УДК 512.579+512.53

ДЕКОМПОЗИЦИИ СВОБОДНЫХ ДИМОНОИДОВ

А.В. Жучок

Аннотация

Представлены наименьшая динормальная конгруэнция, наименьшая $(\ell n, n)$-конгруэнция, наименьшая (n, rn)-конгруэнция, наименьшая $(\ell n, rn)$-конгруэнция, наименьшая (левая, правая) нормальная конгруэнция на свободном димоноиде, которые использованы для получения декомпозиций свободного димоноида.

Ключевые слова: свободный димоноид, конгруэнция, дисвязка поддимоноидов, димоноид, связка.

Введение

Понятия диалгебры и димоноида были введены Ж.-Л. Лодэ [1]. Диалгебры изучались также в статьях Л.А. Бокутя, Ю. Чэна и С. Лю [2], П.С. Колесникова [3, 4], А.П. Пожидаева [5, 6]. Димоноиды исследовались в [7–14].

Ж.-Л. Лодэ построил свободный димоноид [1]. С помощью свойств свободных димоноидов в [1] были описаны свободные диалгебры и изучены гомологии диалгебр. Некоторые наименьшие конгруэнции на свободном димоноиде и соответствующие декомпозиции свободного димоноида были описаны в [10, 12].

Целью настоящей работы является изучение строения свободного димоноида. В ней представлены наименьшая динормальная конгруэнция, наименьшая $(\ell n, n)$-конгруэнция, наименьшая (n, rn)-конгруэнция, наименьшая $(\ell n, rn)$-конгруэнция, наименьшая (левая, правая) нормальная конгруэнция на свободном димоноиде. Указанные конгруэнции использованы для получения декомпозиций свободного димоноида (теоремы 3–9).

В работе используются терминология и обозначения из [10, 12, 14].

1. Предварительные сведения

Ж.-Л. Лодэ построил свободный димоноид [1]. В [10] построен димоноид, изоморфный свободному димоноиду. Напомним эту конструкцию.

Как обычно, через N обозначаем множество натуральных чисел. Пусть $F[X]$ – свободная полугруппа в алфавите X. Длину слова $w \in F[X]$ будем обозначать через ℓ_w. На множестве

$$F = \{(w, m) \in F[X] \times N | \ell_w \geq m\}$$

определим операции $\dashv$ и $\vdash$ по правилам:

$$(w_1, m_1) \dashv (w_2, m_2) = (w_1 w_2, m_1),$$

$$(w_1, m_1) \vdash (w_2, m_2) = (w_1 w_2, \ell_{w_1} + m_2)$$

для всех (w_1, m_1), $(w_2, m_2) \in F$. Алгебру $(F, \dashv, \vdash)$ обозначим через $\breve{F}[X]$. Согласно лемме 3 [10] $\breve{F}[X]$ – свободный димоноид над X.

Рассмотрим свободный прямоугольный димоноид [12].

Пусть X – произвольное непустое множество, $X^3 = X \times X \times X$. На множестве X^3 определим операции $\dashv$ и $\vdash$ по правилам:

$$(x_1, x_2, x_3) \dashv (y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, y_3),$$

$$(x_1, x_2, x_3) \vdash (y_1, y_2, y_3) = (x_1, y_2, y_3)$$

для всех $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in X^3$. Алгебру $(X^3, \dashv, \vdash)$ обозначим через $FRct(X)$.

Теорема 1 [12, теорема 1]. $FRct(X)$ *– свободный прямоугольный димоноид.*

Построим свободную нормальную дисвязку [14].

Прямое произведение конечного числа димоноидов $D_1, D_2, \ldots, D_n$ будем обозначать через $D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$.

Пусть $FRct(X)$ – свободный прямоугольный димоноид, $B(X)$ – полурешётка всех непустых конечных подмножеств множества X относительно операции теоретико-множественного объединения,

$$FND(X) = \{((x, y, z), A) \in FRct(X) \times B(X) \,|\, x, y, z \in A\}.$$

Теорема 2 [14, теорема 2]. $FND(X)$ *– свободная нормальная дисвязка.*

Рассмотрим полугруппы $X_{\ell z}$, X_{rz}, X_{rb} и димоноиды $X_{\ell z,rz}$, $X_{rb,rz}$, $X_{\ell z,rb}$, которые были определены в [12]. Пусть

$$B_{\ell z,rb}(X) = \{((x, y), A) \in X_{\ell z,rb} \times B(X) \,|\, x, y \in A\},$$

$$B_{rb,rz}(X) = \{((x, y), A) \in X_{rb,rz} \times B(X) \,|\, x, y \in A\},$$

$$B_{\ell z,rz}(X) = \{(x, A) \in X_{\ell z,rz} \times B(X) \,|\, x \in A\},$$

$$B_{rb}(X) = \{((x, y), A) \in X_{rb} \times B(X) \,|\, x, y \in A\},$$

$$B_{\ell z}(X) = \{(x, A) \in X_{\ell z} \times B(X) \,|\, x \in A\},$$

$$B_{rz}(X) = \{(x, A) \in X_{rz} \times B(X) \,|\, x \in A\}.$$

В дальнейшем нам необходимы следующие три леммы.

Лемма 1 [14, лемма 6]. $B_{\ell z,rb}(X)$ *– свободная* $(\ell n, n)$*-дисвязка.*

Лемма 2 [14, лемма 7]. $B_{rb,rz}(X)$ *– свободная* (n, rn)*-дисвязка.*

Лемма 3 [14, лемма 8]. $B_{\ell z,rz}(X)$ *– свободная* $(\ell n, rn)$*-дисвязка.*

Согласно [15] $B_{rb}(X)$, $B_{\ell z}(X)$ и $B_{rz}(X)$ есть свободная нормальная связка, свободная левая нормальная связка и свободная правая нормальная связка соответственно.

Если $f : D_1 \to D_2$ – гомоморфизм димоноидов, то соответствующую конгруэнцию на D_1 будем обозначать через Δ_f.

2. Декомпозиции

Определим указанные выше конгруэнции.

Если ρ – конгруэнция на димоноиде $(D, \dashv, \vdash)$ такая, что $(D, \dashv, \vdash)/\rho$ – нормальная дисвязка (соответственно $(\ell n, n)$-дисвязка, (n, rn)-дисвязка, $(\ell n, rn)$-дисвязка) (см. [14]), то будем говорить, что ρ – динормальная конгруэнция (соответственно $(\ell n, n)$-конгруэнция, (n, rn)-конгруэнция, $(\ell n, rn)$-конгруэнция). Если ρ – конгруэнция на димоноиде $(D, \dashv, \vdash)$ такая, что операции фактор-димоноида $(D, \dashv, \vdash)/\rho$ совпадают и он является (левой, правой) нормальной связкой (см. [15] или [14]), то будем говорить, что ρ является (левой, правой) нормальной конгруэнцией.

Пусть $\breve{F}[X]$ – свободный димоноид над X (см. п. 1). Для каждого $w = x_1 \ldots x_i \ldots x_n \in F[X]$, $x_i \in X$, $1 \leq i \leq n$, множество всех букв, которые входят в запись слова w, будем обозначать через $c(w)$.

Для всех $((a,b,c),Y) \in FND(X)$ (см. теорему 2) положим

$$T_{(a,b,c)}^{Y} = \{(x_1 \ldots x_i \ldots x_n, m) \in \breve{F}[X] \,|\, ((x_1, x_m, x_n), c(x_1 \ldots x_i \ldots x_n)) = ((a,b,c),Y)\}.$$

На множестве $\breve{F}[X]$ определим отношение ρ по правилу

$$(x_1 \ldots x_i \ldots x_n, m)\rho(y_1 \ldots y_j \ldots y_s, t) \text{ тогда и только тогда, когда}$$

$$((x_1, x_m, x_n), c(x_1 \ldots x_i \ldots x_n)) = ((y_1, y_t, y_s), c(y_1 \ldots y_j \ldots y_s)).$$

Понятие дисвязки поддимоноидов (см. [7, 8]) является эффективным при описании структурных свойств димоноидов. В терминах дисвязок поддимоноидов (см. также [12]) получаем такую теорему.

Теорема 3. *Отношение ρ на свободном димоноиде $\breve{F}[X]$ является наименьшей динормальной конгруэнцией. Свободный димоноид $\breve{F}[X]$ является нормальной дисвязкой $FND(X)$ поддимоноидов $T_{(a,b,c)}^{Y}$, $((a,b,c),Y) \in FND(X)$.*

Доказательство. Определим отображение $\theta : \breve{F}[X] \to FND(X)$ по правилу

$$(x_1 \ldots x_i \ldots x_n, m) \mapsto ((x_1, x_m, x_n), c(x_1 \ldots x_i \ldots x_n)), (x_1 \ldots x_i \ldots x_n, m) \in \breve{F}[X].$$

Для произвольных элементов $(x_1 \ldots x_i \ldots x_n, m)$, $(y_1 \ldots y_j \ldots y_s, t) \in \breve{F}[X]$ имеем

$$\begin{aligned}
&((x_1 \ldots x_i \ldots x_n, m) \dashv (y_1 \ldots y_j \ldots y_s, t))\,\theta = \\
&\quad = (x_1 \ldots x_n y_1 \ldots y_s, m)\,\theta = ((x_1, x_m, y_s), c(x_1 \ldots x_n y_1 \ldots y_s)) = \\
&\quad = ((x_1, x_m, y_s), c(x_1 \ldots x_n) \cup c(y_1 \ldots y_s)) = \\
&\quad = ((x_1, x_m, x_n), c(x_1 \ldots x_n)) \dashv ((y_1, y_t, y_s), c(y_1 \ldots y_s)) = \\
&\quad = (x_1 \ldots x_i \ldots x_n, m)\theta \dashv (y_1 \ldots y_j \ldots y_s, t)\,\theta, \\
&((x_1 \ldots x_i \ldots x_n, m) \vdash (y_1 \ldots y_j \ldots y_s, t))\,\theta = \\
&\quad = (x_1 \ldots x_n y_1 \ldots y_s, n+t)\,\theta = ((x_1, y_t, y_s), c(x_1 \ldots x_n y_1 \ldots y_s)) = \\
&\quad = ((x_1, y_t, y_s), c(x_1 \ldots x_n) \cup c(y_1 \ldots y_s)) = \\
&\quad = ((x_1, x_m, x_n), c(x_1 \ldots x_n)) \vdash ((y_1, y_t, y_s), c(y_1 \ldots y_s)) = \\
&\quad = (x_1 \ldots x_i \ldots x_n, m)\theta \vdash (y_1 \ldots y_j \ldots y_s, t)\,\theta.
\end{aligned}$$

Таким образом, θ – сюрьективный гомоморфизм. Согласно теореме 2 $FND(X)$ – свободная нормальная дисвязка. Тогда Δ_θ является наименьшей динормальной конгруэнцией на $\breve{F}[X]$. Из определения θ следует, что $\Delta_\theta = \rho$. Понятно, что $T_{(a,b,c)}^{Y}$, $((a,b,c),Y) \in FND(X)$, есть класс конгруэнции Δ_θ, который является поддимоноидом димоноида $\breve{F}[X]$. □

Для всех $((a,b),Y) \in B_{\ell z,rb}(X)$ (см. лемму 1) положим

$$T_{(a,b]}^{Y} = \{(x_1 \ldots x_i \ldots x_n, m) \in \breve{F}[X] \,|\, ((x_1, x_m), c(x_1 \ldots x_i \ldots x_n)) = ((a,b),Y)\}.$$

На множестве $\breve{F}[X]$ определим отношение ω по правилу

$$(x_1 \dots x_i \dots x_n, m)\omega(y_1 \dots y_j \dots y_s, t) \text{ тогда и только тогда, когда}$$

$$((x_1, x_m), c(x_1 \dots x_i \dots x_n)) = ((y_1, y_t), c(y_1 \dots y_j \dots y_s)).$$

Теорема 4. *Отношение ω на свободном димоноиде $\breve{F}[X]$ является наименьшей $(\ell n, n)$-конгруэнцией. Свободный димоноид $\breve{F}[X]$ является дисвязкой $B_{\ell z,rb}(X)$ поддимоноидов $T^Y_{(a,b]}$, $((a,b),Y) \in B_{\ell z,rb}(X)$. Каждый димоноид $T^Y_{(a,b]}$, $((a,b),Y) \in B_{\ell z,rb}(X)$, является правой связкой Y_{rz} поддимоноидов $T^Y_{(a,b,c)}$, $c \in$ $\in Y_{rz}$.*

Доказательство. Определим отображение $\mu : \breve{F}[X] \to B_{\ell z,rb}(X)$ по правилу

$$(x_1 \dots x_i \dots x_n, m) \mapsto ((x_1, x_m), c(x_1 \dots x_i \dots x_n)), (x_1 \dots x_i \dots x_n, m) \in \breve{F}[X].$$

Для произвольных элементов $(x_1 \dots x_i \dots x_n, m)$, $(y_1 \dots y_j \dots y_s, t) \in \breve{F}[X]$ имеем

$$\begin{aligned}
&((x_1 \dots x_i \dots x_n, m) \dashv (y_1 \dots y_j \dots y_s, t))\,\mu = \\
&\quad = (x_1 \dots x_n y_1 \dots y_s, m)\mu = ((x_1, x_m), c(x_1 \dots x_n y_1 \dots y_s)) = \\
&\quad = ((x_1, x_m), c(x_1 \dots x_n) \cup c(y_1 \dots y_s)) = \\
&\quad = ((x_1, x_m), c(x_1 \dots x_n)) \dashv ((y_1, y_t), c(y_1 \dots y_s)) = \\
&\quad = (x_1 \dots x_i \dots x_n, m)\mu \dashv (y_1 \dots y_j \dots y_s, t)\,\mu,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&((x_1 \dots x_i \dots x_n, m) \vdash (y_1 \dots y_j \dots y_s, t))\,\mu = \\
&\quad = (x_1 \dots x_n y_1 \dots y_s, n+t)\mu = ((x_1, y_t), c(x_1 \dots x_n y_1 \dots y_s)) = \\
&\quad = ((x_1, y_t), c(x_1 \dots x_n) \cup c(y_1 \dots y_s)) = \\
&\quad = ((x_1, x_m), c(x_1 \dots x_n)) \vdash ((y_1, y_t), c(y_1 \dots y_s)) = \\
&\quad = (x_1 \dots x_i \dots x_n, m)\mu \vdash (y_1 \dots y_j \dots y_s, t)\,\mu.
\end{aligned}$$

Таким образом, μ – сюрьективный гомоморфизм. Согласно лемме 1 $B_{\ell z,rb}(X)$ – свободная $(\ell n, n)$-дисвязка. Тогда Δ_μ является наименьшей $(\ell n, n)$-конгруэнцией на $\breve{F}[X]$. Из определения μ следует, что $\Delta_\mu = \omega$. Очевидно, что $T^Y_{(a,b]}$, $((a,b),Y) \in$ $\in B_{\ell z,rb}(X)$, есть класс конгруэнции Δ_μ, который является поддимоноидом димоноида $\breve{F}[X]$. Кроме этого, можно показать, что для каждого $((a,b),Y) \in B_{\ell z,rb}(X)$ отображение

$$T^Y_{(a,b]} \to Y_{rz} : (x_1 \dots x_i \dots x_n, m) \mapsto x_n$$

является гомоморфизмом. Отсюда $T^Y_{(a,b]}$ является правой связкой Y_{rz} поддимоноидов $T^Y_{(a,b,c)}$, $c \in Y_{rz}$. □

Для всех $((b,c),Y) \in B_{rb,rz}(X)$ (см. лемму 2) положим

$$T^Y_{[b,c)} = \{(x_1 \dots x_i \dots x_n, m) \in \breve{F}[X] \,|\, ((x_m, x_n), c(x_1 \dots x_i \dots x_n)) = ((b,c),Y)\}.$$

На множестве $\breve{F}[X]$ определим отношение π по правилу

$$(x_1 \dots x_i \dots x_n, m)\pi(y_1 \dots y_j \dots y_s, t) \text{ тогда и только тогда, когда}$$

$$((x_m, x_n), c(x_1 \dots x_i \dots x_n)) = ((y_t, y_s), c(y_1 \dots y_j \dots y_s)).$$

Аналогично теореме 4 можно доказать следующую теорему.

Теорема 5. *Отношение π на свободном димоноиде $\breve{F}[X]$ является наименьшей (n, rn)-конгруэнцией. Свободный димоноид $\breve{F}[X]$ является дисвязкой $B_{rb,rz}(X)$ поддимоноидов $T^Y_{[b,c)}$, $((b,c),Y) \in B_{rb,rz}(X)$. Каждый димоноид $T^Y_{[b,c)}$, $((b,c),Y) \in B_{rb,rz}(X)$, является левой связкой $Y_{\ell z}$ поддимоноидов $T^Y_{(a,b,c)}$, $a \in Y_{\ell z}$.*

Для всех $(b,Y) \in B_{\ell z,rz}(X)$ (см. лемму 3) положим

$$T^Y_{(b]} = \{(x_1 \dots x_i \dots x_n, m) \in \breve{F}[X] \,|\, (x_m, c(x_1 \dots x_i \dots x_n)) = (b,Y)\}.$$

На множестве $\breve{F}[X]$ определим отношение ζ по правилу

$$(x_1 \dots x_i \dots x_n, m)\zeta(y_1 \dots y_j \dots y_s, t) \text{ тогда и только тогда, когда}$$

$$(x_m, c(x_1 \dots x_i \dots x_n)) = (y_t, c(y_1 \dots y_j \dots y_s)).$$

Теорема 6. *Отношение ζ на свободном димоноиде $\breve{F}[X]$ является наименьшей $(\ell n, rn)$-конгруэнцией. Свободный димоноид $\breve{F}[X]$ является дисвязкой $B_{\ell z,rz}(X)$ поддимоноидов $T^Y_{(b]}$, $(b,Y) \in B_{\ell z,rz}(X)$. Каждый димоноид $T^Y_{(b]}$, $(b,Y) \in B_{\ell z,rz}(X)$, является прямоугольной связкой Y_{rb} поддимоноидов $T^Y_{(a,b,c)}$, $(a,c) \in Y_{rb}$.*

Доказательство. Определим отображение $\varphi : \breve{F}[X] \to B_{\ell z,rz}(X)$ по правилу

$$(x_1 \dots x_i \dots x_n, m) \mapsto (x_m, c(x_1 \dots x_i \dots x_n)), (x_1 \dots x_i \dots x_n, m) \in \breve{F}[X].$$

Подобно доказательству теоремы 4 можно показать, что φ является сюрьективным гомоморфизмом. Согласно лемме 3 $B_{\ell z,rz}(X)$ – свободная $(\ell n, rn)$-дисвязка. Тогда Δ_φ является наименьшей $(\ell n, rn)$-конгруэнцией на $\breve{F}[X]$. Из определения φ следует, что $\Delta_\varphi = \zeta$. Очевидно, $T^Y_{(b]}$, $(b,Y) \in B_{\ell z,rz}(X)$, есть класс конгруэнции Δ_φ, который является поддимоноидом димоноида $\breve{F}[X]$. Кроме этого, нетрудно показать, что для каждого $(b,Y) \in B_{\ell z,rz}(X)$ отображение

$$T^Y_{(b]} \to Y_{rb} : (x_1 \dots x_i \dots x_n, m) \mapsto (x_1, x_n)$$

является гомоморфизмом. Отсюда получаем последнее утверждение теоремы. □

Для всех $((a,c),Y) \in B_{rb}(X)$ (см. п. 1) положим

$$T^Y_{(a,c)} = \{(x_1 \dots x_i \dots x_n, m) \in \breve{F}[X] | ((x_1, x_n), c(x_1 \dots x_i \dots x_n)) = ((a,c),Y)\}.$$

На множестве $\breve{F}[X]$ определим отношение α по правилу

$$(x_1 \dots x_i \dots x_n, m)\alpha(y_1 \dots y_j \dots y_s, t) \text{ тогда и только тогда, когда}$$

$$((x_1, x_n), c(x_1 \dots x_i \dots x_n)) = ((y_1, y_s), c(y_1 \dots y_j \dots y_s)).$$

Теорема 7. *Отношение α на свободном димоноиде $\breve{F}[X]$ является наименьшей нормальной конгруэнцией. Свободный димоноид $\breve{F}[X]$ является нормальной связкой $B_{rb}(X)$ поддимоноидов $T^Y_{(a,c)}$, $((a,c),Y) \in B_{rb}(X)$. Каждый димоноид $T^Y_{(a,c)}$, $((a,c),Y) \in B_{rb}(X)$, является дисвязкой левых и правых нулей $Y_{\ell z,rz}$ поддимоноидов $T^Y_{(a,b,c)}$, $b \in Y_{\ell z,rz}$.*

Доказательство. Определим отображение $\psi : \breve{F}[X] \to B_{rb}(X)$ по правилу

$$(x_1 \ldots x_i \ldots x_n, m) \mapsto ((x_1, x_n), c(x_1 \ldots x_i \ldots x_n)), (x_1 \ldots x_i \ldots x_n, m) \in \breve{F}[X].$$

Для всех $(x_1 \ldots x_i \ldots x_n, m)$, $(y_1 \ldots y_j \ldots y_s, t) \in \breve{F}[X]$ получаем

$$\begin{aligned}((x_1 \ldots x_i \ldots x_n, m) \dashv (y_1 \ldots y_j \ldots y_s, t))\psi \ = \\ = \ (x_1 \ldots x_n y_1 \ldots y_s, m)\psi = ((x_1, y_s), c(x_1 \ldots x_n y_1 \ldots y_s)) \ = \\ = \ ((x_1, y_s), c(x_1 \ldots x_n) \cup c(y_1 \ldots y_s)) \ = \\ = \ ((x_1, x_n), c(x_1 \ldots x_n))((y_1, y_s), c(y_1 \ldots y_s)) \ = \\ = \ (x_1 \ldots x_i \ldots x_n, m)\psi(y_1 \ldots y_j \ldots y_s, t)\psi.\end{aligned}$$

Аналогично для $\vdash$. Таким образом, ψ – сюрьективный гомоморфизм. Согласно [15] $B_{rb}(X)$ – свободная нормальная связка. Тогда Δ_ψ является наименьшей нормальной конгруэнцией на $\breve{F}[X]$. Из определения ψ следует, что $\Delta_\psi = \alpha$. Очевидно, что $T^Y_{(a,c)}$, $((a,c),Y) \in B_{rb}(X)$, есть класс конгруэнции Δ_ψ, который является поддимоноидом димоноида $\breve{F}[X]$. Нетрудно заметить, что для каждого $((a,c),Y) \in B_{rb}(X)$ отображение

$$T^Y_{(a,c)} \to Y_{\ell z, rz} : (x_1 \ldots x_i \ldots x_n, m) \mapsto x_m$$

является гомоморфизмом. Отсюда следует, что $T^Y_{(a,c)}$ является дисвязкой левых и правых нулей $Y_{\ell z, rz}$ поддимоноидов $T^Y_{(a,b,c)}$, $b \in Y_{\ell z, rz}$. □

Для всех $(a,Y) \in B_{\ell z}(X)$ (см. п. 1) положим

$$T^Y_{(a)} = \{(x_1 \ldots x_i \ldots x_n, m) \in \breve{F}[X] \,|\, (x_1, c(x_1 \ldots x_i \ldots x_n)) = (a, Y)\}.$$

На множестве $\breve{F}[X]$ определим отношение β по правилу

$$(x_1 \ldots x_i \ldots x_n, m)\beta(y_1 \ldots y_j \ldots y_s, t) \text{ тогда и только тогда, когда}$$
$$(x_1, c(x_1 \ldots x_i \ldots x_n)) = (y_1, c(y_1 \ldots y_j \ldots y_s)).$$

Теорема 8. *Отношение β на свободном димоноиде $\breve{F}[X]$ является наименьшей левой нормальной конгруэнцией. Свободный димоноид $\breve{F}[X]$ является левой нормальной связкой $B_{\ell z}(X)$ поддимоноидов $T^Y_{(a)}$, $(a,Y) \in B_{\ell z}(X)$. Каждый димоноид $T^Y_{(a)}$, $(a,Y) \in B_{\ell z}(X)$, является дисвязкой $Y_{rb,rz}$ поддимоноидов $T^Y_{(a,b,c)}$, $(b,c) \in Y_{rb,rz}$.*

Доказательство. Определим отображение $\tau : \breve{F}[X] \to B_{\ell z}(X)$ по правилу

$$(x_1 \ldots x_i \ldots x_n, m) \mapsto (x_1, c(x_1 \ldots x_i \ldots x_n)), \ (x_1 \ldots x_i \ldots x_n, m) \in \breve{F}[X].$$

Можно доказать, что τ является сюрьективным гомоморфизмом. Так как $B_{\ell z}(X)$ – свободная левая нормальная связка (см. [15]), то Δ_τ является наименьшей левой нормальной конгруэнцией на $\breve{F}[X]$. Из определения τ следует, что $\Delta_\tau = \beta$. Понятно, что $T^Y_{(a)}$, $(a,Y) \in B_{\ell z}(X)$, есть класс конгруэнции Δ_τ, который является поддимоноидом димоноида $\breve{F}[X]$. Кроме этого, можно показать, что для каждого $(a,Y) \in B_{\ell z}(X)$ отображение

$$T^Y_{(a)} \to Y_{rb,rz} : (x_1 \ldots x_i \ldots x_n, m) \mapsto (x_m, x_n)$$

является гомоморфизмом. Отсюда $T^Y_{(a)}$ – дисвязка $Y_{rb,rz}$ поддимоноидов $T^Y_{(a,b,c)}$, $(b,c) \in Y_{rb,rz}$. □

Для всех $(c, Y) \in B_{rz}(X)$ (см. п. 1) положим

$$T^Y_{[c]} = \{(x_1 \dots x_i \dots x_n, m) \in \breve{F}[X] \,|\, (x_n, c(x_1 \dots x_i \dots x_n)) = (c, Y)\}.$$

На множестве $\breve{F}[X]$ определим отношение δ по правилу

$$(x_1 \dots x_i \dots x_n, m)\delta(y_1 \dots y_j \dots y_s, t) \text{ тогда и только тогда, когда}$$

$$(x_n, c(x_1 \dots x_i \dots x_n)) = (y_s, c(y_1 \dots y_j \dots y_s)).$$

Подобно теореме 8 доказывается

Теорема 9. *Отношение δ на свободном димоноиде $\breve{F}[X]$ является наименьшей правой нормальной конгруэнцией. Свободный димоноид $\breve{F}[X]$ является правой нормальной связкой $B_{rz}(X)$ поддимоноидов $T^Y_{[c]}$, $(c, Y) \in B_{rz}(X)$. Каждый димоноид $T^Y_{[c]}$, $(c, Y) \in B_{rz}(X)$, является дисвязкой $Y_{\ell z, rb}$ поддимоноидов $T^Y_{(a,b,c)}$, $(a, b) \in Y_{\ell z, rb}$.*

Отметим, что наименьшие конгруэнции на димоноидах и соответствующие декомпозиции этих димоноидов описывались также в [7, 9–12, 14].

Summary

A. V. Zhuchok. Decompositions of Free Dimonoids.

We present the least normal diband congruence, the least $(\ell n, n)$-congruence, the least (n, rn)-congruence, the least $(\ell n, rn)$-congruence, and the least (left, right) normal band congruence on free dimonoids, and use them to obtain decompositions of free dimonoids.

Key words: free dimonoid, congruence, diband of subdimonoids, dimonoid, band.

Литература

1. *Loday J.-L.* Dialgebras and related operads // Lect. Notes Math. – Berlin: Springer-Verlag, 2001. – V. 1763. – P. 7–66.
2. *Bokut L.A., Chen Y., Liu C.* Gröbner-Shirshov bases for dialgebras // Int. J. Algebra Comput. – 2010. – V. 20, No 3. – P. 391–415.
3. *Колесников П.С.* Многообразия диалгебр и конформные алгебры // Сиб. матем. журн. – 2008. – Т. 49, № 2. – С. 322–339.
4. *Колесников П.С.* Конформные представления алгебр Лейбница // Сиб. матем. журн. – 2008. – Т. 49, № 3. – С. 540–547.
5. *Пожидаев А.П.* Диалгебры и связанные с ними тройные системы // Сиб. матем. журн. – 2008. – Т. 49, № 4. – С. 870–885.
6. *Пожидаев А.П.* 0-диалгебры с бар-единицей и неассоциативные алгебры Рота – Бакстера // Сиб. матем. журн. – 2009. – Т. 50, № 6. – С. 1356–1369.
7. *Zhuchok A.V.* Commutative dimonoids // Algebra Discrete Math. – 2009. – No 2. – P. 116–127.
8. *Zhuchok A.V.* Dibands of subdimonoids // Mat. Stud. – 2010. – V. 33, No 2. – P. 120–124.
9. *Zhuchok A.V.* Free commutative dimonoids // Algebra Discrete Math. – 2010. – V. 9, No 1. – P. 109–119.
10. *Жучок А.В.* Вільні дімоноїди // Укр. матем. журн. – 2011. – Т. 63, № 2. – С. 165–175.

11. *Zhuchok A.V.* Semilattices of subdimonoids // Asian-Eur. J. Math. – 2011. – V. 4, No 2. – P. 359–371.

12. *Zhuchok A.V.* Free rectangular dibands and free dimonoids // Algebra Discrete Math. – 2011. – V. 11, No 2. – P. 92–111.

13. *Жучок А.В.* Димоноиды // Алгебра и логика. – 2011. – Т. 50, № 4. – С. 471–496.

14. *Zhuchok A.V.* Free normal dibands // Algebra Discrete Math. – 2011. – V. 12, No 2. – P. 112–127.

15. *Petrich M., Silva P.V.* Structure of relatively free bands // Commun. Algebra. – 2002. – V. 30, No 9. – P. 4166–4187.

Поступила в редакцию
13.12.11

Жучок Анатолий Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент, докторант Киевского национального университета имени Тараса Шевченко.

E-mail: *zhuchok_a@mail.ru*