6-я Межрегиональная олимпиада для учителей по математике Казань, 8.11.2020

Уважаемые участники!

Свои вопросы Вы можете задать по электронному адресу kazan-mat@mail.ru.

Общие комментарии по задачам и правила отправки работы смотрите на сайте http://www.kazan-math.info. Рекомендуем Вам периодически обновлять страницу, чтобы видеть самые последние общие комментарии.

Желаем успеха!

В следующем блоке задач оценивается полное решение, с обоснованием. Максимальный балл за каждую из задач равен 7.

1. Айгуль ведет дневник, нумеруя его страницы сплошь, начиная с первой. Оказалось, что для нумерации страниц понадобилось 6973 цифры. Сколько страниц исписала усидчивая Айгуль?

2. Друг сказал математику: «У меня, жены и троих наших детей дни рождения в один день. Когда родился наш первенец, суммарный возраст членов семьи был равен 45 годам, а ровно два года назад, когда родился третий ребенок — 69 годам». Сумеет ли математик по этим данным узнать нынешний возраст всех детей? (Считаем, что новорожденному ребенку 0 лет.)

3. Числа a, b и c из промежутка $[-1; 2]$, их сумма равна нулю. Найдите наибольшее возможное значение суммы $s = a^2 + b^2 + c^2$.

4. Пару различных натуральных чисел a и b назовём *хорошей*, если $ab + 10$ является квадратом целого числа.

а) Найдите какие-нибудь три числа такие, что любые два числа в этой тройке образуют хорошую пару.

б) Можно ли найти 4 числа такие, что любые два из них образуют хорошую пару?

5. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$ с непараллельными сторонами AB и CD. Точка M — середина стороны CD. Пусть P — точка внутри $ABCD$, для которой $PA = PB = CM$. Докажите, что прямые AB, CD и серединный перпендикуляр к MP пересекаются в одной точке.

Для каждой из следующих задач приведено «решение». В этом «решении» необходимо найти ошибки, если таковые имеются, и написать верное решение. Максимальный балл за каждую из задач этого блока также равен 7.

6. Дед плёлся по дороге со скоростью 30 метров в минуту. Внук, оказавшись в 150 метрах позади, решил его догнать. Однако внук за каждые 3 минуты успевает пробежать сначала на 200 метров вперед, а потом вернуться на 100 метров назад. Через сколько минут внук догонит деда? Считаем, что скорости деда и внука постоянны.

«Решение». За три минуты внук приближается к деду на расстояние 100 метров, а дед удаляется от него на расстояние 90 метров, так что скорость их сближения 10 метров за 3 минуты. Значит, внук догонит деда за $150 / 10 \cdot 3 = 45$ минут.

7. В треугольнике ABC проведены две высоты AA' и CC'. Найдите величину угла B, если известно, что $AC : A'C' = 2$.

«Решение». Построим на стороне AC как на диаметре окружность, которая пройдет через точки A' и C', так как $\angle AA'C = \angle AC'C = 90°$. Из условия $AC = 2 \cdot A'C'$ следует, что отрезок $A'C'$ равен радиусу построенной окружности. Значит, дуга, стягиваемая хордой $A'C'$, составляет $60°$, поэтому вписанный угол $C'CA'$, опирающийся на эту дугу, равен $30°$.

Отсюда находим $\angle B = 90° - \angle C'CB = 60°$.

«Ответ:» $\angle B = 60°$.

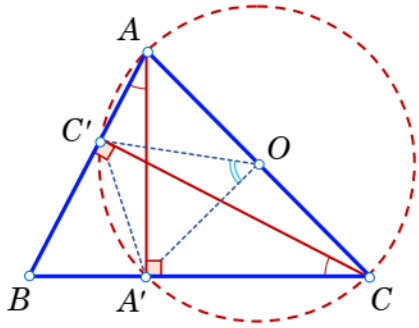

Рис. 1

8. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} x^2 + \ \ y^2 = 4, \\ x^2 + 2y^2 = 2y + a. \end{cases}$$

«Решение». Вычитая первое уравнение из второго, исключим неизвестную x: $y^2 = 2y + a - 4$, то есть $y^2 - 2y - (a - 4) = 0$. Так как система имеет единственное решение, то это уравнение также должно иметь единственное решение, то есть $D = 4 + 4(a - 4) = 0$. Последнее равенство выполняется только при $a = 3$.

«Ответ:» $a = 3$.

9. В вершинах пятиугольника проставили натуральные числа, а на каждом ребре — сумму чисел, стоящих на его концах. На одном ребре оказалось число 2, на другом — 4, на остальных — 6, 8 и 10. Найдите числа, проставленные в вершинах.

«Решение». Самые маленькие числа равны 1 и стоят в соседних вершинах (с номерами 1 и 2). Какое число стоит в вершине 3? Сумма чисел в вершинах 2 и 3 равна 4, так что это $4 - 1 = 3$. Аналогично в вершине 4 стоит число $6 - 3 = 3$, в вершине 5 — число $8 - 3 = 5$. Но тогда сумма чисел на последнем ребре, соединяющем вершины с номерами 5 и 1, равна 6, а не 10.

«Ответ:» задача не имеет решения.

10. Решите уравнение (a, b, c — попарно различные числа):

$$a^2 \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} = x^2.$$

«Решение». Данное уравнение имеет два очевидных корня $x = a$ и $x = b$. Так как исходное уравнение относительно x является квадратным, то других корней, кроме a и b, оно иметь не может.

«Ответ:» $x = a$, $x = b$.

1. *Ответ:* 2020 *страниц.*

Первый способ. Для нумерации страниц от 1 до 9 нужно 9 цифр, от 10 до 99 — $90 \cdot 2 = 180$ цифр, от 100 до 999 — $900 \cdot 3 = 2700$ цифр. Значит, страницы с не более чем трёхзначными номерами требуют 2889 цифр, а на «четырёхзначные» страницы остается $6973 - 2889 = 4084$ цифры. Значит, Айгуль выписала 1021 «четырехзначную» страницу, что вместе с 999 предыдущими составляет $999 + 1021 = 2020$ страниц.

Второй способ. Превратим каждый номер страницы в четырёхзначный, дополнив его в начале нулями. Таким образом, мы добавим $999+99+9 = 1107$ цифр, всего их станет $1107 + 6973 = 8080$. Так как все эти числа четырёхзначные, то они использовались для нумерации $8080 : 4 = 2020$ страниц.

2. *Ответ: сумеет.*

Пусть с рождения первого ребенка до рождения третьего прошло n лет. За это время суммарный возраст семьи увеличился на $3n + m$, где m — возраст второго ребенка на момент рождения третьего. По условию $3n + m = 24$, при этом $0 < m < n$, так что $3n < 24 < 4n$, откуда $6 < n < 8$. Поскольку n — целое, получаем $n = 7$, и тогда $m = 3$.

Таким образом, на текущий момент возрасты детей равны 9 лет, 5 лет и 2 года.

3. *Ответ:* 6.

Первый способ. Для чисел $t \in [-1; 2]$ справедливы соотношения $t+1 \geqslant 0$ и $t-2 \leqslant 0$, поэтому для них выполняется неравенство $(t+1)(t-2) \leqslant 0$, то есть $t^2 - t \leqslant 2$. Складывая такие неравенства для переменных a, b и c, получим

$$a^2 + b^2 + c^2 - (a + b + c) \leqslant 6.$$

Так как $a+b+c = 0$, искомая сумма $a^2+b^2+c^2$ не превосходит 6. Это значение достигается, например, для чисел $a = b = 1$, $c = -2$.

Второй способ. Введём новые переменные $x = a + 1$, $y = b + 1$, $z = c + 1$, которые теперь принимают значения из промежутка $[0; 3]$, причём по условию задачи $x + y + z = a + b + c + 3 = 3$. Искомая сумма квадратов $s = a^2 + b^2 + c^2$ выражается через новые переменные:

$$s = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y + z) + 3 = x^2 + y^2 + z^2 - 3.$$

Поскольку $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant (x + y + z)^2$ для неотрицательных чисел x, y и z, получаем $s \leqslant (x + y + z)^2 - 3$, то есть $s \leqslant 6$. Знак равенства получается, например, при $x = y = 0$, $z = 3$, то есть при $a = b = -1$, $c = 2$.

4. *а*) Например, числа 1, 6 и 15 образуют хорошую тройку. Другой пример хорошей тройки — набор 3, 5, 18.

б) *Ответ: таких чисел нет.*

Предположим, такие целые числа существуют. Исследуем остатки по модулю 4. Каждый квадрат целого числа даёт остаток 0 или 1. Поскольку $10 \equiv 2 \pmod 4$, произведение любых двух предполагаемых чисел должно быть $2 \pmod 4$ или $3 \pmod 4$.

Из этого следует, что в искомой четвёрке не должно быть двух чётных чисел, так как их произведение равно $0 \pmod 4$. Значит, в ней есть по крайней мере три нечётных числа. Нечётные числа имеют только остатки 1 и 3 по модулю 4. Поэтому среди этих нечётных чисел найдутся два числа с равными остатками по модулю 4, их произведение равно $1 \pmod 4$. Противоречие.

5. (Рис. 2.) Пусть ω — описанная окружность четырёхугольника $ABCD$ и пусть S — точка пересечения AB и CD. Пусть ω_1 и ω_2 — окружности с центрами P и M и равными радиусами $PB = MC = r$. Для точки S её степень относительно окружностей ω и ω_1 равна $SA{\cdot}SB$, а относительно окружностей ω и ω_2 равна $SD{\cdot}SC$. Последняя степень также равна $(SM{+}r)(SM{-}r) = SM^2{-}r^2$. Аналогично первая степень равна $(SP{-}r)(SP{+}r) = SP^2{-}r^2$. Поскольку эти степени совпадают $SA \cdot SB = SD \cdot SC$, получаем $SM^2 = SP^2$, то есть $SM = SP$. Значит, точка S лежит на серединном перпендикуляре к PM, что и требовалось доказать.

6. *Ответ: через* 5 *минут.*

В решении использованы формулы для равномерного движения, но внук бежит не равномерно (скорость постоянна по величине, но не по знаку!). Ясно, что скорость внука составляет 100 метров в минуту, так что две минуты он бежит вперёд и одну — назад. При этом дед за это время успевает сдвинуться вперёд на 60 и 30 метров соответственно. Будем отсчитывать положение ходоков от начального положения внука. В моменты поворота они будут равны, соответственно, (0; 150), (200; 210), (100; 240), (300; 300). Итак, внук догонит деда через $2{+}1{+}2 = 5$ минут.

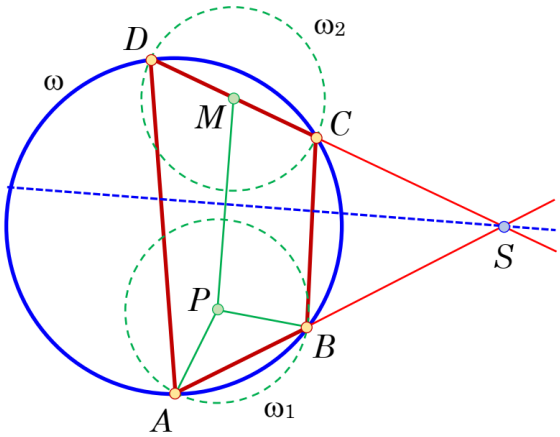

Рис. 2

7. В приведенном «решении» не учтено, что угол B может быть больше $90°$. Поэтому эти рассуждения необходимо дополнить следующими.

Если угол B — острый, то $\angle B = 90° - \angle C'CB = 60°$ (рис. 3); если же угол B — тупой, то $\angle CBC' = 90° - \angle BCC' = 60°$ (рис. 4), и значит, $\angle B = 180° - \angle CBC' = 120°$.

Ответ: $60°$ *или* $120°$.

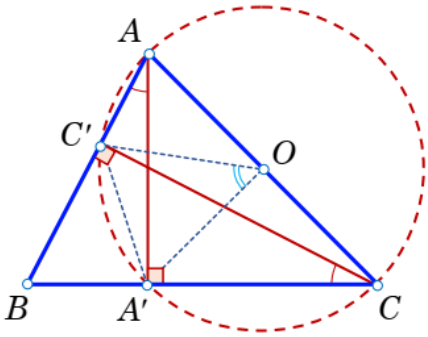

Рис. 3

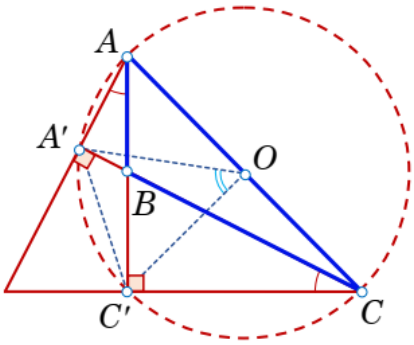

Рис. 4

8. В приведенном «решении» не учтено, что рассматриваемое квадратное уравнение может иметь и два корня y_1 и y_2, но условие задачи может выполняться, если уравнениям системы удовлетворяет только один из этих корней.

Приведем одно из возможных верных решений.

Заметим, что если $(x_0; y_0)$ является решением системы, то решением является и

$(-x_0;\, y_0)$. Значит, необходимым условием единственности решения системы является $x_0 = 0$. Тогда из первого уравнения $0 = 4 - y^2$ следует, что $y = \pm 2$, а из уравнения $0 + 2y^2 = 2y + a$ находим, что $y = 2$, $a = 4$ или $y = -2$, $a = 12$.

Проверим достаточность полученных условий. При $a = 4$ у системы, кроме решения $(0;\, 2)$, имеется ещё два решения $(2;\, 0)$ и $(-2;\, 0)$.

Подставив $a = 12$ в уравнение $x^2 + 2y^2 = 2y + a$, и вычитая из него первое уравнение, получим квадратное уравнение $y^2 = 2y + 8$. Его корни: $y_1 = -2$, $y_2 = 4$. Тогда $x^2 = 0$ или $x^2 = -12$, то есть $x = 0$. Значит, других решений нет.

Ответ: $a = 12$.

9. В условии не сказано, что суммы написаны на рёбрах именно в этом порядке. Существует еще много способов расположения чисел 2, 4, 6, 8, 10 по кругу. Разбирать все их долго, так что порассуждаем.

Ясно, что $2 = 1 + 1$, поэтому, как и сказано в решении, в соответствующих соседних вершинах a и b стоят 1. Где может быть расположено ребро, помеченное числом 10? Если оно примыкает к ребру (a, b), то на его втором конце стоит 9. Но это число не может быть слагаемым, так как сумма с ним не должна быть больше 8.

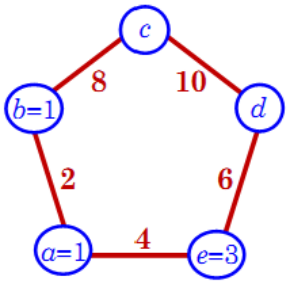

Рис. 5

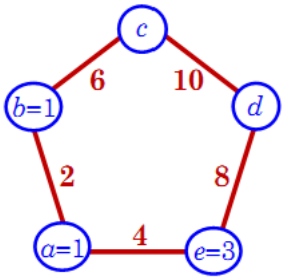

Рис. 6

Итак, число 10 проставлено на ребре, не смежном с (a, b). Пусть, например, это ребро (c, d). Сумма всех чисел на рёбрах равна $2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$. В эту сумму каждое искомое число, стоящее в вершине пятиугольника, входит два раза, так что сумма всех «вершинных» чисел равна 15. Но эта сумма складывается из чисел 2 (ребро (a, b)), 10 (ребро (c, d)) и числа в вершине e. Значит, в последней вершине стоит 3, то есть на ребре (e, a) — число 4. Теперь на оставшихся двух рёбрах надо поставить числа 6 и 8 в любом порядке. Отсюда получаем два возможных ответа (рис. 5 и 6).

Ответ: $(1, 1, 3, 3, 7)$ *или* $(1, 1, 3, 5, 5)$.

`Замечание`. Возможна и другая запись решений: в обратном порядке и/или со сдвигом по кругу.

10. Приведённый ответ будет верным при дополнительном условии $c \neq 0$.

При $c = 0$ уравнение имеет ещё и третий корень $x = c$, а это означает, что исходное уравнение является *тождеством*, то есть его корнем будет *любое* x. Действительно, разность между левой и правой частью уравнения — многочлен степени не выше двух. Поскольку уравнение имеет три различных корня $x = a$, $x = b$ и $x = c = 0$, этот многочлен нулевой, то есть все его коэффициенты равны нулю. Значит, при $c = 0$ корнем уравнения будет любое число x.