого результата для решений уравнения Бельтрами (1). Он анонсирован в работе [4] и доказан в ней для случая однолистной функции f (см. Введение). Здесь мы формулируем и доказываем его в общем случае, то есть без использования глобальной однолистности этой функции. Для изученного А.Б. Тунгатаровым случая $f(z) \equiv z$ этот результат был установлен в работе [8].

Теорема 2. *Пусть γ – лежащая в области D спрямляемая кривая. Если функция $\phi(z)$ в области D удовлетворяет условию Гёльдера, а в $D \setminus \gamma$ – уравнению Бельтрами* (1)*, то эта функция удовлетворяет уравнению* (1) *во всей области D.*

Доказательство. Пусть ϕ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем ν. Размерность Хаусдорфа (см., например, [7]) любой спрямляемой кривой равна единице. Поэтому для любых $\varepsilon > 0$ и $1 < \lambda < 1 + \nu$ спрямляемую кривую γ можно покрыть конечным семейством кругов $B_1, B_2, \ldots, B_n$ радиусов $r_1, r_2, \ldots, r_n$ таким что $r_j \le \varepsilon, j = 1, 2, \ldots, n$, и $\sum\limits_{j=1}^{n} r_j^{\lambda} \le \varepsilon$. Без ограничения общности можно считать, что ни один из этих кругов не накрывается объединением остальных, и что круги занумерованы в порядке убывания их радиусов. Обозначим $B = \bigcup\limits_{j=1}^{n} B_j$ и введем области $b_1 = B_1$, $b_2 = B_2 \setminus B_1$, $b_3 = B_3 \setminus B_1 \cup B_2$ и т. д. Ясно, что длина границы b_j не превосходит $2\pi r_j$. Далее, пусть Λ – замкнутая гладкая кривая, ограничивающая область $G \supset \gamma$. Обозначим

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i(1-\beta)} \int\limits_{\Gamma} \frac{\phi(t) f'(t)\, dt}{f(t) - f(z)\,|f(z)/f(t)|^{2\alpha}} + \\ + \frac{\beta}{2\pi i(1-\beta)} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\phi(t)\overline{f'(t)\, dt}}{\overline{f(t)}(f(t) - f(z)\,|f(z)/f(t)|^{2\alpha})}.$$

В области G эта функция удовлетворяет уравнению (1), и остается доказать, что в этой области $\Phi = \phi$.

При достаточно малом ε функция f однолистна во всех областях b_j за возможным исключением нескольких, причем количество этих исключительных областей не превосходит величины, не зависящей от ε. Применив представление (2) там, где функция f однолистна, мы получим в области G оценку разности $\Phi - \phi$ положительной степенью ε. Поскольку ни Φ, ни ϕ от ε не зависят, то эти две функции совпадают. Теорема доказана. □

Благодарности. Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2020-1478).

Литература

1. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
2. *Bojarski B.* Old and new on Beltrami equation // Mshimba A.S.A., Tutschke W. (Eds.) Functional Analytic Methods in Complex Analysis and Applications to Partial Differential Equations: Proc. ICTP, Trieste, Italy, Feb., 8–19, 1988. – London: World Sci., 1988. – P. 173–188.
3. *Iwaniec T., Martin G.* What's new for the Beltrami equation? // Proc. Cent. Math. Appl. – Canberra: Austr. Natl. Univ., 2001. – V. 39. – P. 132–148.
4. *Кац Д.Б., Кац Б.А.* Интегральные представления решений некоторых уравнений Бельтрами // Изв. вузов. Матем. – 2018. – № 3. – С. 23–28.
5. *Тунгатаров А.Б.* О свойствах одного интегрального оператора в классах суммируемых функций // Изв. АН Каз. ССР. Сер. физ.-матем. – 1985. – № 5. – С. 58–62.
6. *Painlevé P.* Sur les lignes singulieres des fonctions analytiques // Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques – 1888. – T. 2. – P. B1–B130.
7. *Маркушевич А.И.* Избранные главы теории аналитических функций. – М.: Наука, 1976. – 192 с.
8. *Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., Peña-Peña D.* On the jump problem for β-analytic functions // Complex Var. Elliptic Equations. – 2006. – V. 51, No 8–11. – P. 763–775. – doi: 10.1080/17476930600667486.

Поступила в редакцию
26.08.19

Кац Давид Борисович, кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры математического анализа

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *katsdavid89@gmail.com*

Кац Борис Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *katsboris877@gmail.com*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2019, vol. 161, no. 4, pp. 536–542

doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.536-542

An Analog of the Cauchy Formula for Certain Beltrami Equations

D.B. Katz, B.A. Kats***

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: **katsdavid89@gmail.com*, ***katsboris877@gmail.com*

Received August 28, 2019

Abstract

The Beltrami differential equations are intrinsic generalizations of the Cauchy–Riemann system in complex analysis. Their solutions generalize holomorphic functions. As known, solutions to many problems of the complex analysis are based on application of the Cauchy formula, i.e., on the integral representation of analytical functions by curvilinear integrals over boundaries of the domains of analyticity. Particularly, this representation enables us to solve the Riemann boundary-value problem for holomorphic functions, to prove the Painleve theorem on erasing of singularities of analytical functions, and to obtain many other important results. A. Tungatarov established an analog of this representation of solutions to a certain simple case of the Beltrami equation (so-called beta-analytic functions). A. Tungatarov's representation was used by R. Abreu-Blaya, J. Bory-Reyes, and D. Peña-Peña for solving the problems stated by B. Riemann, P. Painleve, and other researchers. In this paper, we constructed integral representations for the solutions of more extensive classes of the Beltrami equations, which are analogs of the integral Cauchy formula, and described their applications.

Keywords: Beltrami equation, Cauchy formula, integral representation

Acknowledgments. The work was performed as part of the development program of the Scientific and Educational Mathematical Center of the Volga Federal District (agreement no. 075-02-2020-1478).

References

1. Vekua I.N. *Generalized Analytic Functions.* Vol. 25. Sneddon I.N., Ulam S., Stark M. (Eds.). Pergamon Press, 1962. 698 p.

2. Bojarski B. Old and new on Beltrami equation. *Functional Analytic Methods in Complex Analysis and Applications to Partial Differential Equations: Proc. ICTP, Trieste, Italy, Feb., 8–19, 1988.* Mshimba A.S.A., Tutschke W. (Eds.). London, World Sci., 1988, pp. 173–188.

3. Iwaniec T., Martin G. What's new for the Beltrami equation? *Proc. Cent. Math. Appl.* Canberra, Aust. Natl. Univ., 2001, vol. 39, pp. 132–148.

4. Katz D.B., Kats B.A. Integral representations for solutions of some types of the Beltrami equations. *Russ. Math.*, 2018, vol. 62, no. 3, pp. 18–22. doi: 10.3103/S1066369X18030039.

5. Tungatarov A.B. Properties of an integral operator in classes of summable functions. *Izv. Akad. Nauk Kaz. SSR, Ser. Fiz.-Mat.*, 1985, no. 5, pp. 58–62. (In Russian)

6. Painlevé P. Sur les lignes singulieres des fonctions analytiques. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques*, 1888, t. 2, pp. B1–B130. (In French)

7. Markushevich A.I. *Izbrannye glavy teorii analiticheskikh funktsii* [Selected Chapters of the Theory of Analytic Functions]. Moscow, Nauka, 1976. 192 p. (In Russian)

8. Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., Peña-Peña D. On the jump problem for β-analytic functions. *Complex Var. Elliptic Equations*, 2006, vol. 51, nos. 8–11, pp. 763–775. doi: 10.1080/17476930600667486.

⟨ ***Для цитирования*:** *Кац Д.Б., Кац Б.А.* Аналог формулы Коши для некоторых уравнений Бельтрами // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2019. – Т. 161, кн. 4. – С. 536–542. – doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.536-542. ⟩

⟨ ***For citation*:** Katz D.B., Kats B.A. An analog of the Cauchy formula for certain Beltrami equations. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 161, no. 4, pp. 536–542. doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.536-542. (In Russian) ⟩