

УДК 519.6+539.3

doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.365-376

## ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН В РЕШЕТЧАТЫХ СТРУКТУРАХ, ОБРАЗОВАННЫХ СТЕРЖНЯМИ ПЕРЕМЕННОЙ КРИВИЗНЫ

*В.А. Левин<sup>1</sup>, К.М. Зингерман<sup>2</sup>, А.В. Вершинин<sup>1</sup>,  
И.А. Подпрудников<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,  
г. Москва, 119991, Россия*

<sup>2</sup>*Тверской государственный университет, г. Тверь, 170100, Россия*

### Аннотация

В статье исследовано влияние структурной неоднородности решетчатых конструкций на распространение упругих волн в них. Моделирование осуществлено в рамках механики деформируемого твердого тела на основе балочной модели плоских решетчатых структур с криволинейными упругими балками варьируемой кривизны. Изготовление таких структур возможно с использованием аддитивных технологий. Расчеты выполнены методом конечных элементов в системе инженерного прочностного анализа Фидесис. Исследовано распространение волн в решетчатых структурах двух типов: лифтовой и звездчато-круговой решетках. Выполнено сопоставление результатов для решеток с равномерно изогнутыми стержнями и решеток, кривизна стержней которых меняется в определенном направлении. Проанализировано влияние частоты колебаний на распространение упругих волн в решетчатых структурах.

**Ключевые слова:** решетчатая конструкция, структуры переменной кривизны, аддитивные технологии, упругие волны, метод конечных элементов, частотная фильтрация волн

### Введение

Перспективным направлением развития технологий является создание метаматериалов – материалов, структура которых позволяет придать им необычные свойства [1]. Изделия из таких материалов могут быть изготовлены с помощью аддитивных технологий [2]. Примером таких изделий являются решетчатые структуры [3], структурно неоднородные композиты [4]. Необычные свойства таких структур могут проявляться, например, при распространении в них упругих (звуковых) волн. В частности, возможно использование решетчатых структур для фильтрации упругих волн в некотором диапазоне частот [5–7]. В связи с этим представляет интерес математическое моделирование процессов распространения волн в решетчатых структурах и исследование влияния геометрических параметров структуры на напряженно-деформированное состояние в ней и скорость волны.

Цель настоящей работы – изучение влияния решетчатых структур на распространение акустических волн в решетчатых конструкциях разной конфигурации.

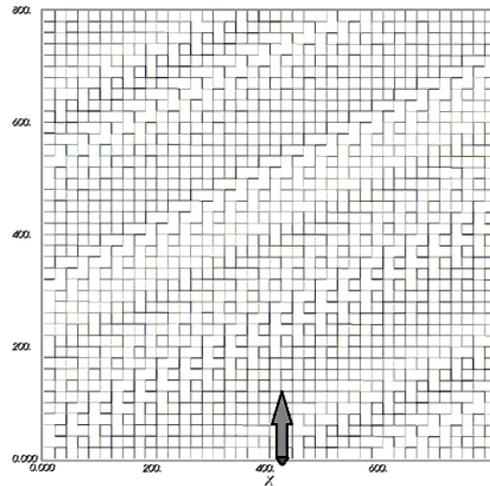


Рис. 1. Условия нагружения решетчатой структуры (точка посередине нижней границы – точка испускания импульса, стрелка указывает направление действия силы, отдельные балочные элементы показаны разными оттенками)

### 1. Постановка задачи

Дана структура, состоящая из множества узлов равномерной квадратной сетки на плоскости и криволинейных упругих балок (стержней) постоянного поперечного сечения, соединяющих соседние узлы. Оси всех стержней представляют собой кривые, расположенные в плоскости сетки, каждый узел соединяет от 4 до 2 стержней так, чтобы угол между этими кривыми был кратен  $\pi/2$ . Данная структура называется *решеткой*. Изначально решетка находится в ненагруженном состоянии. Массовые силы отсутствуют. В одном из узлов на границе решетки задается точечная сила (рис. 1 – направление действия силы выделено стрелкой), зависящая от времени, деформирующая решетку. Сила (импульс Берлаге) действует в плоскости решетки, направлена по внутренней нормали  $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$  к границе решетки и задается следующей формулой:

$$F(t) = [\pi\alpha t \exp(1 - \pi\alpha t)]^2 \sin(2\pi f_0 t).$$

где  $f_0$  – частота,  $\alpha$  – параметр, характеризующий амплитуду силы,  $t$  – время. Точкой испускания импульса служит точка на середине одной из границ решетки (на рисунке эта граница расположена вдоль оси  $Ox$ ). Также предполагается, что решетка не закреплена и имеет одинаковые размеры по осям  $Ox$  и  $Oy$ .

Математическая постановка задачи осуществляется в рамках линейной теории упругости для случая малых деформаций [8–10], материал стержней считается изотропным.

При создании геометрической модели решетчатой структуры криволинейные оси стержней аппроксимируются дугами окружностей (рис. 2).

В качестве параметра, характеризующего волнистость решетки, используется расстояние между серединой дуги (точкой  $A$  на рис. 2) и серединой отрезка  $OB$ , соединяющего концы этой дуги (точкой  $C$ ). Эту величину обозначим через  $c$ . Параметр волнистости  $c$  связан с радиусом  $R$  дуги и расстоянием  $a = OB$  между соседними узлами сетки соотношением  $c = R - \sqrt{R^2 - (a/2)^2}$ . Из этой формулы можно выразить  $R$ :  $R = c/2 + a^2/(8c)$ .

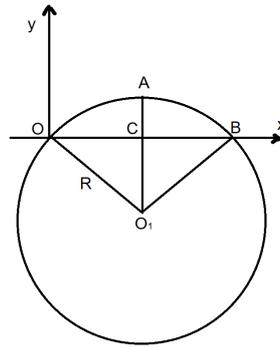


Рис. 2. Моделирование волнистости решетчатой структуры. Точки  $O$  и  $B$  – узлы сетки

Максимальное значение параметра волнистости, при котором дуги, выходящие из одного узла сетки, не будут иметь других точек пересечения, равно  $a(\sqrt{2} - 1)/2$ .

Для расчеты использовались следующие данные:

- форма стержней, составляющих решетку;
- механические характеристики материала решетки: модуль Юнга  $E$ , коэффициент Пуассона  $\nu$ , плотность  $\rho$ ;
- частота испускаемых волн;
- положение источника.

Форма стержней, образующих решетку, характеризуется следующими параметрами: толщина стержней  $h$ ; расстояние между двумя соседними узлами решетки  $a$  (пространственный период структуры); параметр волнистости  $c$ . Предполагается, что поперечное сечение стержней круговое.

Используются следующие безразмерные величины: относительная волнистость решетки  $\zeta = c/a$ ; параметр стройности для стержней в решетке  $\gamma = h/a$  (при расчетах полагалось  $\gamma = 0.01$ ); нормализованная частота  $\Omega = fa/c_L$  [5], где  $f$  – частота,  $c_L = \sqrt{E/\rho}$  – скорость продольных волн в стержне [2, 6].

## 2. Результаты расчетов

Расчеты выполнены с применением метода конечных элементов [11]. Был использован пакет прочностного анализа CAE Fidesys [12–18]. Применялись линейные балочные конечные элементы с круговым сечением. При расчетах в качестве материала решетки был выбран алюминий, для которого  $E = 73$  ГПа,  $\nu = 0.33$ ,  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>.

**2.1. Расчеты для структур, образованных стержнями постоянной кривизны.** При моделировании использовались три типа решеток постоянной кривизны: классическая решетка с прямолинейными стержнями (рис. 3), лифтовая (рис. 4) и звёздчато-круговая (рис. 5) решетки с относительной волнистостью 0.135. Исследование проводилось при одинаковых начальных и граничных условиях.

После проведения расчетов было выявлено, что при подаче импульса с нормализованной частотой  $\Omega = 38.5$  на решетку с волнистостью 0 деформации распространяются прямолинейно по пруту решетки, лишь слегка задевая соседние узлы. Практически в полной мере деформации сохранялись до противоположного края решетки (рис. 6, слева). На этом рисунке и далее показано распределение деформаций (по Мизесу) и скоростей в решетке в определенные моменты времени. Большим значениям деформаций и скоростей на рисунках соответствуют более светлые оттенки.

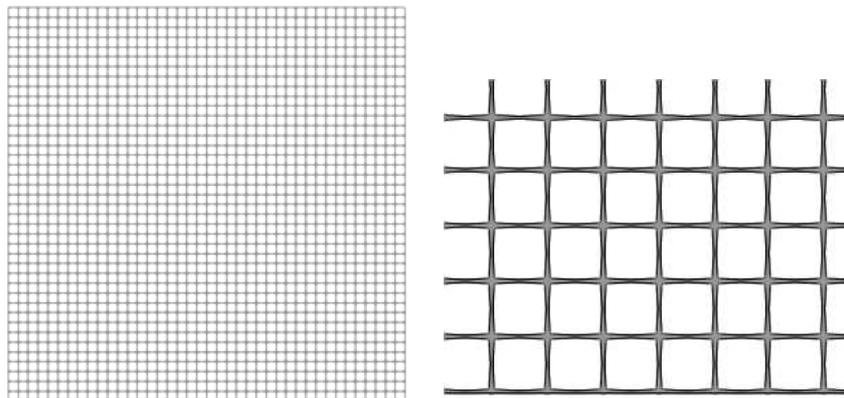


Рис. 3. Классическая решетка нулевой волнистости (справа – фрагмент решетки)

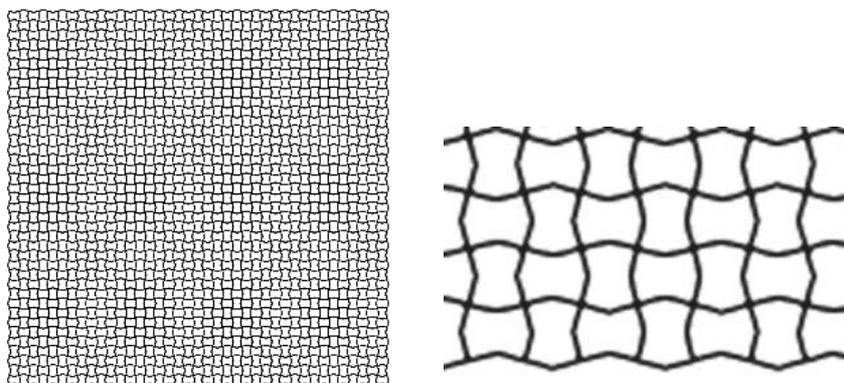


Рис. 4. Лифтовая решетка с относительной волнистостью  $\zeta = 0.135$  (справа – фрагмент решетки)

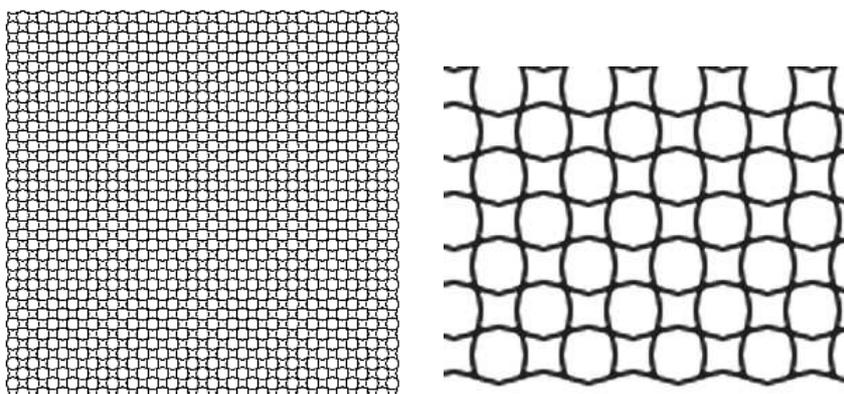


Рис. 5. Звёздчато-круговая решетка с относительной волнистостью  $\zeta = 0.135$  (справа – фрагмент решетки)

После достижения противоположной границы решетки импульс отразился и пошел в обратную сторону. Похожую картину можно наблюдать и при изучении скоростей (рис. 6, справа).

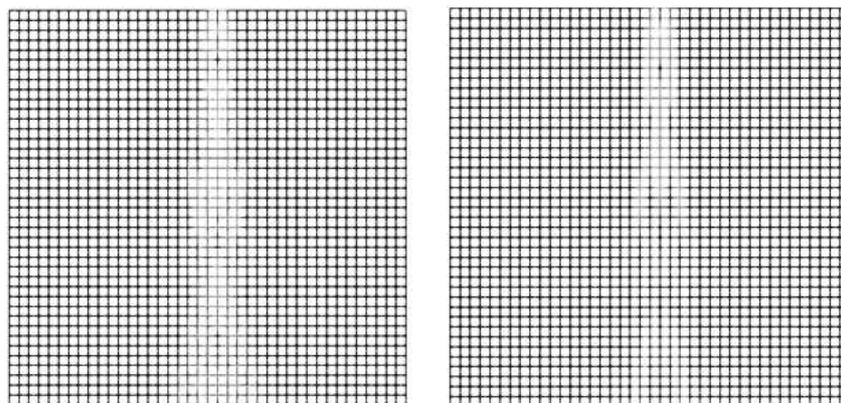


Рис. 6. Распространение деформаций (слева) и скоростей (справа) в решетке нулевой волнистости

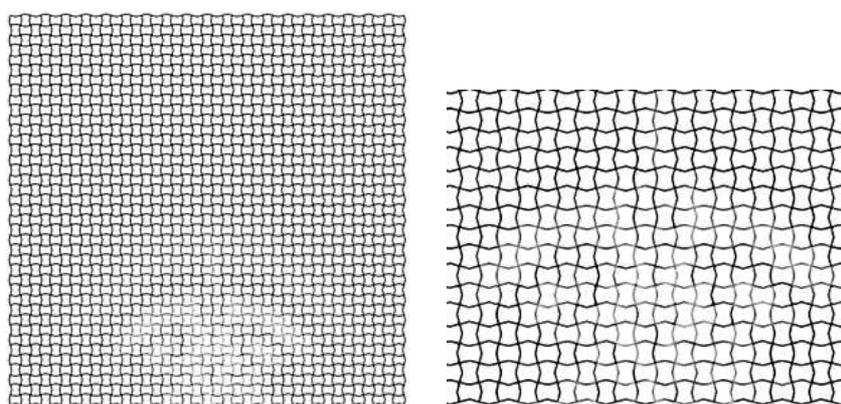


Рис. 7. Распространение деформаций в лифтовой решетке с относительной волнистостью  $\zeta=0.135$  (справа – фрагмент рисунка)

Таким образом, мы видим, что при использовании классических решеток распространение деформаций происходит с высокой скоростью, а потеря энергии из-за распространения на соседние узлы мала.

Рассмотрим влияние на процесс распространения волны лифтовой решетки. Единственное отличие заключается в форме решетки. На рис. 7 можно видеть, что лифтовая решетка с относительной волнистостью 0.135 значительно влияет на процесс распространения деформаций и скоростей. Более того, фронт распространения волны занимает сектор примерно в  $90^\circ$ . Это означает, что решетка своей структурой перенаправила достаточно большую часть импульса в стороны от оси симметрии.

Похожий эффект можно наблюдать и при исследовании распространения импульса по звездчато-круговой решетке (рис. 8). Благодаря необычной структуре фронт распространения деформаций и скоростей захватил сектор примерно в  $120^\circ$ .

На всех графиках видна также зона наибольших деформаций. Если в прямолинейной решетке весь центральный прут подвергся упругим деформациям, в лифтовой решетке за это же время лишь  $1/8$  центрального прута испытала на себе деформации, то в случае звездчато-круговой решетки волна успела продвинуться лишь на  $1/40$  главного прута за то же время. Это связано с тем, что структура

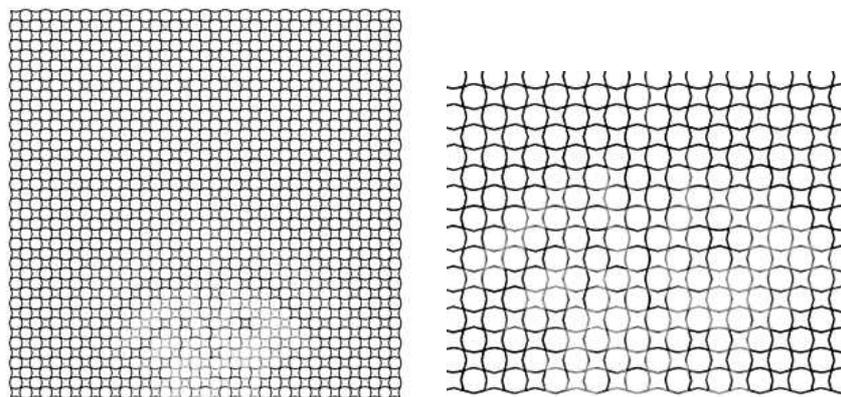


Рис. 8. Распространение деформаций в звёздчато-круговой решетке с относительной волнистостью  $\zeta=0.135$  (справа – фрагмент рисунка)

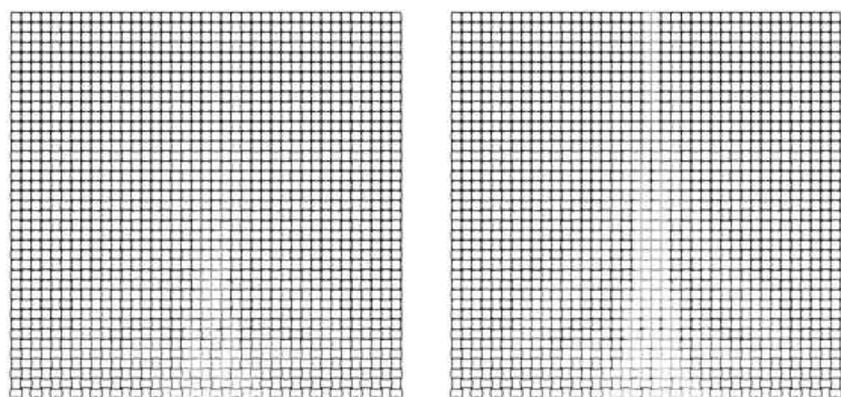


Рис. 9. Распространение деформаций (слева) и скоростей (справа) в лифтовой решетке со стержнями переменной кривизны

указанной решетки разделяет импульс на разные направления, перераспределяет его, что ясно видно при наблюдении динамической пошаговой картины после проведения расчетов.

**2.2. Расчеты для структур, образованных стержнями переменной кривизны.** Исследуем распространение волн в случае, когда волнистость решетки изменяется по направлению действия силы. Расчеты выполнены для случая, когда относительная волнистость линейно изменяется от величины 0.135 на той границе, к которой приложена точечная сила, до 0 на противоположной границе. Остальные параметры те же, что и ранее. На рис. 9 и 10 представлены результаты исследования. На левой стороне изображено распространение деформаций, справа – скоростей.

Из представленных данных следует, что после преодоления барьера в виде достаточно изогнутых частей прутьев деформации и скорости продолжают распространение по решетке практически без потерь, как в случае прямолинейной решетки. Но, в отличие от классической решетки, в решетке со стержнями переменной кривизны часть энергии осталась в зоне изогнутых частей прутьев. Это дает возможность путем подбора необходимой длины зоны изогнутых прутьев решетки пропускать насквозь лишь волны с нужными нам параметрами.

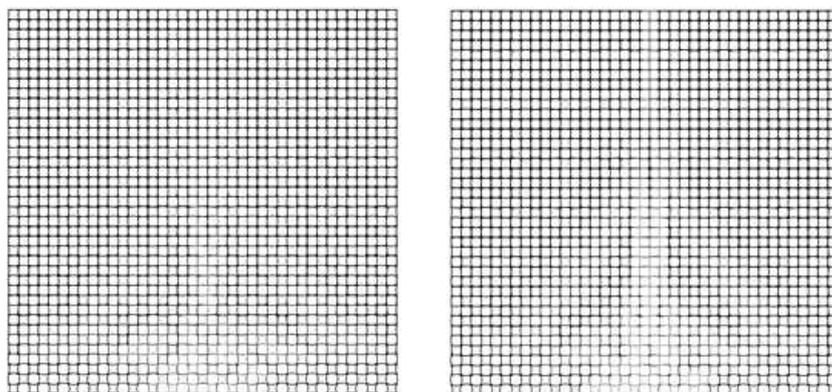


Рис. 10. Распространение деформаций (слева) и скоростей (справа) в звёздчато-круговой решетке со стержнями переменной кривизны

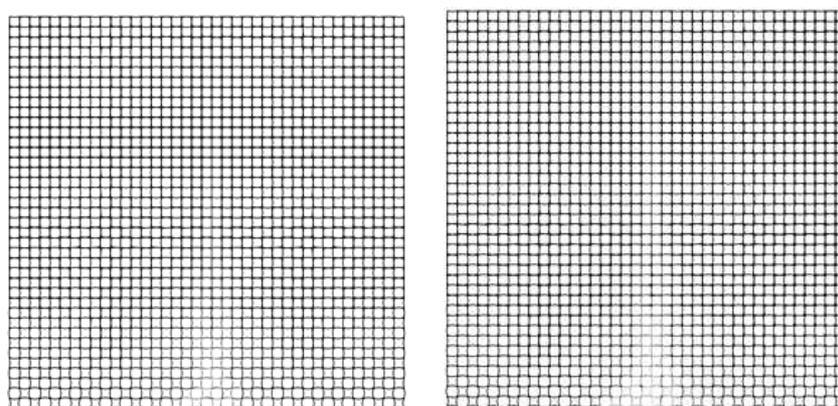


Рис. 11. Распространение деформаций (слева) и скоростей (справа) в звёздчато-круговой решетке со стержнями переменной кривизны при частоте, вдвое меньшей начальной

Для подтверждения этого предположения был проведен еще один расчет для звёздчато-круговой решетки со стержнями переменной кривизны при частоте волн, вдвое меньшей, чем в предыдущих расчетах. Результаты показаны на рис. 11. Видно, что за такое же время, как и раньше, возмущения по большей части остались в зоне сильной изогнутости решетки, а за пределами этой зоны деформации и скорости достаточно велики лишь в небольшой области.

### Заключение

В работе проведено моделирование различных типов решетчатых структур: классическая решетка с прямыми прутьями, лифтовая и звёздчато-круговая решетки с изогнутыми прутьями, а также решетка со стержнями переменной кривизны. Исследовано влияние структуры решетки на механизм распространения волны: наиболее медленно распространяется волна в звёздчато-круговой решетке. Передающиеся как по цепочке деформации и скорости от одного узла решетки к другому благодаря волнистости решетки дробятся и отклоняются от основной оси распространения.

Для задачи фильтрации волн по энергии целесообразно использовать решетчатую структуру со стержнями переменной кривизны, подбирая в зависимости от

желаемого результата степень волнистости и протяженность сильно волнистой зоны решетки. Для частотной фильтрации волн целесообразно использовать простые криволинейные решетки. В случае комбинации двух решеток со слегка различной продолжительностью сильноизогнутой зоны можно получить прибор, измеряющий частоту волны: если при прохождении одной решетки волна прошла насквозь, а при прохождении второй решетки волна не смогла добраться до противоположного края, то получается двойное неравенство, ограничивающее скорость волны. Чем меньше разница в размерах изогнутой зоны решетки со стержнями переменной кривизны, тем точнее измерительный прибор. Это исследование может найти применение во многих инженерных и производственных областях, например, при отделке и строительстве зданий, а также в научных исследованиях гравитационных волн (и не только), чтобы отфильтровать посторонние шумы.

Разработанный подход к численному моделированию решетчатых структур можно использовать и для решения других задач, варьируя волнистость и другие параметры решетки. Например, можно определить геометрию наиболее прочной структуры при воздействии точечной силы.

В дальнейшем планируется исследовать нелинейные эффекты, которые проявляются при распространении волн в решетчатых структурах, изготовленных из высокоэластичных материалов.

**Благодарности.** Работа выполнена в ФГБОУ ВО «ТГПУ имени Л.Н. Толстого» при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 14.577.21.0271, уникальный идентификатор проекта RFMEFI57717X0271).

#### Литература

1. Вендик И.Б., Вендик О.Г. Метаматериалы и их применение в технике сверхвысоких частот // Журн. техн. физики. – 2013. – Т. 83, № 1. – С. 3–28.
2. Cheng L., Liang X., Bai J., Chen Q., Lemon J., To A. On utilizing topology optimization to design support structure to prevent residual stress induced build failure in laser powder bed metal additive manufacturing // Addit. Manuf. – 2019. – V. 27. – P. 290–304. – doi: 10.1016/j.addma.2019.03.001.
3. Trainiti G., Rimoli J.J., Ruzzene M. Wave propagation in undulated structural lattices // Int. J. Solids Struct. – 2016. – V. 97–98. – P. 431–444. – doi: 10.1016/j.ijsolstr.2016.07.006.
4. Fish J., Shek K. Multiscale analysis of composite materials and structures // Compos. Sci. Technol. – 2000. – V. 60, No 12–13. – P. 2547–2556. – doi: 10.1016/S0266-3538(00)00048-8.
5. Gibson L.J., Ashby M.F. Cellular Solids: Structure and Properties. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. – 510 p.
6. Phani A.S., Woodhouse J., Fleck N. Wave propagation in two-dimensional periodic lattices // J. Acoust. Soc. Am. – 2006. – V. 119, No 4. – P. 1995–2005. – doi: 10.1121/1.2179748.
7. Vasiliev A.A., Dmitriev S.V., Miroshnichenko A.E. Multi-field modeling of a Cosserat lattice: Models, wave filtering, and boundary effects // Eur. J. Mech. A/Solids. – 2014. – V. 46. – P. 96–105. – doi: 10.1016/j.euromechsol.2014.02.011.
8. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. – М.: Наука, 1970. – 568 с.
9. Победра Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды. Курс лекций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 272 с.
10. Эглит М.Э. Лекции по механике сплошных сред. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2008. – 318 с.

11. Левин В.А., Вершинин А.В. Численные методы. Параллельные вычисления на ЭВМ. Т. 2. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 544 с.
12. Морозов Е.М., Левин В.А., Вершинин А.В. Прочностной анализ. Фидесис в руках инженера. – М.: URSS, 2015. – 408 с.
13. Левин В.А., Вершинин А.В. Промышленный пакет для прочностного инженерного анализа // XI Всерос. съезд по фундам. проблемам теорет. и прикл. механики. Казань, 20–24 авг. 2015 г.: Сб. докл. – Казань: Казан. ун-т, 2015. – С. 2281–2283.
14. Левин В.А., Вершинин А.В., Мишин И.А., Сбойчаков А.М., Петровский К.А. Распространение упругих волн в нелинейно-упругих средах с начальными деформациями. Компьютерное моделирование с использованием программного комплекса прочностного инженерного анализа Fidesys // Технологии сейсморазведки. – 2012. – № 4. – С. 29–32.
15. Левин В.А., Вершинин А.В. К моделированию распространения упругих волн в неоднородных средах с использованием параллельных вычислений (технология cuda) // Материалы Междунар. науч. конф. «Современные проблемы математики, механики, информатики». Тула, 23–27 нояб. 2009 г. – Тула: ТулГУ, 2009. – С. 215–217.
16. Levin V.A., Vershinin A.V., Zingerman K.M. Numerical analysis of propagation of nonlinear waves in prestressed solids // Modern Appl. Sci. – 2016. – V. 10, No 4. – P. 158–167. – doi: 10.5539/mas.v10n4p158.
17. Charara M., Vershinin A., Sabitov D., Pekar G. SEM wave propagation in complex media with tetrahedral to hexahedral mesh // Proc. 73rd Eur. Association of Geoscientists and Engineers Conf. and Exhib. – Vienna, Austria, 2011. – P. 41–45.
18. CAE Fidesys. – URL: <https://cae-fidesys.com/>.

Поступила в редакцию  
28.05.19

---

**Левин Владимир Анатольевич**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной механики

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия  
E-mail: [v.a.levin@mail.ru](mailto:v.a.levin@mail.ru)

**Зингерман Константин Моисеевич**, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического моделирования и вычислительной математики

Тверской государственный университет  
ул. Желябова, д. 33, г. Тверь, 170100, Россия  
E-mail: [zingerman@rambler.ru](mailto:zingerman@rambler.ru)

**Вершинин Анатолий Викторович**, доктор физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной механики

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия  
E-mail: [versh1984@mail.ru](mailto:versh1984@mail.ru)

**Подпружников Иван Андреевич**, студент механико-математического факультета

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия  
E-mail: [ivanpodpr08@yandex.ru](mailto:ivanpodpr08@yandex.ru)

doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.365-376

**An Approach to the Analysis of Propagation  
of Elastic Waves in Grids Made of Rods of Varying Curvature**

*V.A. Levin<sup>a\*</sup>, K.M. Zingerman<sup>b\*\*</sup>, A.V. Vershinin<sup>a\*\*\*</sup>, I.A. Podpruzhnikov<sup>a\*\*\*\*</sup>*

<sup>a</sup>*Moscow State University, Moscow, 119991, Russia*

<sup>b</sup>*Tver State University, Tver, 170100, Russia*

E-mail: <sup>\*</sup>*v.a.levin@mail.ru*, <sup>\*\*</sup>*zingerman@rambler.ru*,

<sup>\*\*\*</sup>*versh1984@mail.ru*, <sup>\*\*\*\*</sup>*ivanpodpr08@yandex.ru*

Received May 28, 2019

**Abstract**

The influence of structural irregularity of lattice structures on the propagation of elastic waves in these structures was analyzed. The modeling was performed within the framework of solid body mechanics using the beam model of plane lattice structures. It was assumed that these structures are made of curvilinear elastic beams of varying curvature. Such structures can be made by additive manufacturing. The computations were performed by the finite-element method using the FIDESYS software. The propagation of waves was investigated for two types of lattice structures: elevator and star-shaped lattices. The results of computations show that the wave in these structures is propagated slower than in the classical structure with straight beams. The wave in the star-shaped lattice is propagated slower than in the elevator lattice. The results for the lattices with uniformly curved beams were compared with the results for the grids made of beams of varying curvature. The effect of wave frequency on the propagation of elastic waves in lattice structures was analyzed. The conceptual model of a device for wave frequency measuring was proposed for monochrome waves. The results can be used for design of filters, dampers of vibrations, and devices for wave frequency measuring.

**Keywords:** lattice structure, graded structures, elastic waves, additive manufacturing, finite-element method, frequency filtering of waves

**Acknowledgments.** The study was performed at Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University and supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. 14.577.21.0271, project ID RFMEFI57717X0271).

**Figure Captions**

Fig. 1. The scheme of loading of the lattice structure (the point in the middle of the bottom boundary is the source point, the arrow specifies the force direction, individual beam elements are shown by different gradations).

Fig. 2. Modeling of undulation of a lattice structure. Points *O* and *B* are mesh nodes.

Fig. 3. The classical lattice without undulation (a fragment of the lattice is shown on the right).

Fig. 4. The elevator lattice with the relative undulation  $\zeta = 0.135$  (a fragment of the lattice is shown on the right).

Fig. 5. The star-shaped lattice with the relative undulation  $\zeta = 0.135$  (a fragment of the lattice is shown on the right).

Fig. 6. The propagation of strains (on the left) and velocities (on the right) in the lattice without undulation.

Fig. 7. The propagation of strains in the elevator lattice with the relative undulation  $\zeta = 0.135$  (a fragment of the lattice is shown on the right).

Fig. 8. The propagation of strains in the star-shaped lattice with the relative undulation  $\zeta = 0.135$  (a fragment of the lattice is shown on the right).

Fig. 9. The propagation of strains and velocities in the elevator lattice with graded curvature.

Fig. 10. The propagation of strains and velocities in the star-shaped lattice with graded curvature.

Fig. 11. The propagation of strains and velocities in the star-shaped lattice with graded curvature for the case in which the frequency is twice smaller as the initial one.

### References

1. Vendik I.B., Vendik O.G. Metamaterials and their application in ultrahigh-frequency engineering. *Zh. Tekh. Fiz.*, 2013, vol. 83, no. 1, pp. 3–28. (In Russian)
2. Cheng L., Liang X., Bai J., Chen Q., Lemon J., To A. On utilizing topology optimization to design support structure to prevent residual stress induced build failure in laser powder bed metal additive manufacturing. *Addit. Manuf.*, 2019, vol. 27, pp. 290–304. doi: 10.1016/j.addma.2019.03.001.
3. Trainiti G., Rimoli J.J., Ruzzene M. Wave propagation in undulated structural lattices. *Int. J. Solids Struct.*, 2016, vol. 97–98, pp. 431–444. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2016.07.006.
4. Fish J., Shek K. Multiscale analysis of composite materials and structures. *Compos. Sci. Technol.*, 2000, vol. 60, nos. 12–13, pp. 2547–2556. doi: 10.1016/S0266-3538(00)00048-8.
5. Gibson L.J., Ashby M.F. *Cellular Solids: Structure and Properties*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1997. 510 p.
6. Phani A.S., Woodhouse J., Fleck N. Wave propagation in two-dimensional periodic lattices. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2006, vol. 119, no. 4, pp. 1995–2005. doi: 10.1121/1.2179748.
7. Vasiliev A.A., Dmitriev S.V., Miroshnichenko A.E. Multi-field modeling of a Cosserat lattice: Models, wave filtering, and boundary effects. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 2014, vol. 46, pp. 96–105. doi: 10.1016/j.euromechsol.2014.02.011.
8. Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoi sredy* [Continuum Mechanics]. Vol. 2. Moscow, Nauka, 1970. 568 p. (In Russian)
9. Pobedrya B.E., Georgievskiy D.V. *Osnovy mekhaniki sploshnoi sredy. Kurs lektsii* [Fundamentals of Continuum Mechanics. A Course of Lectures]. Moscow, FIZMATLIT, 2006. 272 p. (In Russian)
10. Eglit M.E. *Lektsii po mekhanike sploshnykh sred* [Lectures on Continuum Mechanics]. Moscow, Izd. Mosk. Univ., 2008. 318 p. (In Russian)
11. Levin V.A., Vershinin A.V. *Chislennyye metody. Parallelnyye vychisleniya na EVM* [Numerical Methods. Parallel Computing]. Vol. 2. Moscow, FIZMATLIT, 2015. 544 p. (In Russian)
12. Morozov E.M., Levin V.A., Vershinin A.V. *Prochnostnoi analiz. Fidesis v rukakh inzhenera* [Strength Analysis. Fidesys in the Hands of an Engineer]. Moscow, URSS, 2015. 408 p. (In Russian)

13. Levin V.A., Vershinin A.V. Industrial package for engineering strength analysis. *XI Vseros. s'ezd po fundam. problemam teoret. i prikl. mekhaniki. Kazan'*, 20–24 avg. 2015 g. [Proc. XI All-Russ. Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics. Kazan, Aug. 20–24, 2015]. Kazan, Kazan. Univ., 2015, pp. 2281–2283. (In Russian)
14. Levin V.A., Vershinin A.V., Mishin I.A., Sboichakov A.M., Petrovskii K.A. Propagation of elastic waves in nonlinear media with initial strains. Computer modeling in CAE Fidesys. *Tekhnol. Seismorazved.*, 2012, no. 4, pp. 29–32. (In Russian)
15. Levin V.A., Vershinin A.V. To modeling of elastic wave propagation in inhomogeneous media using parallel computing (CUDA technology). *Materialy Mezhdunar. nauch. konf. "Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki". Tula, 23–27 noyab. 2009 g.* [Proc. Int. Sci. Conf. "Modern Problems of Mathematics, Mechanics, and Informatics". Tula, Nov. 23–27, 2009]. Tula, TulGU, 2009, pp. 215–217. (In Russian)
16. Levin V.A., Vershinin A.V., Zingerman K.M. Numerical analysis of propagation of nonlinear waves in prestressed solids. *Modern Appl. Sci.*, 2016, vol. 10, no. 4, pp. 158–167. doi: 10.5539/mas.v10n4p158.
17. Charara M., Vershinin A., Sabitov D., Pekar G. SEM wave propagation in complex media with tetrahedral to hexahedral mesh. *Proc. 73rd Eur. Association of Geoscientists and Engineers Conf. and Exhib.* Vienna, Austria, 2011, pp. 41–45.
18. CAE Fidesys. Available at: <https://cae-fidesys.com/>.

---

**Для цитирования:** Левин В.А., Зингерман К.М., Вершинин А.В., Подпружников И.А. Подход к исследованию распространения упругих волн в решетчатых структурах, образованных стержнями переменной кривизны // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2019. – Т. 161, кн. 3. – С. 365–376. – doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.365-376.

**For citation:** Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Podpruzhnikov I.A. An approach to the analysis of propagation of elastic waves in grids made of rods of varying curvature. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 161, no. 3, pp. 365–376. doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.365-376. (In Russian)