

УДК 535.14

СПЕКТР МОЩНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ДВУХУРОВНЕВЫХ АТОМОВ ПРИ КОНЕЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

В.В. Семин, А.В. Горохов

Аннотация

Рассмотрена система двух взаимодействующих двухуровневых атомов. В марковском приближении получено операторно-кинетическое уравнение для редуцированной матрицы плотности атомов. Аналитически рассчитан и построен контур линии излучения для разных расстояний между атомами и различных значений температуры термостата.

Ключевые слова: операторно-кинетическое уравнение, система двухуровневых атомов, контур линии излучения.

Введение

Любая реальная физическая система всегда связана с внешним окружением и поэтому эволюционирует неунитарным образом, что приводит к необратимому разрушению когерентности. В лазерной спектроскопии, квантовой оптике и квантовой радиофизике одной из центральных является задача описания малой динамической подсистемы, находящейся в контакте с термодинамически равновесной подсистемой – термостатом, с которой она слабо взаимодействует.

В настоящей статье рассматривается система двух диполь-дипольно взаимодействующих атома двухуровневых атомов при конечной температуре резонатора. На основе решения операторного кинетического уравнения, описывающего поведение динамической подсистемы, строится контур линии излучения в явном виде. Важность рассмотрения в квантовой теории релаксации моделей, имеющих точное «квантовое» решение, отмечалась в [1], где это связывалось с рассмотрением физической кинетики как раздела общей теории открытых систем [2, 3] и проблемой природы необратимости. В отличие от статьи [4], в настоящей статье использовано марковское приближение.

1. Модель системы и операторное кинетическое уравнение

Следуя [5], изложим основные положения теории, позволяющей описывать взаимодействующие двухуровневые атомы.

Рассмотрим следующую модель. Два идентичных двухуровневых атома с частотой перехода между уровнями ω_0 находятся на фиксированном расстоянии R друг от друга. Система атомов находится в тепловом резервуаре, с которым она слабо взаимодействует. Электромагнитное поле с волновым вектором \mathbf{k} падает на систему, индуцируя дипольные моменты. После чего атомы начинают взаимодействовать между собой диполь-дипольным образом. Здесь и далее будем интересоваться спектральными свойствами излучения, испущенного такой системой.

Гамильтониан описанной системы запишем в виде:

$$H = H_A + H_T + H_{\text{int}} + H_{AA}, \quad (1)$$

где

$H_A = \hbar\omega_0 \sum_p \sigma_p^z$ – гамильтониан свободных атомов, ω_0 – частота переходов в атоме, σ_p^z – диагональный генератор группы SU(2);

$H_T = \hbar \sum_k \omega_k b_k^+ b_k$ – гамильтониан термостата (теплового резервуара), ω_k – частота, а b_k^+ и b_k – операторы рождения и уничтожения k -го фотона соответственно;

$H_{\text{int}} = \hbar \sum_{k,p} (g_{kp} b_k \sigma_p^+ \exp(i\mathbf{k}\mathbf{R}_p) + \text{h.c.})$ – гамильтониан взаимодействия атома и термостата, $g_{kp} = \frac{\omega_0}{\omega_k} \sqrt{\frac{2\pi\omega_k}{\hbar V}} \mu_p \mathbf{e}_\lambda$ – константа атом-полевого взаимодействия, V – объем квантования, μ_p – вектор дипольного момента атома, \mathbf{e}_λ – вектор поляризации, σ_p^\pm – повышающий и понижающий атомные операторы, \mathbf{R}_p – радиус-вектор p -го атома, \mathbf{k} – волновой вектор.

$H_{AA} = \sum_{p \neq p'} V_{pp'} \sigma_p^+ \sigma_{p'}^-$ – гамильтониан диполь-дипольного взаимодействия, $V_{pp'}$ – константа диполь-дипольного взаимодействия.

Для дальнейшей работы с гамильтонианом (1) удобно перейти в представление взаимодействия:

$$H_I = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} H e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} = \hbar \sum_{k,p} \left(g_{kp} b_k \sigma_p^+ e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_{pp'} + i(\omega_0 - \omega_k)t} + \text{h.c.} \right) + \sum_{p \neq p'} V_{pp'} \sigma_p^+ \sigma_{p'}^-, \quad (2)$$

где H_0 – гамильтониан системы без взаимодействия.

Путем итерирования по константам взаимодействия атомов и термостата из квантового уравнения Лиувилля с гамильтонианом (2) легко получается следующее интегро-дифференциальное уравнение [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{AT}(t)}{\partial t} = & -\frac{i}{\hbar} [H_{AA}(t), \rho_{AT}(t)] - \frac{i}{\hbar} [H_I(t), \rho_{AT}(0)] - \\ & - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t [H_I(t), [H_I(t-t'), \rho_{AT}(t-t')]] dt', \quad (3) \end{aligned}$$

где ρ_{AT} – матрица плотности атома и термостата.

Поскольку термостат является протяженной системой со множеством степеней свободы, можно предположить, что никакие изменения, происходящие с динамической подсистемой не могут заметным образом изменить состояние термостата (благодаря приближению необратимости для матрицы плотности), то есть $\rho_{AT}(t') = \rho_A(t') \otimes \rho_T(0)$. Поскольку релаксация разрушает память о прошлом, то $\rho(t') \approx \rho(t)$.

Будем предполагать, что состояния термостата распределены по некоррелированной тепловой смеси состояний; тогда средние значения переменных термостата [7] будут следующими:

$$\begin{aligned} \langle b_j \rangle &= \langle b_j^+ \rangle = 0, \\ \langle b_j b_{j'}^+ \rangle &= (N+1) \delta_{jj'}, \\ \langle b_j^+ b_{j'} \rangle &= N \delta_{jj'}, \\ \langle b_j^+ b_{j'}^+ \rangle &= \langle b_j b_{j'} \rangle = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $N = \left[\exp\left(-\frac{\hbar\omega_j}{k_b T}\right) - 1 \right]^{-1}$ – среднее число бозонов в резервуаре на частоте ω_j при температуре T , k_b – постоянная Больцмана.

Тогда, взяв след по переменным термостата, с учетом (4) после достаточно громоздких преобразований получим:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -i \sum_{p \neq p'} \Omega_{pp'} [\sigma_p^+ \sigma_{p'}^-, \rho] - \sum_{p, p'} \frac{\gamma_{pp'}}{2} \left\{ (N+1) (\sigma_p^+ \sigma_{p'}^- \rho + \rho \sigma_p^+ \sigma_{p'}^- - 2 \sigma_{p'}^- \rho \sigma_p^+) + \right. \\ & \left. + N (\sigma_p^- \sigma_{p'}^+ \rho + \rho \sigma_p^- \sigma_{p'}^+ - 2 \sigma_p^+ \rho \sigma_{p'}^-) \right\}. \quad (5) \end{aligned}$$

В уравнении (5) не зависящие от времени константы определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega_{pp'} &= \frac{3\gamma_0}{4} \left\{ -\frac{\cos(kR_{pp'})}{kR_{pp'}} + \frac{\sin(kR_{pp'})}{(kR_{pp'})^2} + \frac{\cos(kR_{pp'})}{(kR_{pp'})^3} \right\} = \gamma_0 \Omega(kR_{pp'}), \\ \gamma_{pp'} &= \frac{3\gamma_0}{2} \left\{ \frac{\sin(kR_{pp'})}{kR_{pp'}} + \frac{\cos(kR_{pp'})}{(kR_{pp'})^2} - \frac{\sin(kR_{pp'})}{(kR_{pp'})^3} \right\} = \gamma_0 \phi(kR_{pp'}), \\ N &= \left(\exp \left[-\frac{\hbar\omega_0}{k_b T} \right] - 1 \right)^{-1}, \quad \gamma_0 = \frac{4\omega_0^3}{3\hbar c^3}. \end{aligned}$$

Здесь $R_{pp'} = |\mathbf{R}_{pp'}|$, $\mathbf{R}_{pp'}$ – вектор, соединяющий атомы; γ_0 – характерная константа, возникающая в теории одного атома; N – среднее число фотонов на частоте атомного перехода. При выводе считалось, что дипольные моменты атомов параллельны между собой и перпендикулярны соединяющей их линии.

2. Решение операторного кинетического уравнения

Для работы с (5) необходимо выбрать адекватный рассматриваемой задаче базис. Хорошо известно, что система двух атомов описывается приводимым представлением группы энергетического спина $SU(2)$, равным прямому произведению ее неприводимых представлений $T^{1/2}$, соответствующих спину 1/2, причем нетрудно показать, что такое прямое произведение сводится к прямой сумме неприводимых представлений T^0 и T^1 :

$$T^{1/2} \otimes T^{1/2} = T^0 \oplus T^1,$$

где T^0 отвечает коллективному спину, равному нулю, а T^1 – коллективному спину, равному единице.

Рассматриваемая система имеет четыре базисных состояния: нижнее $|g\rangle$ (оба атома не возбуждены), запутанные симметричное $|s\rangle$ и антисимметричное состояния $|a\rangle$, отвечающие одному возбужденному и одному невозбужденному атомам, и верхнее состояние $|u\rangle$, отвечающее двум возбужденным атомам. Данные состояния связаны с исходным базисом для двух (первоначально не взаимодействующих) двухуровневых атомов следующим образом:

$$\begin{aligned} |g\rangle &= |1, 1\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle, \\ |s\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 2\rangle + |2, 1\rangle), \\ |a\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 2\rangle - |2, 1\rangle), \\ |u\rangle &= |2, 2\rangle = |2\rangle \otimes |2\rangle. \end{aligned}$$

Без учета взаимодействия состояния $|s\rangle$ и $|a\rangle$ вырождены, то есть соответствуют одному уровню энергии.

Для матричных элементов оператора плотности в определенном выше базисе легко получить систему 16 обыкновенных дифференциальных уравнений, которая распадается на группы независимых уравнений.

Решение получившейся системы в общем виде представляет собой достаточно сложную задачу. При этом получившиеся аналитические выражения чрезвычайно громоздки, и мы их здесь не приводим.

3. Контур линии излучения

Спектр излучения системы двух атомов определяется следующим выражением [8]:

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} dt (\langle \sigma_1^+(t) \sigma_1^-(0) \rangle + \langle \sigma_2^+(t) \sigma_2^-(0) \rangle) e^{-i\omega t} + \right. \\ \left. + \cos(\Delta \mathbf{k} \mathbf{R}) \int_0^{\infty} dt (\langle \sigma_1^+(t) \sigma_2^-(0) \rangle + \langle \sigma_2^+(t) \sigma_1^-(0) \rangle) e^{-i\omega t} \right\},$$

где $\Delta \mathbf{k} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$, разность волновых векторов падающей и излученной волн. Слагаемые, содержащие $\cos(\Delta \mathbf{k} \mathbf{R})$, описывают интерференцию.

Используя квантовую теорему регрессии [9], путем решения уравнения (5) можно построить контур линии излучения, который имеет вид:

$$S(\omega) = \operatorname{Re} \left(\frac{4i (\rho_{ss} (C + 2\omega_c) - \rho_{uu} (B - 2\omega_c)) \cos^2(\alpha)}{\pi (4g^2 - 4i\gamma_0 g + A\gamma_0^2 - 4\omega_c^2 + 4i(2N + 1)\gamma_0(\phi + 2)\omega_c)} + \right. \\ \left. + \frac{4i \sin^2(\alpha) \rho_{sa}}{\pi (2g + i\gamma_0(2N(\phi - 2) + \phi - 1) + 2\omega_c)} \right),$$

где

$$A = \phi^2 + 8N(N + 1)\phi + 4\phi + 12N(N + 1) + 3, \quad \rho_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_{ij}(t),$$

$$B = 2g + i\gamma_0(\phi + N(4\phi + 6) + 3), \quad g = \gamma_0 \Omega(kR),$$

$$C = 2g - i\gamma_0(\phi + N(4\phi + 6) + 3), \quad \alpha = \Delta \mathbf{k} \mathbf{R} / 2, \quad \omega_c = \omega - \omega_0.$$

Хорошо видно, что спектр излучения при достаточно большом расстоянии между атомами представляет собой лоренцевую кривую. При уменьшении расстояния спектр деформируется и превращается в дуплет. Это объясняется тем, что на малых расстояниях достаточно сильно диполь-дипольное взаимодействие, которое снимает вырождение между симметричным и антисимметричным полностью перепутанными квазиуровнями. При этом спектр оказывается не симметричным, что свидетельствует о подавлении некоторых коротковолновых переходов.

При увеличении температуры наблюдается уширение спектральной линии, как и должно быть.

Заключение

В работе исследована система двух идентичных взаимодействующих двухуровневых атомов при конечной температуре. На основе решения операторного кинетического уравнения рассчитан контур линии излучения данной системы. Показано, что с уменьшением безразмерного расстояния kR , то есть при росте диполь-дипольного взаимодействия, происходит расщепление лоренцевой кривой в дуплет,

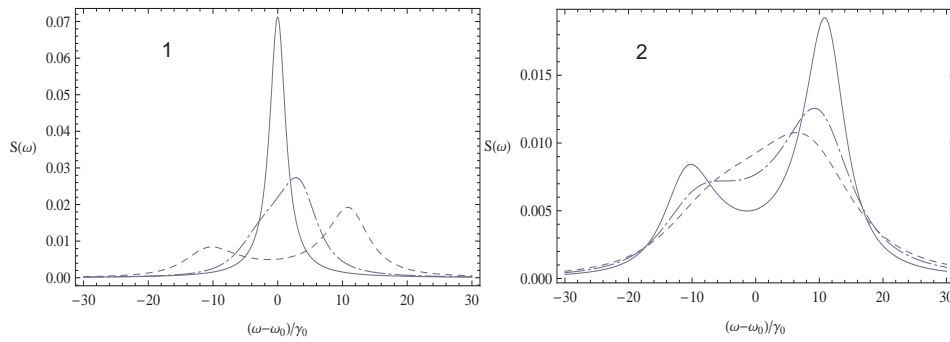


Рис. 1. Контур линии излучения системы двух взаимодействующих атомов: 1) для различных расстояний между атомами: $kR = 10\pi$ (сплошная линия), $kR = \pi/6$ (штрих-пунктирная линия), $kR = \pi/8$ (пунктирная линия); 2) для различных температур: $N = 1$ (сплошная линия), $N = 2$ (штрих-пунктирная линия), $N = 3$ (пунктирная линия)

что свидетельствует о снятии вырождения между симметричным и антисимметричным запутанными состояниями. Несимметричность полученной кривой свидетельствует о подавлении некоторых коротковолновых переходов. С ростом же температуры происходит уширение спектральных линий. В предельных случаях все полученные выражения переходят в известные.

Summary

V.V. Semin, A.V. Gorokhov. Radiation Power Spectrum for Two Interacting Two-Level Atoms at Final Temperature.

The system of two interacting two-level atoms was investigated. The master equation for the reduced atomic density matrix in Markovian approximation was obtained. The spectral line shape was analytically calculated and plotted for different values of the distance between atoms and different thermostat temperatures.

Key words: master equation, system of two-level atoms, spectral line shape.

Литература

1. *Горохов А.В.* Методы теории групп в задачах квантовой физики. Ч. 3. – Куйбышев.: Изд-во Куйб. ун-та, 1983. – 96 с.
2. *Davies E.B.* Quantum Theory of Open System. – N. Y.: Acad. Press, 1976. – 412 p.
3. *Блум К.* Теории матрицы плотности и ее приложения. – М.: Мир, 1983. – 248 с.
4. *Семин В.В., Горохов А.В.* Квантовая немарковская релаксация в системе двухуровневых атомов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2010. – Т. 152, кн. 2. – С. 158–163.
5. *Lehmberg R.H.* Radiation from N-atom system. I. General formalism // Phys. Rev. A. – 1970. – V. 2. – P. 883–889.
6. *Файн В.Н.* Квантовая радиофизика. Т. 1. Фотоны и нелинейные среды. – М.: Сов. радио, 1972. – 472 с.
7. *Скайли М.О., Зубайри М.С.* Квантовая оптика. – М.: Физматлит, 2003. – 512 с.
8. *Горохов А.В., Семин В.В.* Расчет спектра флуоресценции для двух взаимодействующих атомов // Оптика и спектр. – 2009. – Т. 107, № 4. – С. 617–622.
9. *Lax M.* Quantum Noise. XI. Multitime correspondence between quantum and classical stochastic processes // Phys. Rev. – 1968. – V. 172. – P. 350–361.

Поступила в редакцию
21.12.09

Семи́н Виталий Влади́мирович – аспирант кафедры общей и теоретической физики Самарского государственного университета.

Горохов Александр Викторович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики Самарского государственного университета.
E-mail: *gorokhov@ssu.samara.ru*