

## МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ МИКРОСТРУКТУРЫ МАТЕРИАЛА ПРИ СЕЛЕКТИВНОМ ЛАЗЕРНОМ СПЕКАНИИ С УЧЕТОМ БОЛЬШИХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

*В.А. Левин<sup>1</sup>, К.М. Зингерман<sup>2</sup>, К.Ю. Крапивин<sup>3</sup>,  
О.А. Рябова<sup>2</sup>, А.В. Кукушкин<sup>4</sup>*

<sup>1</sup>*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,  
г. Москва, 119991, Россия*

<sup>2</sup>*Тверской государственный университет, г. Тверь, 170100, Россия*

<sup>3</sup>*ООО «Фидесис», г. Москва, 121205, Россия*

<sup>4</sup>*Тульский государственный педагогический университет имени Л.Н. Толстого,  
г. Тула, 300026, Россия*

### Аннотация

Предложена математическая модель формирования микроструктуры материала в процессе селективного лазерного спекания. Модель основана на расчете напряженно-деформированного состояния представительного объема порошка, содержащего несколько частиц, в результате их контактного взаимодействия, вызванного силами поверхностного натяжения. При моделировании предполагается, что частицы состоят из упругопластического материала, свойства которого описываются ассоциативной моделью Друкера–Прагера с упрочнением, и учитываются нелинейные эффекты, обусловленные большими деформациями. Модель позволяет определить форму частиц в деформированном состоянии и форму пор. Приведены результаты численного решения задачи о контактном взаимодействии двух первоначально сферических частиц порошка. В качестве исходных данных при расчетах заданы перемещения центров частиц под действием сил поверхностного натяжения. Расчеты выполнены методом конечных элементов. Интегрирование уравнения течения проведено по неявной обратной схеме Эйлера. При расчете контактного взаимодействия используется mortar-метод. Приведены распределение контактных напряжений по поверхности частиц порошка и распределение пластических деформаций по Мизесу в сечении этих частиц. Исследована зависимость радиуса зоны контакта от перемещений центров частиц при контакте и параметра материала, характеризующего зависимость пластического течения от давления.

**Ключевые слова:** селективное лазерное спекание, формирование микроструктуры, большие деформации, пластичность, численный анализ, метод конечных элементов

### Введение

Селективное лазерное спекание – перспективная технология изготовления элементов конструкций [1, 2]. Прочностные характеристики элементов конструкций, изготовленных этим методом, существенно зависят от микроструктуры материала, в частности от расположения и формы пор. В связи с этим представляется важным моделирование процесса формирования микроструктуры материала при лазерном спекании.

Предлагаемая модель описывает в рамках механики деформируемого твердого тела формирование микроструктуры материала при твердофазном спекании частиц порошка и основана на идеях, представленных, например, в [1]. В соответствии с теоретическими представлениями [3–5] спекание – это диффузионная ползучесть под действием сил поверхностного натяжения. Это определение может быть обоснованием модели слияния частиц порошка, основанной на теории ползучести (вязкоупругости), также представляется существенным учет пластических свойств материала.

Рассматривается взаимодействие двух частиц порошка, имеющих форму шара. Материал частиц при высокой температуре, близкой к температуре плавления, становится неупругим – вязкоупругим или упругопластическим. Под действием сил поверхностного натяжения частицы порошка вступают в контактное взаимодействие, в них возникают деформации и напряжения. Зная свойства материала частиц, можно методами механики деформируемого твердого тела рассчитать напряженно-деформированное состояние (НДС) системы частиц и, в частности, определить их форму после деформации. Кроме того, можно вычислить давление в области контакта. Далее уместно сделать предположение о том, что если в некоторой части области контакта давление превосходит заранее заданную предельную величину, то частицы в этой части области контакта сливаются. Дальнейшее деформирование этой системы частиц происходит в результате их остывания. Такой анализ позволит определить остаточные напряжения и деформации в частицах и, в частности, форму пор после остывания частиц, а также усадку. Наконец, можно, используя методы осреднения, определить эффективные теплофизические и механические свойства представительного объема порошка [6–10].

Предлагаемая модель позволяет в рамках механики деформируемого твердого тела моделировать процессы, происходящие при спекании частиц порошка.

При высоких температурах материалы, используемые при селективном лазерном спекании, проявляют способность к конечным вязкоупругим, упругопластическим и вязкоупругопластическим деформациям [11, 12], поэтому при моделировании спекания целесообразно учесть эффекты геометрической нелинейности.

Возникновение первоначальной поверхности контакта между частицами порошка может быть вызвано как действием силы тяжести, так и силой капиллярного происхождения [5]. Эта сила возникает вследствие того, что при соприкосновении контактирующих частиц порошка уменьшается площадь свободной поверхности этих частиц, и, следовательно, уменьшается поверхностная энергия системы. Эту силу можно рассматривать как сосредоточенную силу, приложенную в точке первоначального соприкосновения частиц и направленную по нормали к поверхностям частиц в этой точке, или как силу, распределенную по поверхности контакта. Величина этой силы определяется радиусами кривизны частиц в точке их первоначального соприкосновения и удельной поверхностной энергией вещества, из которого изготовлен порошок. При моделировании эта сила может быть задана в качестве исходного данного. Можно также вместо задания этой силы задавать первоначальное перемещение частиц порошка под ее действием. В таком случае сила может быть вычислена в результате расчетов как интеграл от контактных напряжений по площади контакта в деформированном состоянии.

Деформацию при спекании можно рассматривать как двухэтапный процесс. На первом этапе происходит слияние частиц в результате контактного взаимодействия, на втором этапе структура, возникшая в результате слияния частиц, деформируется вследствие остывания материала, которое сопровождается температурной деформацией и изменением механических свойств. Учитывая это, целесообразно использовать для моделирования процесса формирования микрострук-

туры материала при лазерном спекании теорию наложения больших деформаций [13, 14].

### 1. Основные уравнения

**Кинематические соотношения.** Аффинор деформаций определяется через градиент вектора перемещений  $\mathbf{u}$  следующим образом: [15]:

$$\Psi = \mathbf{I} + \overset{0}{\nabla} \mathbf{u}. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{I}$  – единичный тензор.

Тензорные меры деформаций Грина  $\mathbf{C}$  и Фингера  $\mathbf{b}$  определяются через аффинор деформаций:

$$\mathbf{C} = \Psi \cdot \Psi^*, \quad \mathbf{b} = \Psi^* \cdot \Psi,$$

символ “\*” обозначает транспонирование.

Соотношение для кратности изменения элементарного объема:

$$J = \det \Psi. \quad (2)$$

**Определяющие соотношения для упругопластического материала.** Для описания НДС упругопластического материала используется модель пластичности Друкера – Прагера [16, 17].

В случае конечных деформаций аффинор деформаций можно разложить на упругую и пластическую мультипликативные составляющие [19]:  $\Psi = \Psi^p \cdot \Psi^e$ .

Упругое поведение материала характеризуется определяющими соотношениями для гиперупругого материала. Эти соотношения записываются в виде, который позволяет не использовать объективные скорости напряжений. Функция накопленной энергии деформации (упругий потенциал) представляется следующим образом:

$$\mathcal{W} = U(J^e) + W(\bar{\mathbf{b}}^e) = \frac{1}{2} K \left( \frac{1}{2} (J^{e^2} - 1) - \ln J^e \right) + \frac{1}{2} \mu (\text{tr}(\bar{\mathbf{b}}^e) - 3), \quad (3)$$

где  $\bar{\mathbf{b}}^e = \bar{\Psi}^{e*} \cdot \bar{\Psi}^e$  – сохраняющая объем часть тензора меры упругих деформаций Фингера;  $\bar{\Psi}^e = J^{-\frac{1}{3}} \Psi^e$  – сохраняющая объем часть аффинора упругой деформации;  $K$ ,  $\mu$  – упругие модули объемного сжатия и сдвига;  $\text{tr}$  – первый инвариант тензора второго ранга.

Тензор напряжений Кирхгофа выражается через упругий потенциал следующим образом:

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \Psi^{e*} \cdot \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{C}^e} \cdot \Psi^e. \quad (4)$$

Для упругого потенциала, записанного в форме (3), выражение (4) имеет вид

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{K}{2} J^e \left( J^e - \frac{1}{J^e} \right) \mathbf{I} + \mu \text{dev}[\bar{\mathbf{b}}^e].$$

Здесь  $\text{dev}$  – девиатор тензора.

Функция пластического течения:

$$f_y(\boldsymbol{\tau}, \alpha) = \|\text{dev}(\boldsymbol{\tau})\| + \beta \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) - (h(\alpha) + \sqrt{2}\sigma_y), \quad (5)$$

где  $\|\text{dev}(\boldsymbol{\tau})\| = \sqrt{\text{dev}(\boldsymbol{\tau}) \cdot \text{dev}(\boldsymbol{\tau})}$ ,  $\sigma_y$  – предел текучести для чистого сдвига,  $h(\alpha)$  – функция упрочнения,  $\beta$  – параметр среды, характеризующий зависимость пластического течения от давления.

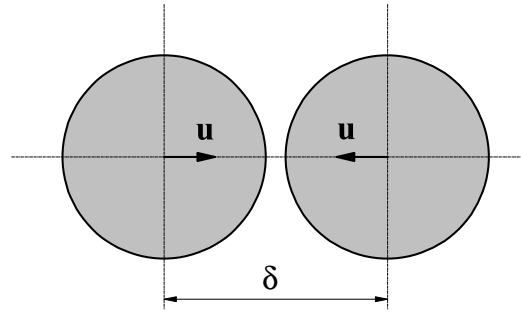


Рис. 1. Расположение шаров, моделирующих частицы порошка, в недеформированном состоянии и схема нагружения

Ассоциированный с функцией (5) закон течения [17, 18]:

$$\dot{\mathbf{C}}^{p-1} = -\frac{2}{3} \dot{\alpha} \frac{\text{tr}(\bar{\mathbf{b}}^e)}{\|\text{dev}(\boldsymbol{\tau})\|} \boldsymbol{\Psi}^{-1*} \cdot \text{dev}(\boldsymbol{\tau}) \cdot \boldsymbol{\Psi}^{-1}. \quad (6)$$

Условия Куна–Таккера:

$$f_y(\boldsymbol{\tau}, \alpha) \leq 0, \quad \dot{\alpha} \geq 0, \quad \dot{\alpha} f_y(\boldsymbol{\tau}, \alpha) = 0. \quad (7)$$

Интегрирование уравнений (6), (7) ведется по неявной обратной схеме Эйлера [20].

**Контактное взаимодействие.** Для значительных изменений жесткости материала и больших деформаций предпочтителен mortar-метод [21, 22]. Метод может быть использован с трением кулоновского типа. При достижении тангенциальным напряжением  $\sigma_t$  значения, равного  $\kappa\sigma_n$ , где  $\sigma_n$  – нормальное к контактной границе напряжение, возможно проскальзывание контактных поверхностей, иначе действуют ограничения на касательные перемещения.

Другие подходы к моделированию контактного взаимодействия нелинейно-упругих и упругопластических тел при больших деформациях предложены, например, в [23–28].

## 2. Результаты моделирования

В качестве примера решена задача о НДС, возникающем при контакте двух одинаковых шаров из упругопластического материала, моделирующих частицы порошка. Серия расчетов проведена в зависимости от параметра  $\beta$ , характеризующего «сыпучесть» среды. Параметры материала: модуль Юнга  $E = 206900$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.29$ , предел текучести  $\sigma_y = 318$  МПа.

Расположение шаров в недеформированном состоянии и схема нагружения показаны на рис. 1. Расчеты выполнены для случая  $\delta = 2.1R$ , где  $\delta$  – расстояние между центрами шаров до деформации,  $R$  – радиус каждого шара. При расчетах рассматривались половины шаров и задавались перемещения плоских поверхностей полушаров в направлении оси, проходящей через их центры. Величина этих перемещений  $u = 0.505R$ , что соответствует двукратному сжатию шаров в направлении указанной оси. Такой вид нагружения позволяет моделировать деформирование периодической системы шаров. Поверхности шаров, за исключением области контакта, считаются свободными от нагрузок. Коэффициент трения на контактной границе  $\kappa = 0.2$ .

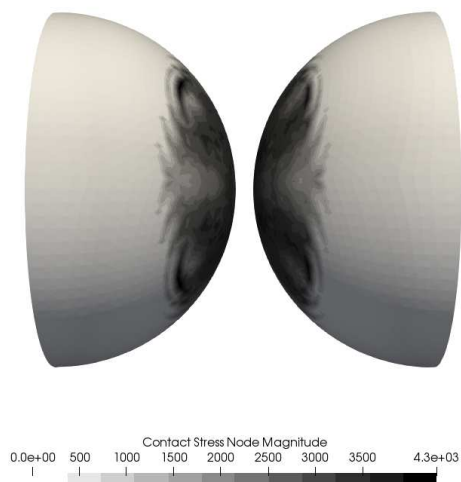


Рис. 2. Распределение контактных напряжений по поверхности частиц порошка при  $\beta = 0.4$  (для наглядности напряжения отнесены к недеформированной поверхности частиц)

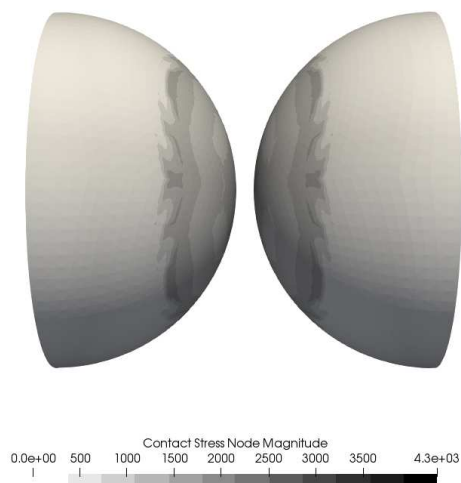


Рис. 3. Распределение контактных напряжений по поверхности частиц порошка при  $\beta = 0$  (для наглядности напряжения отнесены к недеформированной поверхности частиц)

Расчеты выполнены методом конечных элементов [20] с использованием системы инженерного прочностного анализа Фидесис [29–31]. Некоторые результаты расчетов приведены на рис. 2–5 для двух значений параметра  $\beta$  материала шаров. На рис. 2 и 4 даны результаты для случая  $\beta = 0.4$ , на рис. 3 и 5 – для  $\beta = 0$ . На рис. 2 и 3 показано распределение контактных напряжений (для наглядности напряжения отнесены к недеформированной поверхности шаров), на рис. 3 и 4 – распределение пластических деформаций по Мизесу в сечении шаров плоскостью, проходящей через их центры, после деформации (на этих двух рисунках также показана конечно-элементная сетка). Напряжения указаны в МПа.

Сопоставление рис. 2 и 3 позволяет сделать вывод о том, что напряженное состояние частиц существенно зависит от параметра  $\beta$ . В частности, контактные напряжения при  $\beta = 0.4$  существенно больше, чем при  $\beta = 0$ : максимальная величина контактного напряжения при  $\beta = 0.4$  – примерно 2.8 МПа, а при  $\beta = 0$  – 1.2 МПа. Кроме того, существенно различается распределение контактных

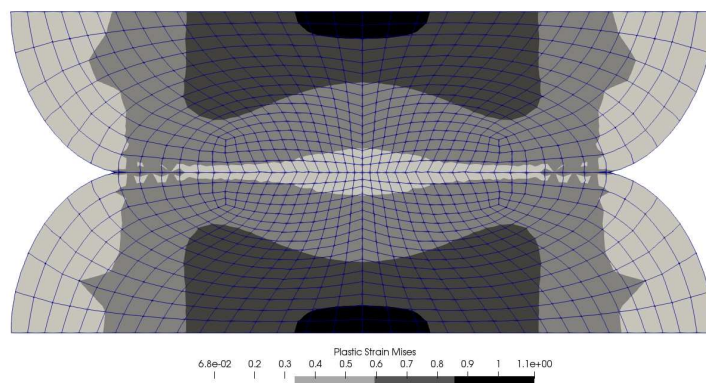


Рис. 4. Распределение пластических деформаций по Мизесу в сечении частиц порошка при  $\beta = 0.4$

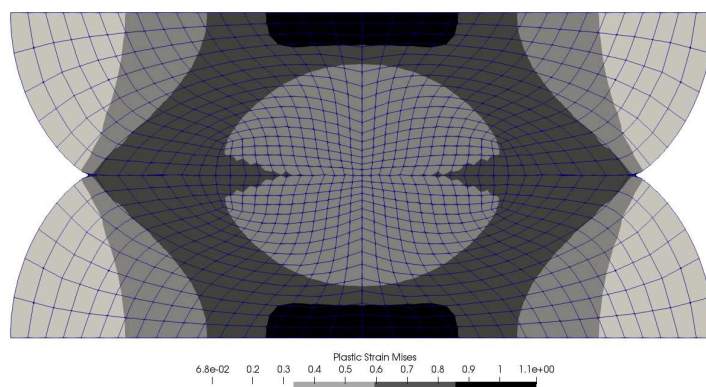


Рис. 5. Распределение пластических деформаций по Мизесу в сечении частиц порошка при  $\beta = 0$

напряжений: при  $\beta = 0.4$  максимум этих напряжений достигается вблизи центра области контакта, а при  $\beta = 0$  – на границе этой области.

Сопоставляя рис. 3 и 4, можно видеть, что при  $\beta = 0.4$  зона контакта несколько меньше, чем при  $\beta = 0$ . Различается и характер распределения пластических деформаций по Мизесу. Но в обоих случаях максимум этих деформаций достигается в центрах частиц.

Таким образом, численное моделирование позволяет определить НДС в представительном объеме, содержащем частицы порошка, в результате контактного взаимодействия, вызванного действием сил поверхностного натяжения при их нагреве, вызванном лазерным излучением. В частности, могут быть найдены вектор перемещений  $\mathbf{u}$  и тензор истинных напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ , а также поверхности, вдоль которых происходит слияние частиц порошка. Зная вектор перемещений и поверхности слияния частиц порошка, можно определить форму и топологию пор (полостей) в представительном объеме порошка в результате действия лазерного излучения.

Важной характеристикой микроструктуры материала после спекания является радиус  $\rho$  зоны контакта [5]. На рис. 6 показана зависимость этого радиуса от перемещения  $u_0 = u - (\delta/2 - R)$  центра каждого шара после касания для  $\beta = 0$  и  $\beta = 0.4$ . Можно видеть, что при малых  $u_0$  (когда  $u_0/R \leq 0.02$ ) кривые для указанных значений  $\beta$  практически совпадают, далее с увеличением  $u_0$  возникают

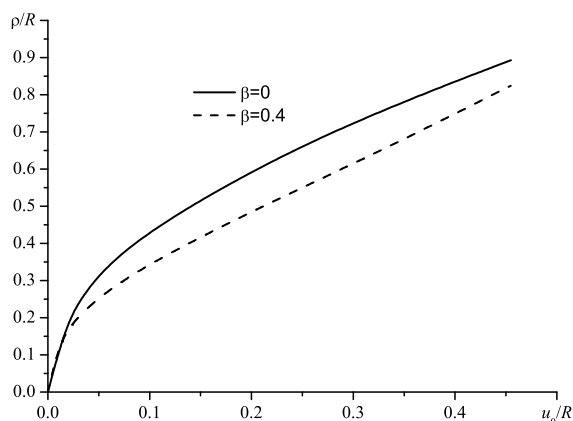


Рис. 6. Зависимость радиуса  $\rho$  зоны контакта от перемещения  $u_0$  центра каждого шара после касания

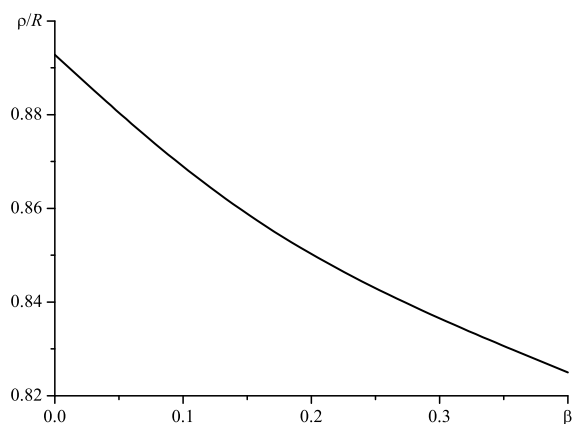


Рис. 7. Зависимость радиуса  $\rho$  зоны контакта от параметра  $\beta$  материала частиц порошка

заметные различия. Обе кривые вблизи к параболам, что согласуется с формулами, приведенными в [5], в соответствии с которыми для линейно-упругих частиц при малых деформациях  $\rho/R \sim (u_0/R)^{1/2}$ .

На рис. 7 показана зависимость радиуса зоны контакта от параметра  $\beta$  при  $u_0/R = 0.455$ . Можно видеть, что этот радиус монотонно убывает с увеличением  $\beta$ .

### Заключение

Разработана математическая модель формирования микроструктуры материала изделия аддитивного производства, которая основана на расчете НДС представительного объема порошка в результате теплового воздействия, вызванного лазерным излучением. Модель позволяет определить по заданному расположению частиц порошка в представительном объеме исходного порошкового материала границы пор, определяющие микроструктуру материала, и остаточные напряжения в материале после действия лазерного излучения.

Модель учитывает упругопластические свойства материала порошка при высоких температурах, контактное взаимодействие, нелинейные эффекты, обусловленные конечностью деформаций.



Дальнейшее развитие модели может быть связано с явным учетом сил поверхностного натяжения при расчете НДС на основе формул, приведенных, например, в [32], а также с использованием определяющих соотношений вязкоупругопластичности, которые наиболее точно описывают поведение этих материалов в том диапазоне температур, в котором происходит спекание. В частности, могут быть использованы модели [33–37]. Представляет также интерес исследование влияния трения на результаты моделирования [38]. Чем сильнее трение, тем больше препятствий к получению максимально плотной упаковки порошка и тем больше может быть пористость получаемого материала.

**Благодарности.** Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Тульский государственный педагогический университет имени Л.Н. Толстого» при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 14.577.21.0271, уникальный идентификатор проекта RFMEFI57717X0271).

### Литература

1. *Шишковский И.В.* Лазерный синтез функционально-градиентных мезоструктур и объемных изделий. – М.: Физматлит, 2009. – 424 с.
2. *Зленко М.А., Нагайцев М.В., Довбыш В.М.* Аддитивные технологии в машиностроении. Пособие для инженеров. – М.: ГНЦ РФ ФГУП «НАМИ», 2015. – 220 с.
3. *Френкель Я.И.* Вязкое течение в кристаллических телах // Журн. эксперим. и теорет. физики ЭТФ. – 1946. – Т. 16, № 1. – С. 29–35.
4. *Гегузин Я.Е.* Почему и как исчезает пустота. – М.: Наука, 1983. – 192 с.
5. *Гегузин Я.Е.* Физика спекания. – М.: Наука, 1984. – 312 с.
6. *Левин В.А., Лохин В.В., Зингерман К.М.* Об одном способе оценки эффективных характеристик пористых тел при конечных деформациях // Изв. АН. Механика твердого тела. – 1997. – № 4. – С. 45–50.
7. *Levin V.A., Lokhin V.V., Zingerman K.M.* Effective elastic properties of porous materials with randomly dispersed pores. Finite deformation // J. Appl. Mech. – 2000. – V. 67, No 4. – P. 667–670. – doi: 10.1115/1.1286287.
8. *Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Yakovlev M.* Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains // Compos. Struct. – 2015. – V. 131. – P. 25–36. – doi: 10.1016/j.compstruct.2015.04.037.
9. *Levin V., Vdovichenko I., Vershinin A., Yakovlev M., Zingerman K.* Numerical estimation of effective mechanical properties for reinforced plexiglas in the two-dimensional case // Modell. Simul. Mater. Sci. Eng. – 2016. – V. 2016. – Art. 9010576, P. 1–10. – doi: 10.1155/2016/9010576.
10. *Vdovichenko I.I., Yakovlev M.Ya., Vershinin A.V., Levin V.A.* Calculation of the effective thermal properties of the composites based on the finite element solutions of the boundary value problems // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. – 2016. – V. 158, No 1. – Art. 012094, P. 1–7. – doi: 10.1088/1757-899X/158/1/012094.
11. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 712 с.
12. *German R.M.* Sintering from empirical observations to scientific principles. – Elsevier, 2014. – 536 p.
13. *Levin V.A.* Theory of repeated superposition of large deformations: Elastic and viscoelastic bodies // Int. J. Solids Struct. – 1998. – V. 35, No 20. – P. 2585–2600. – doi: 10.1016/S0020-7683(98)80032-2.



14. *Левин В.А.* Нелинейная вычислительная механика прочности. Т. 1: Модели и методы. Образование и развитие дефектов. – М.: Физматлит, 2014. – 452 с.
15. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
16. *Drucker D.C., Prager W.* Soil mechanics and plastic analysis for limit design // Q. Appl. Math. – 1952. – V. 10, No 2. – P. 157–165.
17. *Simo J.C., Hughes T.J.R.* Computational inelasticity. – N. Y.: Springer, 1998. – 392 p.
18. *Hofstetter G., Taylor R.L.* Non-associative Drucker–Prager plasticity at finite strains // Commun. Appl. Numer. Methods. – 1990. – V. 6, No 8. – P. 583–589. – doi: 10.1002/cnm.1630060803.
19. *Lee E.H., Liu D.T.* Finite-strain elastic-plastic theory particularly for plane wave analysis // J. Appl. Phys. – 1967. – V. 38. – P. 19–27. – doi: 10.1063/1.1708953.
20. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D.* The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. – Elsevier, 2014. – 672 p. – doi: 10.1016/C2009-0-26332-X.
21. *Wriggers P.* Computational contact mechanics. N. Y.: Springer, 2006. – 519 p.
22. *Puso M.A., Laursen T.A.* A mortar segment-to-segment frictional contact method for large deformations // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 2017. – V. 193, No 45–47. – P. 4891–4913. – doi: 10.1016/j.cma.2004.06.001.
23. *Feng B., Levitas V.I.* Large elastoplastic deformation of a sample under compression and torsion in a rotational diamond anvil cell under megabar pressures // Int. J. Plast. – 2017. – V. 92. – P. 79–95. – doi: 10.1016/j.ijplas.2017.03.002.
24. *Feng B., Levitas V.I., Hemley R.J.* Large elastoplasticity under static megabar pressures: Formulation and application to compression of samples in diamond anvil cells // Int. J. Plast. – 2015. – V. 84. – P. 33–57. – doi: 10.1016/j.ijplas.2016.04.017.
25. *Idesman A.V., Levitas V.I.* Finite element procedure for solving contact thermoelastoplastic problems at large strains, normal and high pressures // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 1995. – V. 126, No 1–2. – P. 39–66. – doi: 10.1016/0045-7825(95)00757-R.
26. *Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н.* Геометрически нелинейная задача о продольно-поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 4. – С. 453–468.
27. *Paimushin V.N., Badriev I.B., Makarov M.V., Kholmogorov S.A.* Transformable calculation schemes in geometrically nonlinear problems of mechanics of sandwich plates with the contour reinforcing beams // J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – V. 1158, No 3. – Art. 032043, P. 1–7. – doi: 10.1088/1742-6596/1158/3/032043.
28. *Abdrakhmanova A.I., Sultanov L.U.* The algorithm of investigation of deformations of solids with contact interaction // J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – V. 1158, No 2. – Art. 022001, P. 1–7. – doi: 10.1088/1742-6596/1158/2/022001.
29. *Морозов Е.М., Левин В.А., Вершинин А.В.* Прочностной анализ. Фидесис в руках инженера. – М.: URSS, 2015. – 408 с.
30. *Kukushkin A.V., Konovalov D.A., Vershinin A.V., Levin V.A.* Numerical simulation in CAE Fidesys of bonded contact problems on non-conformal meshes // J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – V. 1158, No 3. – Art. 032022, P. 1–8. – doi: 10.1088/1742-6596/1158/3/032022.
31. *Karpenko V.S., Vershinin A.V., Levin V.A., Zingerman K.M.* Some results of mesh convergence estimation for the spectral element method of different orders in FIDESYS industrial package // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. – 2016. – V. 158, No 1. – Art. 012049, P. 1–6. – doi: 10.1088/1757-899X/158/1/012049.

32. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6: Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
33. *Brown S.B., Kim K.H., Anand L.* An internal variable constitutive model for hot working of metal // *Int. J. Plast.* – 1989. – V. 5, No 2. – P. 95–130. – doi: 10.1016/0749-6419(89)90025-9.
34. *Chen G., Zhang Z.-S., Mei Yu.-H., Li X., Yu D.-J., Wang L., Chen X.* Applying viscoplastic constitutive models to predict ratcheting behavior of sintered nanosilver lap-shear joint // *Mech. Mater.* – 2014. – V. 72. – P. 61–71. – doi: 10.1016/j.mechmat.2014.02.001.
35. *Буренин А.А., Ковтанык Л.В., Панченко Г.Л.* Деформирование и разогрев упруго-вязкопластического цилиндрического слоя при его движении за счет изменяющегося перепада давления // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* – 2018. – № 1. – С. 6–18.
36. *Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтанык Л.В.* Об одной простой модели упругопластической среды при конечных деформациях // *Докл. РАН.* – 1996. – Т. 347. № 2. – С. 199–201.
37. *Бажин А.А., Буренин А.А., Мурашкин Е.В.* К моделированию процесса накопления больших необратимых деформаций в условиях пластического течения и ползучести // *Прикл. матем. и механика.* – 2016. – Т. 80, № 2. – С. 254–264.
38. *Choi J.-P., Shin G.-H., Lee H.-S., Yang D.-Y., Yang S., Lee C.-W., Brochu M., Yu J.-H.* Evaluation of powder layer density for the selective laser melting (SLM) process // *Mater. Trans.* – 2017. – V. 58, No 2. – P. 294–297. – doi: 10.2320/matertrans.M2016364.

Поступила в редакцию  
17.04.19

---

**Левин Владимир Анатольевич**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной механики

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия  
E-mail: [v.a.levin@mail.ru](mailto:v.a.levin@mail.ru)

**Зингерман Константин Моисеевич**, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического моделирования и вычислительной математики

Тверской государственный университет  
ул. Желябова, д. 33, г. Тверь, 170100, Россия  
E-mail: [zingerman@rambler.ru](mailto:zingerman@rambler.ru)

**Крапивин Кирилл Юрьевич**, научный сотрудник

ООО «Фидесис»  
Большой бульвар, 42, стр. 1, офис 2.212, г. Москва, 121205, Россия  
E-mail: [krapivin@saldlab.com](mailto:krapivin@saldlab.com)

**Рябова Ольга Алексеевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования и вычислительной математики

Тверской государственный университет  
ул. Желябова, д. 33, г. Тверь, 170100, Россия  
E-mail: [ryabova.oa@tversu.ru](mailto:ryabova.oa@tversu.ru)

**Кукушкин Алексей Викторович**, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории математического моделирования технических систем

Тульский государственный педагогический университет имени Л.Н. Толстого  
пр-т Ленина, д. 125, г. Тула, 300026, Россия  
E-mail: [kukushkinav@mail.ru](mailto:kukushkinav@mail.ru)

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.  
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI  
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2019, vol. 161, no. 2, pp. 191–204

doi: 10.26907/2541-7746.2019.2.191-204

### A Model of Material Microstructure Formation on Selective Laser Sintering with Allowance for Large Elastoplastic Strains

*V.A. Levin<sup>a\*</sup>, K.M. Zingerman<sup>b\*\*</sup>, K.Yu. Krapivin<sup>c\*\*\*</sup>,  
O.A. Ryabova<sup>b\*\*\*\*</sup>, A.V. Kukushkin<sup>d\*\*\*\*\*</sup>*

<sup>a</sup>*Moscow State University,  
Moscow, 119991, Russia*

<sup>b</sup>*Tver State University, Tver, 170100, Russia*

<sup>c</sup>*Fidesys LLC, Moscow, 121205, Russia*

<sup>d</sup>*Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula, 300026, Russia*

E-mail: *\*v.a.levin@mail.ru, \*\*zingerman@rambler.ru,*

*\*\*\*krapivin@saldlab.com, \*\*\*\*ryabova.oo@tversu.ru, \*\*\*\*\*kukushkinav@mail.ru*

Received April 17, 2019

#### Abstract

A mathematical model of material microstructure formation in the process of selective laser sintering was proposed. The model is based on the stress and strain analysis in a representative volume of a powder that contains some particles. The strains and stresses are caused by contact interaction of particles due to surface tension. It was assumed that the particles are made of elastoplastic material. The material properties were described by the associative Drucker–Prager model with hardening. The nonlinear effects caused by large strains were taken into account. The model permits one to determine the shape of particles in the deformed state and the shape of pores. The numerical results were presented for the problem of contact interaction between two particles that assume the spherical shape before deformation. The displacements of centers of powder particles were specified as input. The finite-element method was used for computations. The flow rule was integrated using the implicit Euler backward method. The mortar method was used to solve the problem with account of contact interaction. The distribution of contact stresses over the surfaces of powder particles and the distribution of the von Mises plastic strains in the section of these particles were shown as a result of the analysis. The dependence of contact zone radius on the contact displacements of the particles' centers was investigated. It was analyzed how the radius of contact zone depends on the material parameter characterizing the pressure dependence of plastic flow.

**Keywords:** selective laser sintering, microstructure formation, large strains, plasticity, finite-element method

**Acknowledgments.** The study was performed at Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University and supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. 14.577.21.0271, project ID RFMEFI57717X0271).

### Figure Captions

Fig. 1. The arrangement of balls that model the particles of powder in the undeformed state and the scheme of loading.

Fig. 2. The distribution of contact stresses over the surface of powder particles at  $\beta = 0.4$  (for visualization stresses are referred to the undeformed shape of particles).

Fig. 3. The distribution of contact stresses over the surface of powder particles at  $\beta = 0$  (for visualization stresses are referred to the undeformed shape of particles).

Fig. 4. The distribution of Mises plastic strains over the section of powder particles at  $\beta = 0.4$ .

Fig. 5. The distribution of Mises plastic strains over the section of powder particles at  $\beta = 0$ .

Fig. 6. The dependence of the radius  $\rho$  of contact zone on the displacement  $u_0$  of the center of each ball after contact.

Fig. 7. The dependence of the radius  $\rho$  of contact zone on the parameter  $\beta$  of the material of powder particles.

### References

1. Shishkovskii I.V. *Lazernyi sintez funktsional'no gradientnykh mezostruktur i ob'emnykh izdelii* [Laser Synthesis of Functionally Graded Mesostructures and Volumetric Articles]. Moscow, Fizmatlit, 2009. 424 p.
2. Zlenko M.A., Nagaitsev M.V., Dovbysh V.M. *Additivnye tekhnologii v mashinostroenii. Posobie dlya inzhenerov* [Additive Technologies in Mechanical Engineering. Manual for Engineers]. Moscow, GNTs RF FGUP "NAMI", 2015. 220 p.
3. Frenkel Ya.I. Viscous flow in crystal bodies. *Zh. Eksp. Teor. Fiz. ETF*, 1946, vol. 16, no. 1, pp. 29–35. (In Russian)
4. Geguzin Ya.E. *Pochemu i kak ischezhaet pustota* [Why and How the Void Vanishes]. Moscow, Nauka, 1983. 192 p. (In Russian)
5. Geguzin Ya.E. *Fizika spekaniya* [The Physics of Sintering]. Moscow, Nauka, 1984. 312 p. (In Russian)
6. Levin V.A., Lokhin V.V., Zingerman K.M. A method for estimating the effective characteristics of porous bodies subjected to finite deformations. *Izv. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 1997, vol. 32, no. 4, pp. 39–43. (In Russian)
7. Levin V.A., Lokhin V.V., Zingerman K.M. Effective elastic properties of porous materials with randomly dispersed pores. Finite deformation. *J. Appl. Mech.*, 2000, vol. 67, no. 4, pp. 667–670. doi: 10.1115/1.1286287.
8. Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Yakovlev M. Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains. *Compos. Struct.*, 2015, vol. 131, pp. 25–36. doi: 10.1016/j.compstruct.2015.04.037.
9. Levin V., Vdovichenko I., Vershinin A., Yakovlev M., Zingerman K. Numerical estimation of effective mechanical properties for reinforced plexiglas in the two-dimensional case. *Modell. Simul. Mater. Sci. Eng.*, 2016, vol. 2016, art. 9010576, pp. 1–10. doi: 10.1155/2016/9010576.
10. Vdovichenko I.I., Yakovlev M.Ya., Vershinin A.V., Levin V.A. Calculation of the effective thermal properties of the composites based on the finite element solutions of the boundary value problems. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2016, vol. 158, no. 1, art. 012094, pp. 1–7. doi: 10.1088/1757-899X/158/1/012094.

11. Rabotnov Yu.N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of a Deformable Solid]. Moscow, Nauka, 1988. 712 p. (In Russian)
12. German R.M. *Sintering from Empirical Observations to Scientific Principles*. Elsevier, 2014. 536 p.
13. Levin V.A. Theory of repeated superposition of large deformations: Elastic and viscoelastic bodies. *Int. J. Solids Struct.*, 1998, vol. 35, no. 20, pp. 2585–2600. doi: 10.1016/S0020-7683(98)80032-2.
14. Levin V.A. *Nelineinaya vychislitel'naya mekhanika prochnosti* [Nonlinear Computational Strength Mechanics]. Vol. 1. Models and methods. Origination and growth of defects. Moscow, Fizmatlit, 2014. 452 p. (In Russian)
15. Lurie A.I. *Nelineinaya teoriya uprugosti* [Nonlinear Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka, 1980. 512 p. (In Russian)
16. Drucker D.C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis for limit design. *Q. Appl. Math.*, 1952, vol. 10, no. 2, pp. 157–165.
17. Simo J.C., Hughes T.J.R. *Computational Inelasticity*. New York, Springer, 1998. 392 p.
18. Hofstetter G., Taylor R.L. Non-associative Drucker–Prager plasticity at finite strains. *Commun. Appl. Numer. Methods*, 1990, vol. 6, no. 8, pp. 583–589. doi: 10.1002/cnm.1630060803.
19. Lee E.H., Liu D.T. Finite-strain elastic-plastic theory particularly for plane wave analysis. *J. Appl. Phys.*, 1967, vol. 38, pp. 19–27. doi: 10.1063/1.1708953.
20. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Elsevier, 2014. 672 p. doi: 10.1016/C2009-0-26332-X.
21. Wriggers P. *Computational Contact Mechanics*. New York, Springer, 2006. 519 p.
22. Puso M.A., Laursen T.A. A mortar segment-to-segment frictional contact method for large deformations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2017, vol. 193, nos. 45–47, pp. 4891–4913. doi: 10.1016/j.cma.2004.06.001.
23. Feng B., Levitas V.I. Large elastoplastic deformation of a sample under compression and torsion in a rotational diamond anvil cell under megabar pressures. *Int. J. Plast.*, 2017, vol. 92, pp. 79–95. doi: 10.1016/j.ijplas.2017.03.002.
24. Feng B., Levitas V.I., Hemley R.J. Large elastoplasticity under static megabar pressures: Formulation and application to compression of samples in diamond anvil cells. *Int. J. Plast.*, 2015, vol. 84, pp. 33–57. doi: 10.1016/j.ijplas.2016.04.017.
25. Idesman A.V., Levitas V.I. Finite element procedure for solving contact thermoelastoplastic problems at large strains, normal and high pressures. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 1995, vol. 126, nos. 1–2, pp. 39–66. doi: 10.1016/0045-7825(95)00757-R.
26. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Geometrically nonlinear problem of longitudinal and transverse bending of a sandwich plate with transversally soft core. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta, Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 4, pp. 453–468. (In Russian)
27. Paimushin V.N., Badriev I.B., Makarov M.V., Kholmogorov S.A. Transformable calculation schemes in geometrically nonlinear problems of mechanics of sandwich plates with the contour reinforcing beams. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1158, no. 3, art. 032043, pp. 1–7. doi: 10.1088/1742-6596/1158/3/032043.
28. Abdrakhmanova A.I., Sultanov L.U. The algorithm of investigation of deformations of solids with contact interaction. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1158, no. 2, art. 022001, pp. 1–7. doi: 10.1088/1742-6596/1158/2/022001.

29. Morozov E.M., Levin V.A., Vershinin A.V. *Prochnostnyi analiz. Fidesis v rukakh inzhenera* [Strength Analysis. Fidesys in the Hands of an Engineer]. Moscow, URSS, 2015. 408 p. (In Russian)
30. Kukushkin A.V., Kononov D.A., Vershinin A.V., Levin V.A. Numerical simulation in CAE Fidesys of bonded contact problems on non-conformal meshes. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1158, no. 3, art. 032022, pp. 1–8. doi: 10.1088/1742-6596/1158/3/032022.
31. Karpenko V.S., Vershinin A.V., Levin V.A., Zingerman K.M. Some results of mesh convergence estimation for the spectral element method of different orders in FIDESYS industrial package. *IOP Conf. Ser.: Materi. Sci. Eng.*, 2016, vol. 158, no. 1, art. 012049, pp. 1–6. doi: 10.1088/1757-899X/158/1/012049.
32. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Theoretical Physics*. Vol. 6.: Hydrodynamics. Moscow, Nauka, 1986. 736 p. (In Russian)
33. Brown S.B., Kim K.H., Anand L. An internal variable constitutive model for hot working of metal. *Int. J. Plast.*, 1989, vol. 5, no. 2, pp. 95–130. doi: 10.1016/0749-6419(89)90025-9.
34. Chen G., Zhang Z.-S., Mei Yu.-H., Li X., Yu D.-J., Wang L., Chen X. Applying viscoplastic constitutive models to predict ratcheting behavior of sintered nanosilver lap-shear joint. *Mech. Mater.*, 2014, vol. 72, pp. 61–71. doi: 10.1016/j.mechmat.2014.02.001.
35. Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L. Deformation and heating of an elastoviscoplastic cylindrical Layer moving owing to a varying pressure drop. *Mech. Solids*, 2018, vol. 53, no. 1, pp. 1–11. doi: 10.3103/S0025654418010016.
36. Burenin A.A., Bykovtsev G.I., Kovtanyuk L.V. A simple model of finite strain in an elastoplastic medium. *Dokl. Phys.*, 1996, vol. 41, no. 3, pp. 127–129.
37. Bazhin A.A., Burenin A.A., Murashkin E.V. Simulation of the process of the accumulation of large irreversible deformations under plastic flow and creep conditions. *J. Appl. Math. Mech.*, 2016, vol. 80, no. 2, pp. 182–189. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2016.06.012.
38. Choi J.-P., Shin G.-H., Lee H.-S., Yang D.-Y., Yang S., Lee C.-W., Brochu M., Yu J.-H. Evaluation of powder layer density for the selective laser melting (SLM) process. *Mater. Trans.*, 2017, vol. 58, no. 2, pp. 294–297. doi: 10.2320/matertrans.M2016364.

---

**Для цитирования:** Левин В.А., Зингерман К.М., Крапивин К.Ю., Рябова О.А., Кукушкин А.В. Модель формирования микроструктуры материала при селективном лазерном спекании с учетом больших упругопластических деформаций // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2019. – Т. 161, кн. 2. – С. 191–204. – doi: 10.26907/2541-7746.2019.2.191-204.

**For citation:** Levin V.A., Zingerman K.M., Krapivin K.Yu., Ryabova O.A., Kukushkin A.V. A model of material microstructure formation on selective laser sintering with allowance for large elastoplastic strains. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 161, no. 2, pp. 191–204. doi: 10.26907/2541-7746.2019.2.191-204. (In Russian)