

УДК 517.957

О СВОЙСТВАХ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА

О.А. Задворнов, Г.О. Задворнова

Аннотация

Исследованы свойства решения нелинейной задачи фильтрации в неоднородной пористой среде при наличии точечного источника для жидкости, следующей закону с линейным ростом на бесконечности. При формулировке обобщенной постановки задачи использовано аддитивное выделение особенности, связанной с сингулярностью правой части. Поле давления представлено в виде суммы известного решения некоторой линейной (ассоциированной с исходной) задачи с точечным источником в правой части и неизвестного «добавка». Установлена непрерывность по Гельдеру второго слагаемого.

Ключевые слова: нелинейная фильтрация, неоднородная среда, точечный источник, непрерывность по Гельдеру.

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию свойств решения обобщенной задачи, возникающей при математическом моделировании установившегося процесса фильтрации несжимаемой жидкости в произвольной неоднородной ограниченной области при наличии точечного источника. Предполагается, что функция, определяющая закон фильтрации, имеет линейный рост на бесконечности. Неоднородность среды моделируется зависимостью функции от точек области фильтрации.

Из [1] следует, что решение рассматриваемой нелинейной задачи может быть представлено в виде суммы известного решения некоторой линейной (ассоциированной с исходной) задачи с точечным источником в правой части и неизвестного «добавка». Свойства первого слагаемого как решения эллиптического уравнения с дельта-функцией в правой части в значительной степени известны. В настоящей работе изучаются свойства гладкости второго слагаемого, являющегося решением нелинейной задачи с монотонным оператором. Мы устанавливаем, используя результаты о гладкости решения эллиптической краевой задачи, непрерывность по Гельдеру «добавка». Дополнительная гладкость этого слагаемого может быть использована в обосновании приближенных методов решения исходной задачи, в частности при исследовании сходимости ее конечномерной аппроксимации.

1. Постановка нелинейной задачи фильтрации при наличии точечного источника

Рассматривается краевая задача описывающая установившийся процесс фильтрации несжимаемой жидкости в пористой среде. Фильтрация происходит в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с липшиц-непрерывной границей $\partial\Omega$, на которой давление считается известным, при наличии точечного источника интенсивности q в начале

координат (считаем, не ограничивая общности, что начало координат – внутренняя точка Ω):

$$-\operatorname{div} \left(\frac{g(x, |\nabla w(x)|)}{|\nabla w(x)|} \nabla w(x) \right) = q\delta(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$w(x) = w_\gamma(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (2)$$

Относительно функции $g : \Omega \times \mathbb{R}_+^1 \rightarrow \mathbb{R}_+^1 \equiv \{t \in \mathbb{R}^1 : t \geq 0\}$, задающей связь между давлением и скоростью фильтрации, предполагаем, что выполнены условия Каратеодори [3, с. 196]:

- (I) для почти всех $x \in \Omega$ функция $t \rightarrow g(x, t)$ непрерывна при $t \in \mathbb{R}_+^1$;
- (II) для каждого $t \in \mathbb{R}_+^1$ функция $x \rightarrow g(x, t)$ измерима на Ω ;
- (III) функция g имеет линейный рост на бесконечности: существуют постоянная $k_0 > 0$ и функция $b_0 \in L_p(\Omega)$, $p \geq 2$, такие, что

$$|g(x, t) - k_0 t| \leq b_0(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^1, \quad \forall x \in \Omega. \quad (3)$$

Кроме того, считаем, что g не убывает:

$$g(x, t) \geq g(x, s) \quad \forall t > s \geq 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad (4)$$

и липшиц-непрерывна: существует постоянная $L > 0$ такая, что

$$|g(x, t) - g(x, s)| \leq L |s - t| \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^1, \quad \forall x \in \Omega. \quad (5)$$

Предполагаем также, что существует функция $\tilde{w}(x) \in W_2^{(1)}(\Omega)$ со следом на $\partial\Omega$, удовлетворяющим равенству

$$\tilde{w}(x) = w_\gamma, \quad x \in \partial\Omega. \quad (6)$$

Запишем вариационную формулировку задачи (1), (2):

$$\begin{cases} \text{найти } w \in W_1^1(\Omega) : \int_{\Omega} \left(\frac{g(x, |\nabla w|)}{|\nabla w|} \nabla w, \nabla \eta \right) dx = q\eta(0) \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega), \\ w(x) = w_\gamma, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (7)$$

Из работы [1] следует, что если $b_0 \in L_2(\Omega)$ (b_0 – функция из условия (3)), то решение задачи (7) существует и может быть представлено в виде суммы $w = \xi + u$. Здесь функция ξ является решением линейной краевой задачи (k_0 – постоянная из неравенства (3))

$$\begin{cases} \text{найти } \xi \in W_1^1(\Omega) : k_0 \int_{\Omega} (\nabla \xi(x), \nabla \eta(x)) dx = q\eta(0) \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega), \\ \xi(x) = w_\gamma, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (8)$$

а функция $u \in \overset{\circ}{W}_2^{(1)}(\Omega)$ является решением следующей задачи:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{g(x, |\nabla(\xi + u)(x)|)}{|\nabla(\xi + u)(x)|} \nabla(\xi + u)(x) - k_0 \nabla \xi(x), \nabla \eta(x) \right) dx = 0 \quad \forall \eta \in \overset{\circ}{W}_2^{(1)}(\Omega). \quad (9)$$

Краевая задача (8) для уравнения Лапласа с точечным источником достаточно хорошо изучена и свойства ее решения известны (см., например, [2]).

2. Исследование задачи фильтрации

Целью настоящей работы является изучение свойств гладкости решения задачи (9). Далее рассмотрим задачу, частным случаем которой является (9). Пусть вектор-функция $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ локально-интегрируема на множестве Ω

$$|Y| \in L_{1,\text{loc}}(\Omega). \quad (10)$$

Будем изучать задачу поиска функции $u \in \overset{\circ}{W}_2^{(1)}(\Omega)$ такой, что выполнено вариационное тождество

$$\int_{\Omega} \left(\frac{g(x, |Y(x) + \nabla u(x)|)}{|Y(x) + \nabla u(x)|} (Y(x) + \nabla u(x)) - k_0 Y(x), \nabla \eta(x) \right) dx = 0 \quad \forall \eta \in \overset{\circ}{W}_2^{(1)}(\Omega). \quad (11)$$

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. Пусть g удовлетворяет условиям (I)–(III), (4), (5), функция Y – условию (10), тогда задача (11) имеет решение.

Если дополнительно выполнено неравенство $p > n$, то это решение будет непрерывно по Гельдеру в любой подобласти области Ω с показателем, зависящим от p .

Доказательство. Вначале установим справедливость второй части теоремы. Преобразуем вариационное равенство (9) к виду

$$\int_{\Omega} (k_0 \nabla u, \nabla \eta) dx = \int_{\Omega} \left(k_0 (Y + \nabla u) - \frac{g(x, |Y + \nabla u|)}{|Y + \nabla u|} (Y + \nabla u), \nabla \eta \right) dx. \quad (12)$$

Пусть u – некоторое решение задачи (9), введем следующую функцию:

$$F_u(x) = k_0 (Y(x) + \nabla u(x)) - \frac{g(x, |Y(x) + \nabla u(x)|)}{|Y(x) + \nabla u(x)|} (Y(x) + \nabla u(x)) \quad x \in \Omega, \quad (13)$$

Из неравенства (3) вытекает оценка

$$|F_u(x)| = |k_0 |Y(x) + \nabla u(x)| - g(x, |Y(x) + \nabla u(x)|)| \leq b_0(x), \quad \forall x \in \Omega. \quad (14)$$

Таким образом, всякое решение u задачи (9) является решением краевой задачи Дирихле

$$\begin{cases} \text{найти } u \in \overset{\circ}{W}_2^{(1)}(\Omega) : k_0 \Delta u(x) = \text{div } F_u(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (15)$$

с правой частью, удовлетворяющей условию $|F_u| \in L_p(\Omega)$, $p \geq 2$. Теперь, пользуясь известными свойствами решения краевой задачи (15) (см., например, [4, с. 250]), получаем при $p > n$ непрерывность по Гельдеру функции u .

Существование решения доказывается так же, как и в [1], путем сведения задачи (11) к уравнению с монотонным и коэрцитивным оператором. Пусть $V = \overset{\circ}{W}_2^{(1)}(\Omega)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением и соответствующей ему нормой, задаваемыми по формулам:

$$(u, w)_V = \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla w) dx, \quad \|u\|_V = \left[\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right]^{1/2} \quad u, v \in V. \quad (16)$$

Определим оператор $A : V \rightarrow V$ следующей формой:

$$(Au, v)_V = \int_{\Omega} \left(\frac{g(x, |Y + \nabla u|)}{|Y + \nabla u|} (Y + \nabla u) - k_0 Y, \nabla v \right) dx \quad u, v \in V. \quad (17)$$

Корректность определения (17) следует из (I)–(III), (10) и неравенства

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(x, |Y(x) + \lambda|)}{|Y(x) + \lambda|} (Y(x) + \lambda) - k_0 Y(x) \right| = \\ & = \left| \frac{g(x, |Y(x) + \lambda|)}{|Y(x) + \lambda|} (Y(x) + \lambda) - k_0 (Y(x) + \lambda) + k_0 \lambda \right| \leq \\ & \leq \frac{|g(x, |Y(x) + \lambda|) (Y(x) + \lambda) - k_0 (Y(x) + \lambda)|}{|Y(x) + \lambda|} + k_0 |\lambda| \leq \\ & \leq b_0(x) + k_0 |\lambda| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n, \quad \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

Монотонность оператора A следует из условия (4), а коэрцитивность является следствием следующего неравенства (ε – произвольная положительная постоянная):

$$\begin{aligned} (Au, u)_V &= \int_{\Omega} \left(\frac{g(x, |Y + \nabla u|)}{|Y + \nabla u|} (Y + \nabla u) - k_0 Y, \nabla u \right) dx = \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{g(x, |Y + \nabla u|)}{|Y + \nabla u|} (Y + \nabla u) - k_0 (Y + \nabla u), \nabla u \right) dx + k_0 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq \\ &\geq - \int_{\Omega} b_0(x) |\nabla u| dx + k_0 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq \left(k_0 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \|u\|_V^2 - \frac{\|b_0\|_{L_2}^2}{2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Пользуясь теорией монотонных операторов [5, с. 95], получаем существование решения операторного уравнения $Au = 0$, а следовательно, и задачи (11). \square

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 10-01-00728, 12-01-97022, 12-01-31515).

Summary

O.A. Zadornov, G.O. Zadornova. On the Smoothness Properties of the Solution of a Nonlinear Filtration Problem in the Presence of a Point Source.

The properties of the solution of a nonlinear filtration problem in inhomogeneous porous media in the presence of a point source for a fluid obeying a law with a linear growth at infinity are studied. Additive selection of the feature connected with the singularity of the right-hand side is used. The pressure field is represented as the sum of the known solution of some linear (associated with the original) problem with a point source on the right-hand side and the unknown “additive term”. Holder continuity of the second term is established.

Key words: nonlinear filtration, inhomogeneous medium, point source, Holder continuity.

Литература

1. *Задворнов О.А.* Существование решения квазилинейной эллиптической краевой задачи при наличии точечных источников // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2010. – Т. 125, кн. 1. – С. 155–163.
2. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. – 348 с.
3. *Вайнберг М.М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. – М.: Гостехиздат, 1956. – 344 с.
4. *Ладыженская О.А., Уралъцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
5. *Гаевский Х., Грегер К., Захарнас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

Поступила в редакцию
06.02.12

Задворнов Олег Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Oleg.Zadvornov@ksu.ru*

Задворнова Галина Олеговна – студент кафедры вычислительной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *ozadvorn@ksu.ru*