

УДК 517.544

## ЗАДАЧА РИМАНА В СЛУЧАЕ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ДУГ. I

*Е.П. Аксентьева, И.Г. Салехова*

### Аннотация

Рассматривается решение задачи о скачке, однородной и неоднородной задач Римана  $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t)$ ,  $t \in L$ , в случае двоякопериодического расположения дуг. Исследован случай периодических коэффициента  $G(t)$  и свободного члена  $g(t)$ . На основании результатов решения задачи Римана для счетного множества контуров дано обобщение решения задачи о скачке ( $G(t) \equiv 1$ ) на случай непериодического скачка  $g(t)$ .

**Ключевые слова:** задача Римана, двоякопериодическое расположение дуг, эллиптическая функция, квазиэллиптическая функция, периодический коэффициент и свободный член, счетное множество дуг, непериодические скачки.

### Введение

Задача Римана для разомкнутого контура в классе двоякопериодических функций рассматривалась в статье [1], где давалась общая схема решения. В п.п. 1,2 данной работы к решению этой задачи применяется иной подход с использованием квазипериодических функций [2]. Это позволило упростить исследование задачи и исправить неточность в случае нулевого индекса.

В п. 3 с учетом результатов решения задачи Римана в случае счетного множества контуров [3, с. 236–274; 4] дано обобщение задачи о скачке на случай непериодического скачка. Предложенный аппарат позволяет исследовать задачу Римана для непериодического коэффициента. Этот результат будет изложен во второй части статьи.

### 1. Случай периодических коэффициента и свободного члена

**1.1. Постановка задачи.** Пусть  $R = \{z = s_1\omega_1 + s_2\omega_2, 0 < s_1 < 1, 0 < s_2 < 1\}$  есть внутренность параллелограмма с вершинами  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = \omega_1$ ,  $t_3 = \omega_1 + \omega_2$ ,  $t_4 = \omega_2$ ;  $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$ . Под  $\partial R$  будем понимать границу  $R$ , проходящую против часовой стрелки. При таком обходе, начиная с точки  $\omega_2$ , стороны  $\partial R$  обозначим через  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l'_1$ ,  $l'_2$ . Тогда  $T_1(l_1) = l'_1$ ,  $T_2(l_2) = l'_2$ , где  $T_1 = z + \omega_1$ ,  $T_2 = z + \omega_2$  – порождающие преобразования двоякопериодической группы  $T_\omega$

$$\{z \mapsto z + \omega; \omega = k_1\omega_1 + k_2\omega_2, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Пусть  $\Pi = R \cup l_1 \cup l_2 \cup \{0\}$ ,  $L_0 = (\widehat{a_0, b_0}) \in R$  – гладкая разомкнутая дуга (рис. 1)

**Определение.** Назовем двоякопериодической кусочно-голоморфной с линией скачков  $L_0$  функцию  $\Phi(z)$ , удовлетворяющую следующим условиям:

- 1)  $\Phi(z)$  голоморфна для всех  $z \in \Pi \setminus L_0$ ;
- 2)  $\Phi(z)$  непрерывно продолжима на  $L_0$  слева и справа;
- 3)  $\Phi(z + \omega_k) = \Phi(z)$  для всех  $z \in \Pi \setminus L_0$ ;

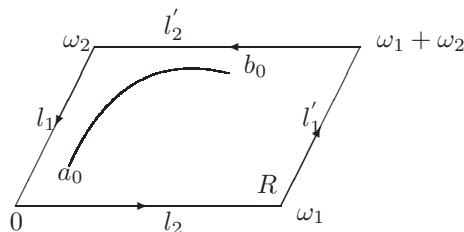


Рис. 1

4) Вблизи концов  $a_0, b_0$  для функции  $\Phi(z)$  выполняется неравенство

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{const}}{|z - c_0|^\gamma}, \quad 0 \leq \gamma < 1$$

как для  $c_0 = a_0$ , так и для  $c_0 = b_0$ .

Из этого определения следует, что  $\Phi(z)$  аналитически продолжима на область  $\mathbb{C} \setminus T_\omega(\bar{L}_0)$  и является там двоякопериодической функцией.

Требуется найти двоякопериодическую кусочно-голоморфную с линией скачков  $L_0$  функцию  $\Phi(z)$  по краевому условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L_0, \tag{1.1}$$

где  $G(t), g(t)$  – заданные функции,  $G(t), g(t) \in H_\lambda(\bar{L}_0)$  и  $G(t) \neq 0$  при  $t \in \bar{L}_0$ .

Поставленная задача равносильна краевой задаче с условием (1.1) при  $t \in T_\omega(L_0)$ , где  $G(t), g(t)$  удовлетворяют условию

$$G(t + \omega) = G(t), \quad g(t + \omega) = g(t), \quad t \in \bar{L}_0.$$

Основным аппаратом для решения поставленной задачи является [1] интеграл

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \varphi(\tau) \zeta(\tau - z) d\tau, \tag{1.2}$$

где

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum'_{k_1, k_2 = -\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{u - \omega} + \frac{u}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} \right), \quad k_1^2 + k_2^2 \neq 0,$$

есть дзета-функция Вейерштрасса,  $\varphi(t) \in H_\lambda(\bar{L}_0)$ . Отметим следующие свойства этого интеграла.

1°.  $I(z)$  является кусочно-голоморфной функцией с линией скачков  $L_0$ , удовлетворяет формулам Сохоцкого

$$I^\pm(t) = \pm \frac{\varphi(t)}{2} + I(t), \quad t \in L_0.$$

2°.  $I(z)$  – квазипериодическая функция, так как

$$I(z + \omega_k) = I(z) - \frac{\eta_k}{2\pi i} \int_{L_0} \varphi(\tau) d\tau, \quad \eta_k = 2\zeta(\omega_k/2), \quad k = 1, 2.$$

3°. В окрестности конца  $c_0$  функция имеет поведение вида

$$I(z) = \mp \frac{\varphi(c_0)}{2\pi i} \ln(z - c_0) + I_0(z),$$

где знак минус соответствует точке  $c_0 = a_0$ , знак плюс — точке  $c_0 = b_0$ , функция  $I_0(z)$  имеет в  $c_0$  конечный предел.

Заметим, что, наряду с интегралом (1.2), всеми свойствами интеграла типа Коши обладает интеграл

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \varphi(\tau) [\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau)] d\tau,$$

отличающийся от интеграла (1.2) нормировкой  $I_0(0) = 0$ .

**1.2. Задача о скачке.** Рассмотрим поставленную задачу при  $G(t) \equiv 1$ :

$$\Phi^+(t) = \Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L_0. \quad (1.3)$$

Справедлива

**Лемма 1.1.** *Необходимым условием разрешимости задачи (1.3) является равенство*

$$\int_{L_0} g(t) dt = 0. \quad (1.4)$$

**Доказательство.** Пусть задача (1.3) имеет решение. Проинтегрируем равенство (1.3) по  $L_0$ :

$$\int_{L_0} \Phi^+(t) dt = \int_{L_0} \Phi^-(t) dt + \int_{L_0} g(t) dt. \quad (1.5)$$

Применив к двусвязной области  $R \setminus \bar{L}_0$  теорему Коши, получим

$$\int_{\partial R} \Phi(t) dt + \int_{L_0} \Phi^+(t) dt - \int_{L_0} \Phi^-(t) dt = 0,$$

откуда следует равенство  $\int_{L_0} \Phi^+(t) dt = \int_{L_0} \Phi^-(t) dt$ , так как  $\int_{\partial R} \Phi(t) dt = 0$  в силу периодичности функции  $\Phi(z)$ . Теперь из (1.5) следует (1.4).  $\square$

Интеграл  $I_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} g(\tau) \zeta(\tau - z) d\tau$  в силу свойств 1°–3° и условия (1.4)

является частным решением задачи (1.3). Чтобы найти ее общее решение, заметим, что разность  $\Phi(z) - I_1(z)$ , не имея скачка на  $L_0$ , является двоякопериодической, голоморфной (после соответствующего доопределения в точке  $c_0$ ) в  $\Pi$  и, следовательно, постоянной.

Таким образом, доказана

**Теорема 1.1.** *Критерием разрешимости задачи (1.3) является условие (1.4). При его выполнении общее решение задачи (1.3) имеет вид*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} g(\tau) \zeta(\tau - z) d\tau + C, \quad (1.6)$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

**Замечание.** Если  $g(c_0) = 0$ , то в окрестности  $c_0$  функция  $\Phi(z)$  ограничена, при  $g(c_0) \neq 0$  она имеет в  $c_0$  логарифмическую особенность.

**1.3. Однородная задача.** Найдем решение  $\Phi_0(z)$  однородной задачи с краевым условием

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in L_0. \quad (1.7)$$

За каноническую функцию задачи (1.7) возьмем

$$X_0(z) = \exp \Gamma(z), \quad \text{где } \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \ln G(\tau) \zeta(\tau - z) d\tau,$$

причем под  $\ln G(t)$  понимаем некоторую однозначную ветвь этой функции.

Функция  $X_0(z)$  является кусочно-голоморфной, удовлетворяющей условию (1.7), а в окрестности концов  $c_0$ , согласно свойству  $3^\circ$ , имеет поведение вида

$$X_0(z) = (z - c_0)^{\alpha_0^\mp + i\beta_0^\mp} X_1(z), \quad \alpha_0^\mp + i\beta_0^\mp = \mp \frac{\ln G(c_0)}{2\pi i},$$

где знак «минус» выбирается при  $c_0 = a_0$ , «плюс» – при  $c_0 = b_0$ , а функция  $X_1(z)$  имеет конечные пределы, отличные от нуля, при  $z \rightarrow c_0$ .

Назовем конец  $c_0$  особенным, если  $\alpha_0^\pm \in \mathbb{Z}$ , и неособенным – в противном случае [5, с. 256]. Закрепим фиксацию ветви  $\ln G(t)$  следующим образом:

а) если  $a_0$  – особенный конец, то есть  $\alpha_0^- = -\frac{\arg G(a_0)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$ , то выберем ветвь  $\ln G(t)$  так, чтобы  $\arg G(a_0) = 0$ ;

б) если  $a_0$  – неособенный конец, и в нем требуется ограниченность решения ( $\Phi_0(z) \in h(a_0)$ ), то выберем ветвь  $\ln G(t)$  так, чтобы

$$0 < \alpha_0^- < 1 \Leftrightarrow -2\pi < \arg G(a_0) < 0; \quad (1.8)$$

в) если в неособенном конце  $a_0$  не требуется ограниченности, то выберем ветвь  $\ln G(t)$  так, чтобы

$$-1 < \alpha_0^- < 0 \Leftrightarrow 0 < \arg G(a_0) < 2\pi. \quad (1.9)$$

Теперь ветвь  $\ln G(t)$  фиксирована на всей дуге.

Назовем *индексом* задачи (1.7) такое целое число  $\varkappa$ , что если  $b_0$  – особенный конец, то  $\varkappa = \alpha_0^+$ , если  $b_0$  – неособенный конец, то

$$0 < \alpha_0^+ - \varkappa < 1, \quad (1.10)$$

когда требуется ограниченность решения в точке  $b_0$  ( $\Phi_0(z) \in h(b_0)$ ), и

$$-1 < \alpha_0^+ - \varkappa < 0, \quad (1.11)$$

когда ограниченности не требуется.

Функция  $\Phi_0(z) \in h(a_0, b_0)$ , если она ограничена в неособенных концах  $a_0, b_0$ , а  $\Phi_0(z) \in h_0$  означает, что в обоих концах допускается неограниченность.

Функция  $X_0(z)$  является квазипериодической [2], так как

$$X_0(z + \omega_k) = X_0(z) \exp(-\eta_k \alpha), \quad k = 1, 2, \quad \alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \ln G(\tau) d\tau.$$

Заметим, что постоянная  $\alpha$  зависит от значения  $\alpha_0$ , а следовательно, и от класса, в котором ищется решение  $\Phi_0(z)$ .

Рассмотрим отношение  $f(z) = \Phi_0(z)/X_0(z)$ . Это квазиэллиптическая функция с условием  $f(z+\omega_k) = f(z)\exp(\eta_k\alpha)$ . В точке  $a_0$  функция  $f(z)$  ограничена, а в конце  $b_0$  имеет порядок не ниже  $(-\varkappa)$  (так как при указанном выборе  $\varkappa$  произведение  $f(z)(z-b_0)^\varkappa$  допускает в точке  $b_0$  интегрируемую особенность).

1) Пусть  $\varkappa > 0$ , тогда  $f(z)$  допускает в конце  $b_0$  полюс порядка  $\varkappa$ , а следовательно, в  $\Pi$  содержится  $\varkappa$  нулей. Обозначим через  $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_\varkappa$  полную систему нулей  $f(z)$  с условием

$$\sum_{j=1}^{\varkappa} (b_0 - \tilde{b}_j) = \alpha. \quad (1.12)$$

Тогда имеем  $f(z) = C \prod_{j=1}^{\varkappa} \frac{\sigma(z - \tilde{b}_j)}{\sigma(z - b_0)}$ , где  $C$  – произвольная постоянная,  $\sigma(z)$  – сигма-функция Вейерштрасса. Отсюда  $\Phi_0(z) = X_0(z)f(z)$ .

Полученное решение как решение однородной задачи можно представить и в виде линейной комбинации линейно-независимых решений, используя результаты из [2]. Для этого представим  $f(z)$  в виде

$$f(z) = \left[ \frac{\sigma(z - b_0 + \alpha/\varkappa)}{\sigma(z - b_0)} \right]^\varkappa \left[ C_0 + \sum_{j=2}^{\varkappa} C_j \zeta^{(j-1)}(z - b_0 + \alpha/\varkappa) \right], \quad (1.13)$$

где  $C_0, C_j, j = 2, \dots, \varkappa$ , – произвольные постоянные, при  $\varkappa = 1$  сумма  $\sum_{j=2}^{\varkappa}$  отсутствует.

Формула (1.13) справедлива и для случая  $\alpha/\varkappa = \tilde{\omega}$  (здесь и в дальнейшем  $\tilde{\omega} = n_1\omega_1 + n_2\omega_2$  – фиксированный период,  $\tilde{\eta} = n_1\eta_1 + n_2\eta_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ ), но допускает упрощение:

$$f(z) = \exp(\tilde{\eta}z\varkappa) \left[ C_0 + \sum_{j=2}^{\varkappa} C_j \zeta^{(j-1)}(z - b_0) \right]. \quad (1.14)$$

2) Пусть  $\varkappa = 0$ . Критерием существования голоморфной квазиэллиптической функции  $f(z) \not\equiv 0$  является равенство  $\alpha = \tilde{\omega}$ . При его выполнении имеем  $f(z) = C \exp(\tilde{\eta}z)$ .

3) Пусть  $\varkappa < 0$ . Функция  $f(z)$ , являясь голоморфной и имеющей нуль порядка  $(-\varkappa)$  в точке  $b_0$ , будет равна нулю тождественно.

Таким образом, доказана

**Теорема 1.2.** *Однородная задача (1.7) при  $\varkappa > 0$  имеет  $\varkappa$  линейно-независимых решений. Множество всех решений задается формулой*

$$\Phi_0(z) = C \exp \Gamma(z) \prod_{j=1}^{\varkappa} \frac{\sigma(z - \tilde{b}_j)}{\sigma(z - b_0)}, \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \ln G(\tau) \zeta(\tau - z) d\tau,$$

где  $C, \tilde{b}_j, j = 1, \dots, \varkappa$  связаны соотношением (1.12), в остальном произвольны, или  $\Phi_0(z) = f(z)\exp \Gamma(z)$ , где  $f(z)$  определяется формулами (1.13), (1.14). При  $\varkappa = 0, \alpha = \tilde{\omega}$ , решение задачи (1.7) имеет вид  $\Phi_0(z) = C \exp[\Gamma(z) + \tilde{\eta}z]$ . При  $\varkappa = 0$ , когда  $\alpha \neq \tilde{\omega}$ , и при  $\varkappa < 0$  задача не имеет отличных от нуля решений.

**Замечание.** В особенном конце  $s_0$  функция  $\Phi_0(z)$  всегда ограничена. В случае, когда выполняются условия (1.8), (1.10), получим все решения задачи  $\Phi_0(z) \in h(a_0, b_0)$ . Если же выполняются условия (1.8), (1.11), то  $\Phi_0(z) \in h(a_0)$ . При выполнении условий (1.9), (1.10)  $\Phi_0(z) \in h(b_0)$ . И, наконец, при выполнении условий (1.9), (1.11)  $\Phi_0(z) \in h_0$ .

**1.4. Неоднородная задача.** Найдем решение  $\Phi(z)$  неоднородной задачи с краевым условием (1.1).

1) Пусть  $\varkappa > 0$ . За каноническую функцию задачи (1.1) возьмем

$$X(z) = \exp \Gamma(z) \left[ \frac{\sigma(z - \theta)}{\sigma(z - b_0)} \right]^\varkappa = X_0(z) \left[ \frac{\sigma(z - \theta)}{\sigma(z - b_0)} \right]^\varkappa, \quad (1.15)$$

где  $\Gamma(z)$  и индекс  $\varkappa$  определим так же, как и в однородной задаче. Функция (1.15) удовлетворяет условию

$$X(z + \omega_k) = X_0(z) \exp(\eta_k \beta), \quad k = 1, 2,$$

где  $\beta = \varkappa(b_0 - \theta) - \alpha$ , а точку  $\theta$  выберем так, что  $\theta \notin T_\omega(L_0)$  и число  $\beta$  не совпадает с периодом. Учитывая свойства функции  $X_0(z)$ , получим, что  $X(z)$  удовлетворяет на  $L_0$  условию (1.7), а по поведению на конце  $c_0$  принадлежит тому же классу, что и искомая функция  $\Phi(z)$ . Краевое условие (1.1) запишем в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \frac{g(t)}{X^+(t)}, \quad t \in L_0. \quad (1.16)$$

Для решения полученной задачи о скачке для квазиэллиптической функции  $\Phi(z)/X(z)$  используем квазипериодический по  $z$  аналог ядра Коши

$$A(\tau, z) = \frac{\sigma(\tau - z + \beta)}{\sigma(\beta)\sigma(\tau - z)}. \quad (1.17)$$

Функция  $\tilde{\Phi}(z) = X(z)\Psi(z)$ , где

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} A(\tau, z) \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} d\tau,$$

является частным решением задачи (1.1). Действительно, поскольку  $A(\tau, z) \sim 1/(\tau - z)$  при  $z \rightarrow \tau$ , то  $\Psi^+(t) = \Psi^-(t) + g(t)/(X^+(t))$ ,  $t \in L_0$ , и, следовательно,  $\tilde{\Phi}(z)$  удовлетворяет условию (1.1). Далее, так как  $A(\tau, z + \omega_k) = A(\tau, z) \exp(-\eta_k \beta)$ , то  $\tilde{\Phi}(z + \omega_k) = \tilde{\Phi}(z)$ . Обоснование поведения  $\tilde{\Phi}(z)$  в окрестности точки  $c_0$  аналогично [5, § 80] в случае задачи Римана для разомкнутого контура. Доказана

**Теорема 1.3.** *Неоднородная задача (1.1) при  $\varkappa > 0$  разрешима, и ее общее решение имеет вид  $\Phi(z) = \Phi_0(z) + \tilde{\Phi}(z)$ , где функция  $\Phi_0$  определена теоремой 1.2,*

$$\tilde{\Phi}(z) = \left[ \frac{\sigma(z - \theta)}{\sigma(z - b_0)} \right]^\varkappa \frac{\exp \Gamma(z)}{2\pi i} \int_{L_0} A(\tau, z) \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} d\tau,$$

$A(\tau, z)$  имеет вид (1.17),  $\beta = \varkappa(b_0 - \theta) - \alpha$ , точка  $\theta \notin T_\omega(L_0)$  и выбрана так, что число  $\beta$  не равно периоду.

2) Пусть  $\varkappa < 0$ . За каноническую функцию  $X(z)$  возьмем функцию вида (1.16), положив в ней  $\theta = b_0 - \alpha/\varkappa$ , откуда  $\beta = 0$ . Заметим, что при  $\varkappa > 0$  требование  $\beta = 0$  могло привести к расходимости интеграла  $\Psi(z)$  при попадании точки  $\theta$  на  $L_0$ . Теперь задача о скачке (1.16) исследуется в классе двоякопериодических функций  $\Phi(z)/X(z)$ . На основании теоремы 1.1 заключаем, что необходимым условием ее разрешимости является равенство

$$\int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} d\tau = 0. \quad (1.18)$$

Решение  $\Phi(z)$  имеет вид

$$\Phi(z) = [I_2(z) + C]X(z), \quad \text{где } I_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \zeta(\tau - z) d\tau,$$

если дополнительно потребовать, чтобы функция  $I_2(z) + C$  имела нуль порядка не меньше  $(-\varkappa)$  в точке  $\theta$ . Тогда  $C = -I_2(\theta)$  и

$$\int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \zeta^{(k)}(\tau - \theta) d\tau = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\varkappa - 1. \quad (1.19)$$

Результат не изменится, но упростится, когда  $\alpha/\varkappa$  равно периоду. Таким образом, доказана

**Теорема 1.4.** *Неоднородная задача (1.1) при  $\varkappa < 0$  разрешима тогда и только тогда, когда выполняются  $(-\varkappa)$  условий разрешимости (1.19) (при  $\varkappa < -1$ ) и (1.18). При их выполнении единственное решение задачи определяется формулой*

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} [\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau - \theta)] d\tau,$$

где

$$X(z) = \exp \Gamma(z) \left[ \frac{\sigma(z - \theta)}{\sigma(z - b_0)} \right]^\varkappa, \quad \theta = b_0 - \alpha/\varkappa.$$

3) Пусть  $\varkappa = 0$ . Существенно различными являются здесь случаи совпадения и несовпадения числа  $\alpha$  с периодом.

Пусть  $\alpha \neq \omega$ . Исследуем задачу (1.1) так же, как при  $\varkappa > 0$ , полагая во всех формулах  $\varkappa = 0$ . Тогда имеем

$$X(z) = \exp \Gamma(z), \quad X(z + \omega_k) = X(z) \exp(-\eta_k \alpha),$$

$$A(\tau, z) = \frac{\sigma(\tau - z - \alpha)}{\sigma(-\alpha)\sigma(\tau - z)}, \quad A(\tau, z + \omega_k) = A(\tau, z) \exp(\eta_k \alpha), \quad k = 1, 2.$$

Единственным решением здесь будет функция

$$\Phi(z) = \frac{\exp \Gamma(z)}{2\pi i} \int_{L_0} A(\tau, z) \frac{g(\tau) d\tau}{\exp \Gamma^+(\tau)}. \quad (1.20)$$

При  $\alpha = \tilde{\omega}$  рассуждаем по аналогии со случаем  $\varkappa < 0$ . За каноническую функцию возьмем  $X(z) = \exp[\Gamma(z) + \tilde{\eta}z]$ . Тогда  $X(z + \omega_k) = X(z) \exp(\tilde{\eta}\omega_k - \eta_k \tilde{\omega}) = X(z)$ , а решение задачи о скачке для  $\Phi(z)/X(z)$  приводит к функции

$$\Phi(z) = X(z) \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \zeta(\tau - z) d\tau + C \right] \quad (1.21)$$

при выполнении условия (1.18). Доказана

**Теорема 1.5.** *Неоднородная задача (1.1) при  $\varkappa = 0$ ,  $\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \ln G(\tau) d\tau \neq \omega$  безусловно разрешима и имеет единственное решение вида (1.20). При  $\alpha = \tilde{\omega}$  критерием разрешимости задачи является условие*

$$\int_{L_0} g(\tau) \exp[-\Gamma^+(\tau) - \tilde{\eta}\tau] d\tau = 0.$$

При его выполнении существует однопараметрическое решение вида (1.21).

Табл. 1

Класс	$\alpha_0$	$\varkappa$	$f(z)$ (при $\alpha \neq \omega$ )	$f(z)$ (при $\alpha = \tilde{\omega}$ )
$h(a_0)$	$-1 < \alpha_0 < 0$	0	0	$C \exp(\tilde{\eta}z)$
$h(b_0)$	$0 < \alpha_0 < 1$	0	0	$C \exp(\tilde{\eta}z)$
$h(a_0, b_0)$	$-1 < \alpha_0 < 0$	-1	0	0
$h_0$	$0 < \alpha_0 < 1$	1	$C \frac{\sigma(z + \alpha - b_0)}{\sigma(z - b_0)}$	$C \exp(\tilde{\eta}z)$

## 2. Случай постоянного коэффициента

Рассмотрим задачу (1.1) при  $G(t) = G_0 = \text{const}$ . Обратим внимание на отличие полученных решений от случая задачи Римана для разомкнутого контура на плоскости.

**2.1. Однородная задача.** За каноническую функцию возьмем

$$X_0(z) = \exp \Gamma_0(z),$$

где

$$\Gamma_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \ln G_0 [\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau)] d\tau = (\alpha_0 + i\beta_0) \ln \frac{\sigma(z - b_0) \sigma(a_0)}{\sigma(z - a_0) \sigma(b_0)}, \quad \alpha_0 + i\beta_0 = \frac{\ln G_0}{2\pi i},$$

то есть  $\alpha_0 = \alpha_0^+ = -\alpha_0^-$ , ветвь логарифма в правой части фиксирована в соответствии с левой частью так, что при  $z = 0$  она равна нулю. Отсюда

$$X_0(z) = \left[ \frac{\sigma(z - b_0) \sigma(a_0)}{\sigma(z - a_0) \sigma(b_0)} \right]^{\alpha_0 + i\beta_0}.$$

Постоянная  $\alpha$  определяется равенством

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \ln G_0 d\tau = (\alpha_0 + i\beta_0)(b_0 - a_0).$$

Если концы  $a_0, b_0$  особенные, то есть  $G_0 > 0$ , то  $\alpha_0 = 0, \varkappa = 0$ . Тогда  $\Phi_0(z) = 0$  при  $\alpha \neq \omega$  и  $\Phi_0(z) = C X_0 \exp(\tilde{\eta}z)$  при  $\alpha = \tilde{\omega}$ . Если концы неособенные, то  $\Phi_0(z) = X_0(z)f(z)$ , где  $f(z)$  определяется в зависимости от класса решений (см. табл. 1).

В отличие от задачи Римана для разомкнутого контура на плоскости функция  $\Phi_0(z)$  зависит не только от  $\varkappa$ , но и от величины  $\alpha$ . Рассмотрим подробнее случай  $\varkappa = 1$ . Положим  $\alpha = \alpha^{(1)}$ , если  $-1 < \alpha_0 < 0$ , и  $\alpha = \alpha^{(2)}$ , если  $0 < \alpha_0 < 1$ . Так как  $\alpha^{(2)} = \alpha^{(1)} + b_0 - a_0$ , то  $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}$  одновременно периодами быть не могут. Здесь неограниченные в обоих концах решения существуют только при  $\alpha^{(1)} \neq \omega$  и  $\alpha^{(2)} \neq \omega$ . При  $\alpha^{(2)} = \tilde{\omega}$  получим  $f(z) = C \exp(\tilde{\eta}z)$ , откуда  $h_0 = h(b_0)$ . При  $\alpha^{(1)} = \tilde{\omega}$  имеем

$$f(z) = C \frac{\sigma(z + \alpha^{(2)} - b_0)}{\sigma(z - b_0)} = C \frac{\sigma(z + \alpha^{(1)} - a_0)}{\sigma(z - b_0)} = C_1 \frac{\sigma(z - a_0) \exp(\tilde{\eta}z)}{\sigma(z - b_0)},$$

откуда  $h_0 = h(a_0)$ .



**2.2. Неоднородная задача.** Пусть функции  $\Phi_0(z)$ ,  $X_0(z)$ , числа  $\alpha_0$  и  $\varkappa$  определены так же, как и в однородной задаче.

Если решение  $\Phi(z)$  искать в классе  $h_0$ , то  $\varkappa = 1$ , каноническая функция берется в виде  $X(z) = X_0(z)\sigma(z-\theta)/\sigma(z-b_0)$ , где точка  $\theta$  выбрана так, что  $\theta \notin T_\omega(L_0)$ , число  $\beta = b_0 - \theta - \alpha$  не совпадает с периодом. Тогда

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{L_0} A(\tau, z) \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} d\tau + \Phi_0(z), \quad A(\tau, z) = \frac{\sigma(\tau - z + \beta)}{\sigma(\beta)\sigma(\tau - z)}.$$

При  $\Phi(z) \in h(a_0, b_0)$  индекс  $\varkappa = -1$ , тогда  $X(z) = X_0\sigma(z-b_0)/\sigma(z-b_0-\alpha)$ , и при выполнении условия

$$\int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} d\tau = 0 \quad (2.1)$$

имеем

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} [\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau - b_0 - \alpha)] d\tau.$$

При  $\alpha = \tilde{\omega}$  результат сохранится.

Если решение ищется в классах  $h(a_0)$ ,  $h(b_0)$  или концы особенные, то  $\varkappa = 0$ .

Тогда при  $\alpha \neq \omega$  имеем  $X(z) = X_0(z)$ ,  $A(\tau, z) = \frac{\sigma(\tau - z - \alpha)}{\sigma(-\alpha)\sigma(\tau - z)}$ ,

$$\Phi(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_{L_0} A(\tau, z) \frac{g(\tau)}{X_0^+(\tau)} d\tau.$$

При  $\alpha = \tilde{\omega}$  имеем  $X(z) = X_0 \exp(\tilde{\eta}z)$  и

$$\Phi(z) = X(z) \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \zeta(\tau - z) d\tau + C \right]$$

при выполнении условия (2.1), где  $X(z) = X_0 \exp(\tilde{\eta}z)$ .

### 3. Задача о скачке в случае непериодического скачка

Пусть  $L_0 = (\widehat{a_0, b_0}) \in R$ . Обозначим  $L = \bigcup_{k=0}^{\infty} L_k$ , где  $L_k$  получены из  $L_0$  преобразованиями группы  $T_\omega$ .

Требуется найти кусочно-голоморфную функцию  $\Phi(z)$ , удовлетворяющую краевому условию

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g_k(t), \quad t \in L_k. \quad (3.1)$$

На основании известных результатов о решении задачи в случае счетного множества гладких разомкнутых дуг частным решением задачи (3.1) является функция [4]

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau) d\tau}{\tau^{n_k}(\tau - z)}, \quad (3.2)$$

где последовательность целых чисел  $\{n_k\}$  подобрана так, что ряд (3.2) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте после отбрасывания конечного числа членов, соответствующих тем  $L_k$ , которые лежат внутри этого компакта.

Имея  $\mathcal{F}(z)$ , можно записать общее решение задачи в виде

$$\Phi(z) = \mathcal{F}(z) + \mathcal{P}(z),$$

где  $\mathcal{P}(z)$  – произвольная целая функция.

Для того чтобы сформулировать дополнительные требования, которые нужно наложить на функцию  $g(t) = g_k(t)$ ,  $t \in \bar{L}_k$ , чтобы задача имела конечное число линейно-независимых решений, введем

**Определение.** Последовательность  $\Gamma = \{\Gamma_m\}_1^\infty$  замкнутых контуров назовем правильной системой контуров, если она обладает следующими свойствами:

- 1)  $\Gamma_1$  содержит внутри точку  $z = 0$ ;
- 2)  $\Gamma_m$  лежит в области, ограниченной контуром  $\Gamma_{m+1}$ ;
- 3) если  $d_m = \min_{z \in \Gamma_m} |z|$ , то  $\lim_{m \rightarrow \infty} d_m = \infty$ ;
- 4)  $l_m/d_m \leq a$ , где  $l_m$  – длина  $\Gamma_m$ ,  $a > 0$  – постоянная, не зависящая от  $m$ .

Имеет место [3, с. 243]

**Теорема 3.1.** Если существует правильная система контуров  $\Gamma$ , не пересекающаяся с контурами  $L_k$ , то все решения задачи (3.1), удовлетворяющие на всех  $\Gamma_m$  условию

$$|\Phi(z)| \leq M|z|^{n-1}, \quad M > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

определяются формулой

$$\Phi(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_m^*} \frac{g_m^*(\tau)}{(\tau - z)} \left(\frac{z}{\tau}\right)^n d\tau + \mathcal{P}_{n-1}(z),$$

причем ряд равномерно сходится на любом компакте, не содержащем точек  $L_k$ ,  $\mathcal{P}_{n-1}(z)$  – полином степени  $n - 1$ , через  $L_m^*$  обозначена совокупность контуров  $L_k$ , расположенных в  $D_m$  (область между  $\Gamma_m$  и  $\Gamma_{m+1}$ ), а через  $g_m^*(t)$  обозначена функция на  $L_m^*$ , совпадающая на каждом  $L_k \subset L_m^*$  с заданным скачком  $g_k(t)$ .

Можно конкретизировать набор целых чисел  $n_k$  при построении частного решения (3.2). Справедлива [4]

**Теорема 3.2.** Если  $n \geq 0$  есть целое число, при котором ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k (R_k)^{-(n+1)}, \quad A_k = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} |g_k(\tau)| |d\tau|, \quad R_k = \min_{\tau \in L_k} |\tau| \quad (3.3)$$

сходится, то ряд (3.2) при всех  $n_k = n$  сходится абсолютно и равномерно на любом компакте, не содержащем точек контуров  $L_k$  (после отбрасывания соответствующего числа членов).

Задача (3.1) в данном случае имеет частное решение

$$\tilde{\mathcal{F}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau) d\tau}{\tau^n (\tau - z)}.$$

Используя приведенные выше результаты, построим решение задачи (3.1) с заданным поведением при  $z \rightarrow \infty$ . В нашем случае в качестве системы  $\Gamma$  можно взять следующую последовательность: за  $\Gamma_1$  примем границу параллелограмма,

составленного из 9 конгруэнтных параллелограммов, центром которого является  $R$ , за  $\Gamma_2$  – границу параллелограмма, составленного из 25 конгруэнтных параллелограммов, центром которого является  $R$ , и т. д. (в данном случае  $a = [6(|\omega_1| + |\omega_2|)]/d_1$ ).

Требуется найти кусочно-голоморфное решение  $\Phi(z)$  задачи (3.1), удовлетворяющее на  $\Gamma$  условию

$$|\Phi(z)| \leq \mathcal{M}|z|, \quad \mathcal{M} > 0, \quad (3.4)$$

причем функция  $g(t)$  удовлетворяет условию  $g_k(t) \in H_{\lambda_k}(\bar{L}_k)$  и неравенству

$$\sup_{t \in \bar{L}} |g(t)| \leq N, \quad 0 < N < \infty. \quad (3.5)$$

В силу условия (3.5) имеем, что

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} |g_k(\tau)| |d\tau| \leq \frac{N}{2\pi} S_0,$$

где  $S_0$  – длина  $L_0$ , следовательно, сходимость ряда (3.3) обеспечивается сходимостью ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} R_k^{-(n+1)}, \quad R_k = |\tau + \omega|, \quad \tau \in L_0. \quad (3.6)$$

Ряд (3.6) можно представить в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} R_k^{-(n+1)} = \frac{1}{R_0^{n+1}} + \sum'_{k_1, k_2 = -\infty}^{\infty} \frac{1}{|\tau + \omega|^{n+1}} = \frac{1}{R_0^{n+1}} + \sum'_{k_1, k_2 = -\infty}^{\infty} \frac{1}{|\omega|^{n+1} \left| \frac{\tau}{\omega} + 1 \right|^{n+1}}.$$

Учитывая, что  $\left| \frac{\tau}{\omega} + 1 \right|^{n+1} \rightarrow 1$  при  $k_1, k_2 \rightarrow \pm\infty$ , имеем, что сходимость ряда (3.6) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum'_{k_1, k_2 = -\infty}^{\infty} \frac{1}{|\omega|^{n+1}}. \quad (3.7)$$

Из теории дwoякопериодических функций [3, с. 212] известно, что наименьшее  $n$ , при котором сходится ряд (3.7), будет равно 2.

Таким образом, задача (3.1) имеет частное решение

$$\tilde{\mathcal{F}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^2}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau) d\tau}{\tau^2(\tau - z)}. \quad (3.8)$$

Тогда из теоремы 3.1 следует

**Теорема 3.3.** *Все решения задачи (3.1), удовлетворяющие условию (3.4), определяются формулой*

$$\Phi(z) = \tilde{\mathcal{F}}(z) + \mathcal{P}_1(z), \quad (3.9)$$

где  $\tilde{\mathcal{F}}(z)$  имеет вид (3.8),  $\mathcal{P}_1(z)$  – полином первой степени, причем ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте, не содержащем точек  $L_k$ .

Рассмотрим теперь решение задачи (3.1) при условии, что функция  $g(t)$  удовлетворяет условию

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k = N_1 < \infty, \quad B_k = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} |g_k(\tau)| |d\tau|. \quad (3.10)$$

При условии (3.10) ряд

$$\mathcal{F}_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau) d\tau}{\tau(\tau - z)} \quad (3.11)$$

сходится абсолютно и равномерно на любом компакте после отбрасывания конечного числа членов. Действительно, пусть  $|z| \leq r$ ,  $0 < r < \infty$ ,  $\tau \in L_k$ ,  $\tau \neq z$ , тогда

$$|\mathcal{F}_1(z)| \leq \frac{|z|}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{R_k^2} \int_{L_k} \frac{|g_k(\tau)| |d\tau|}{\left|1 - \frac{z}{\tau}\right|}.$$

При всех достаточно больших  $k$  величина  $z/\tau$  будет сколь угодно малой, так как  $|z| \leq r$ . Поэтому можно подобрать такой номер  $K$ , чтобы при  $k \geq K$  выполнялось неравенство

$$\left|1 - \frac{z}{\tau}\right| \geq \frac{1}{2}. \quad (3.12)$$

Тогда с учетом (3.12) имеем

$$|\mathcal{F}_1(z)| \leq \frac{r}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{R_k^2} \int_{L_k} |g_k(\tau) d\tau| \leq \frac{r}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{R_k^2} < N_2 < \infty.$$

Покажем ограниченность (3.11) на  $\Gamma$ . В силу свойств  $\Gamma$  и  $L$  существует такая постоянная  $\delta > 0$ , что  $|\tau - z| \geq \delta$  при всех  $\tau \in L$ ,  $z \in \Gamma$ , и

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_1(z)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{L_k} g_k(\tau) \left( \frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{\tau} \right) d\tau \right| \leq \\ &\leq \delta^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} B_k + \sum_{k=0}^{\infty} B_k R_k^{-1} = \delta^{-1} N_2 + N_3. \end{aligned}$$

Таким образом, доказана

**Теорема 3.4.** *Все решения задачи (3.1) при условии (3.10), удовлетворяющие неравенству*

$$|\Phi(z)| \leq M, \quad z \in \Gamma,$$

*определяются формулой*

$$\Phi(z) = \mathcal{F}_1(z) + C,$$

*где  $\mathcal{F}_1(z)$  имеет вид (3.11), а  $C$  – постоянная.*

Рассмотрим частный случай, когда функция  $g(t)$  удовлетворяет условиям

$$g_0(t) = g_k(t + \omega), \quad t \in L_0, \quad g_0(t) \in H_\lambda(\bar{L}_0). \quad (3.13)$$

Будем отыскивать дwoякопериодические решения задачи (3.1) с периодами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Из леммы 1.1 следует равенство

$$\int_{L_0} g_0(\tau) d\tau = 0. \quad (3.14)$$

В силу ограниченности решений на  $\partial R$  они удовлетворяют условию (3.4), поэтому на основании теоремы 3.3 достаточно из решений (3.9) выделить двоякопериодические решения. Для этого, положив  $\mathcal{P}_1(z) = Az + B$ , сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^2}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau) d\tau}{\tau^2(\tau-z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} g_0(\tau) \left( \frac{1}{\tau-z} - \frac{1}{\tau} - \frac{z}{\tau^2} \right) d\tau + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} g_k(\tau) \left( \frac{1}{\tau-z} - \frac{1}{\tau} - \frac{z}{\tau^2} \right) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} g_0(\tau) \left[ \frac{1}{\tau-z} - \frac{1}{\tau} - \frac{z}{\tau^2} + \sum'_{k_1, k_2=-\infty} \left( \frac{1}{\tau+\omega-z} - \frac{1}{\tau+\omega} - \frac{z}{(\tau+\omega)^2} \right) \right] d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} g_0(\tau) \left[ \frac{1}{\tau-z} - \frac{1}{\tau} - \frac{z}{\tau^2} + \sum'_{k_1, k_2=-\infty} \left( \frac{1}{\tau+\omega-z} - \frac{1}{\tau+\omega} - \frac{z}{(\tau+\omega)^2} + \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega} + \frac{\tau-z}{\omega^2} - \frac{\tau-z}{\omega^2} \right) \right] d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} g_0(\tau) [\zeta(\tau-z) - \zeta(\tau)] d\tau + \frac{z}{2\pi i} \int_{L_0} g_0(\tau) \zeta'(\tau) d\tau. \quad (3.15) \end{aligned}$$

Требую периодичность, с учетом (3.14) получим

$$\Phi(z + \omega_k) = \Phi(z) + \frac{\omega_k}{2\pi i} \int_{L_0} g_0(\tau) \zeta'(\tau) d\tau + A\omega_k, \quad k = 1, 2,$$

откуда  $A = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} g_0(\tau) \zeta'(\tau) d\tau$ . Тем самым получено решение вида (1.6) при

$g(t) = g_0(t)$ .

Отметим следующий интересный факт. Функция (3.15) не является двоякопериодической, но из нее можно получить двоякопериодическую функцию, имеющую в параллелограмме периодов полярную особую линию второго порядка [6, с. 98–103]. Эта функция является аналогом функции Вейерштрасса  $\wp(u)$ , имеющей в  $R$  полюс второго порядка. Действительно,

$$\mathcal{F}_2(z) = \tilde{\mathcal{F}}'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} g_0(\tau) [\wp(\tau-z) - \wp(\tau)] d\tau.$$

---

**Summary**

*E.P. Aksenteva, I.G. Salekhova.* Riemann Problem in a Case of Doubly Periodic Arrangements of Arches. I.

The paper considers the decision of Riemann problem in a case of doubly periodic arrangements of arches. The case of periodic factor and a free member is regarded. On the basis of results for Riemann problem decision in case of accounting set of contours, generalization on the case of non-periodic jumps is given.

**Key words:** Riemann problem, doubly periodic arrangements of arches, elliptic function, quasielliptic function, periodic factor and a free member, accounting set of arches, non-periodic gallop.

**Литература**

1. *Чибрикова Л.И.* О граничных задачах для прямоугольника // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1964. – Т. 123, кн. 9. – С. 15–39.
2. *Аксентьева Е.П.* Функции Вейерштрасса в краевых задачах. Методическая разработка к специальному курсу. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1994. – 42 с.
3. *Чибрикова Л.И.* Основные граничные задачи для аналитических функций. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977. – 302 с.
4. *Салехова И.Г.* Однородная задача Римана в случае счетного множества разомкнутых дуг // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 6. – С. 124–135.
5. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1968. – 512 с.
6. *Голубев В.В.* Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции. – М.: Физматгиз, 1961. – 455 с.

Поступила в редакцию  
02.12.08

---

**Аксентьева Евгения Павловна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики Казанского государственного университета.

E-mail: *Evgenija.Aksenteva@ksu.ru*

**Салехова Илюся Гаруновна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений Казанского государственного университета.

E-mail: *Ilysia.Salekhova@ksu.ru*