Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета
по предмету «Физика»
Очный тур
2014-2015 учебный год

9 класс

Возможные решения

Задача 1. (20 баллов)
Школьник Петя Иванов из имеющихся в его распоряжении шести проволок собрал схему, изображённую на рис. 1. Найти сопротивление цепи между точками A и D, если сопротивления проволок AB и BD равны 10 Ом каждое, сопротивления AC и CD — по 20 Ом, а сопротивления AD и BC — по 8 Ом.

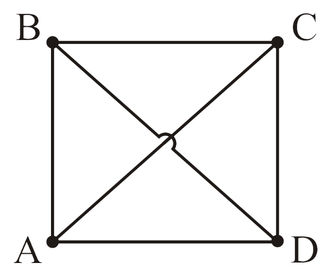

Рис. 1.

Ответ: 5 Ом.

Решение: Перерисуем схему так, как показано на рис. 2a. Поскольку $R_{AB} = R_{BD}$ и $R_{AC} = R_{CD}$, получившаяся цепь симметрична относительно прямой BC. Докажем, что ток в проводнике BC не течёт. Допустим, что это не так. Изменим полярность

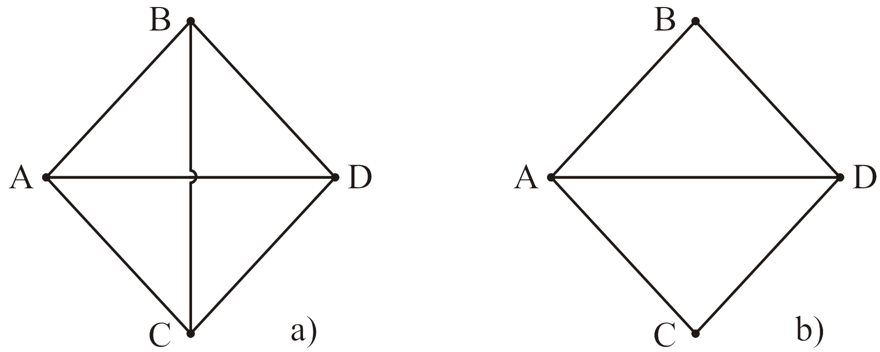

Рис. 2.

приложенного к точкам A и D напряжения и отразим схему относительно прямой BC. Очевидно, что цепь перейдёт в себя, но ток на участке BC изменит направление на противоположное. Это противоречие можно разрешить, только если $I_{BC} = 0$.

Благодаря этому факту, проводник BC можно убрать, не меняя общего сопротивления цепи. Оставшаяся цепь представляет собой комбинацию параллельных и последовательных соединений проводников (рис. 2b). Найдём общее сопростивление между точками A и D:

$$\frac{1}{R_{общ}} = \frac{1}{2R_{AB}} + \frac{1}{2R_{AC}} + \frac{1}{R_{AD}} = \frac{1}{20\ \text{Ом}} + \frac{1}{40\ \text{Ом}} + \frac{1}{8\ \text{Ом}} = \frac{1}{5\ \text{Ом}} \quad \Rightarrow \quad R_{общ} = 5\ \text{Ом}.$$

Задача 2. (20 баллов)
Теплоизолированный сосуд ёмкостью 200 мл был до краёв наполнен водой при температуре 20 ℃. В середину этого сосуда быстро, но аккуратно опустили кусок льда массой 42 г при температуре 0 ℃. Найти установившуюся температуру воды в сосуде. Плотность воды равна 1000 кг/м^3, плотность льда — 900 кг/м^3. Удельная теплоёмкость воды — 4200 Дж/(кг ·℃), удельная теплота плавления льда — 330 кДж/кг.

Ответ: 0 °C.

Решение: Масса воды, первоначально имевшейся в сосуде, равна, очевидно, 200 г. Кусок льда, опущенный в воду, останется плавать на её поверхности. Поэтому **масса** вытесненной воды равна **массе** льда. В результате, в сосуде останется вода массой m = = 200 г – 42 г = 158 г. Определим, сможет ли оставшаяся вода растопить весь лёд. Для этого вычислим теплоту Q_1, необходимую для плавления всего куска льда, и теплоту Q_2, которая выделится при остывании воды до 0 °C:

$$Q_1 = \lambda m_{\text{льда}} = 330000\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot 0{,}042\ \text{кг} = 13860\ \text{Дж},$$

$$Q_2 = cm \cdot 20\,^{\circ}\text{C} = 4200\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^{\circ}\text{C}} \cdot 0{,}158\ \text{кг} \cdot 20\,^{\circ}\text{C} = 13272\ \text{Дж}.$$

Так как $Q_1 > Q_2$, то лёд растает не весь, и установившаяся в сосуде температура будет равна 0 °C.

Задача 3. (20 баллов)

В сосуде с водой (см. рис. 3) имеется толстая вертикальная деревянная перегородка высотой h = 40 см, делящая его на две равные части и способная свободно перемещаться вверх-вниз по сделанным на боковых стенках специальным направляющим. В правую часть сосуда медленно наливают керосин. а) Найти максимальную высоту слоя керосина в правой части сосуда, при которой он ещё не начинает перетекать в левую часть. б) На какую высоту относительно своего первоначального положения поднимется перегородка в этом случае? Плотности дерева, керосина и воды равны 600 кг/м^3, 800 кг/м^3 и 1000 кг/м^3 соответственно. Площадь основания перегородки составляет четверть площади дна сосуда.

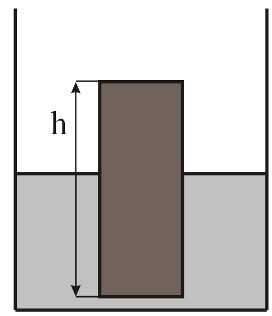

Рис. 3.

Ответ: а) 30 см; б) 9 см.

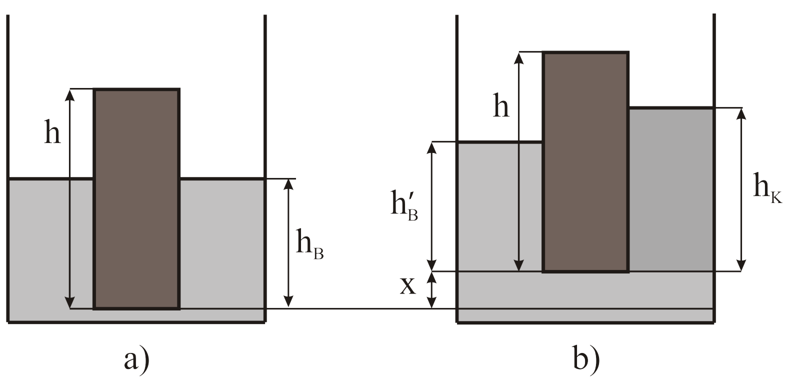

Рис. 4.

Решение: Сначала найдём глубину $h_В$, на которую погружена в воду перегородка (см. рис. 4а). Это можно сделать, приравняв величину выталкивающей силы и величину силы тяжести, действующих на перегородку $F_т = F_А$:

$$m_П g = \rho_В g V_{\text{погр}} \quad \Rightarrow \quad \rho_Д S_П h = \rho_В S_П h_В,$$

где $m_П$ и $S_П = S/4$ — масса и площадь основания перегородки. Выражая $h_В$, получим, что

$$h_В = \frac{\rho_Д h}{\rho_В} = 24 \text{ см}.$$

Если в правую часть сосуда наливать керосин, то перегородка начнёт двигаться вверх, при этом оставаясь на плаву.

С другой стороны, две части, разделённые перегородкой, представляют собой сообщающиеся сосуды, поэтому давления жидкостей на уровне нижнего края перегородки слева и справа будут одинаковыми и совпадать с давлением, производимым перегородкой на воду (система находится в равновесии). Исходя из этого, найдём максимальную высоту слоя керосина. Пусть керосин полностью заполнил пространство до нижнего края перегородки (см. рис. 4b), тогда

$$\frac{m_П g}{S_П} = \rho_К g h_К \quad\Rightarrow\quad \rho_Д g h = \rho_К g h_К \quad\Rightarrow\quad h_К = \frac{\rho_Д h}{\rho_К} = 30 \text{ см}.$$

Записывая аналогичное равенство для давлений перегородки и воды, получаем

$$\frac{m_П g}{S_П} = \rho_В g h'_В \quad\Rightarrow\quad \rho_Д g h = \rho_В g h'_В \quad\Rightarrow\quad h'_В = \frac{\rho_Д h}{\rho_В} = h_В,$$

то есть расстояние между поверхностью воды в левой части сосуда и нижним краем в процессе перемещений перегородки не изменяется.

Чтобы ответить на второй вопрос задачи, найдём объём воды в сосуде до и после доливания керосина и приравняем их, учитывая, что площади поперечного сечения частей сосуда слева и справа от перегородки равны $3S/8$ (S — общая площадь дна сосуда, x — искомая высота, на которую поднялась перегородка, V_0 — объём воды, первоначально находящейся под перегородкой):

$$V_{до} = \frac{3}{4} S h_В + V_0, \qquad V_{после} = Sx + \frac{3}{8} S h_В + V_0,$$

$$\frac{3}{4} S h_В = Sx + \frac{3}{8} S h_В \quad\Rightarrow\quad x = \frac{3h_В}{8} = 9 \text{ см}.$$

Задача 4. (20 баллов)

К концу однородной палочки подвешен на нити алюминиевый шарик радиуса $r = 0{,}5$ см. Палочку кладут на край стакана с водой, добиваясь равновесия при погружении в воду половины шарика. При этом оказывается, что точка опоры делит палочку в отношении 2:3. Найти массу палочки. Плотность алюминия $\rho = 2700$ кг/м^3, плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, объём шара связан с его радиусом выражением $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Ответ: 4,6 г.

Решение: На шарик, погруженный в воду, действуют сила тяжести $F_т = \rho V g$ и сила Архимеда, равная $F_A = \rho_0 \frac{V}{2} g$, где $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ — объём шарика. Отсюда получаем, что вес шарика равен

$$P = F_т - F_A = \left(\rho - \frac{\rho_0}{2}\right) V g.$$

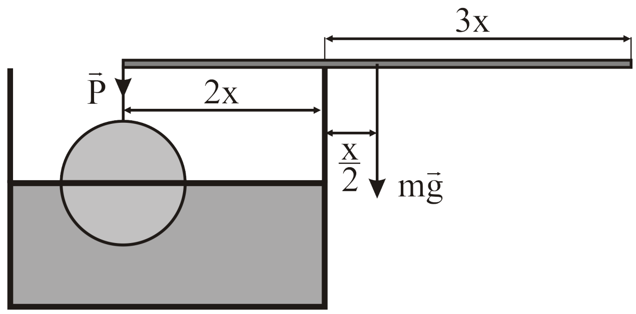

Рис. 5.

Запишем теперь условие равенства моментов сил, действующих на палочку, учитывая, что точка опоры делит палочку в отношении 2:3 (см. рис. 5):

$$P \cdot 2x = mg \cdot \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad (2\rho - \rho_0)\, Vgx = \frac{mgx}{2}.$$

Из полученного равенства выразим массу палочки

$$m = (4\rho - 2\rho_0)V = (4\rho - 2\rho_0) \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \approx 4{,}6 \text{ г}.$$

Задача 5. (20 баллов)
Тело, подброшенное вверх из точки, находящейся на высоте h над поверхностью земли, падает на землю через время $t_1 = 5$ с. Тело, брошенное вниз из той же точки и с такой же начальной скоростью, падает на землю через время $t_2 = 3$ с. Найти h и начальную скорость тела. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $h = \dfrac{gt_1t_2}{2} = 75$ м, $v_0 = \dfrac{g(t_1 - t_2)}{2} = 10\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

Решение: Пусть v_0 — величина начальной скорости тела в обоих случаях. Используя уравнение движения тела в поле тяготения, запишем

$$0 = h + v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2}, \tag{5.1}$$

$$0 = h - v_0 t_2 - \frac{gt_2^2}{2}. \tag{5.2}$$

Вычтем эти равенства друг из друга и, после математических преобразований, получим выражение для v_0:

$$0 = v_0(t_1 + t_2) - \frac{g(t_1^2 - t_2^2)}{2} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{g(t_1 - t_2)}{2} = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Подставим его в (5.2) и найдём выражение для начальной высоты h:

$$h = \frac{g(t_1 - t_2)}{2} \cdot t_2 + \frac{gt_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{gt_1t_2}{2} = 75 \text{ м}.$$

Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета по предмету «Физика»
Очный тур
2014-2015 учебный год

10 класс

Возможные решения

Задача 1. (20 баллов)
Пассажир опоздал к отходу поезда. Когда он вышел к платформе, мимо него проехали два последовательно идущих вагона: первый из них — за время $t_1 = 15$ с, второй — за время $t_2 = 12$ с. Сколько времени прошло с начала движения поезда до момента, когда к нему подошёл пассажир, если поезд двигался с постоянным ускорением? Длина всех вагонов одинаковая.

Ответ: $t_0 = \dfrac{t_1 t_2}{t_1 - t_2} - \dfrac{t_1 + t_2}{2} = 46$ с.

Решение: Пусть a — ускорение поезда, t_0 — время, на которое опоздал пассажир. Тогда скорость поезда в этот момент составляет $v_1 = at_0$, а в момент, когда мимо пассажира начал проходить второй вагон, — $v_2 = a(t_0+t_1)$. Первый вагон проходит расстояние L, равное своей длине, за время t_1:

$$L = v_1 t_1 + \frac{at_1^2}{2} = a\left(t_0 t_1 + \frac{t_1^2}{2}\right).$$

Второй вагон проходит то же расстояние L за время t_2:

$$L = v_2 t_2 + \frac{at_2^2}{2} = a\left(t_0 t_2 + t_1 t_2 + \frac{t_2^2}{2}\right).$$

Приравнивая правые части этих равенств, получаем

$$t_0 t_1 + \frac{t_1^2}{2} = t_0 t_2 + t_1 t_2 + \frac{t_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{t_1 t_2}{t_1 - t_2} - \frac{t_1 + t_2}{2} = 46 \text{ с}.$$

Задача 2. (20 баллов)
Тяжёлый клин с углом при основании, равным $\alpha = 15^\circ$, движется по горизонтальной плоскости со скоростью u (см. рис. 6). Навстречу ему со скоростью v летит лёгкий шарик. Чему должна равняться скорость v, чтобы шарик после удара о клин отскочил вертикально вверх. Удар считать абсолютно упругим, трение отсутствует.

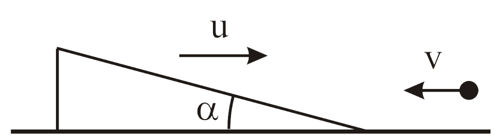

Рис. 6.

Ответ: $v = u\left(\dfrac{1}{\cos 2\alpha} - 1\right) = u\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} - 1\right).$

Решение: Перейдём в систему отсчёта, связанную с клином. В ней шарик летит навстречу клину со скоростью $u + v$. При абсолютно упругом ударе о покоящийся тяжёлый клин скорость шарика останется неизменной по величине, но будет направлена

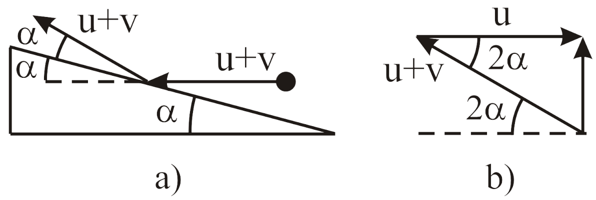

Рис. 7.

вверх по углом α к поверхности клина (см. рис. 7a) или, что эквивалентно, под углом $2\alpha = 30^\circ$ относительно горизонтальной поверхности.

Чтобы получить вектор скорости отскачившего мячика в лабораторной системе отсчёта, необходимо к вектору скорости, найденной в системе, связанной с клином, прибавить вектор $\vec{u}$. Так как, по условию, результат должен быть направлен вертикально, мы получим прямоугольный треугольник (см. рис. 7b) с катетом, равным u, гипотенузой, равной $u+v$, и углом $2\alpha = 30^\circ$ между ними. Из указанного треугольника находим, что

$$(u+v)\cos 2\alpha = u \quad \Rightarrow \quad v = u\left(\frac{1}{\cos 2\alpha} - 1\right) = u\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right).$$

Задача 3. (20 баллов)
Схема (см. рис. 8) состоит из четырёх резисторов, идеального амперметра и диода D. Сопротивления всех резисторов указаны на рисунке. При одной полярности приложенного к цепи напряжения (см. рис.) амперметр показывает значение $I_1 = 0{,}6$ А. Какое значение силы тока I_2 будет показывать амперметр, если изменить полярность? Напряжение в цепи в обоих случаях одинаковое.

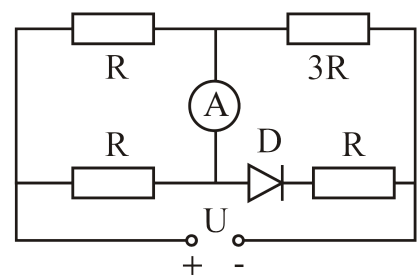

Рис. 8.

Примечание. Диод — электронное устройство, которое пропускает ток только в одном направлении. При этом сопротивление диода пренебрежимо мало.

Ответ: $I_2 = \frac{5}{7} I_1 \approx 0{,}43$ А.

Решение: При полярности поданого напряжения, изображённой на рис. 8, диод открыт, и цепь эквивалентна двум парам параллельно соединённых резисторов. Общее сопротивление такой цепи равно

$$R_1 = \frac{R}{2} + \frac{3R \cdot R}{3R + R} = \frac{5R}{4}.$$

Сила тока, идущего от источника, равна $I = \frac{U}{R_1} = \frac{4U}{5R}$. Соответственно, сила тока, текущего через резистор с сопротивлением R, равна $\frac{I}{2} = \frac{2U}{5R}$, а напряжение на нём — $2U/5$. Напряжение на резисторе с сопротивлением 3R составляет $3U/5$, следовательно, сила тока через него равна $\frac{U}{5R}$. Отсюда получаем, что ток, текущий через амперметр, даётся формулой

$$I_1 = \frac{2U}{5R} - \frac{U}{5R} = \frac{U}{5R}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда полярность поданого напряжения изменена, диод закрыт. Общее сопротивление такой цепи равно

$$R_2 = \frac{R}{2} + 3R = \frac{7R}{2}.$$

Во втором случае амперметр показывает значение силы тока, текущего через нижний резистор с сопротивлением R. Она равна половине силы тока, идущего от источника

$$I_2 = \frac{U}{2R_2} = \frac{U}{7R}.$$

Отметим, что направление тока в обоих случаях одинакова.

Из полученных выражений для I_1 и I_2 получаем, что

$$I_2 = \frac{5}{7}I_1 = 0{,}43\ \text{А}.$$

Задача 4. (20 баллов)
На верхнем краю очень тяжёлого клина с углом α при основании укреплён двойной блок — два вала с радиусами r и R, насаженные на общую ось и жёстко скреплённые друг с другом (см. рис. 9). К свешивающемуся с бо́льшего вала концу нити прикреплён груз массы m_1. К концу нити, намотанной на меньший вал, прикреплён груз массой m_2. При каком отношении масс грузов m_2/m_1 система будет находится в равновесии? Массами блоков и нитей, а также трением пренебречь.

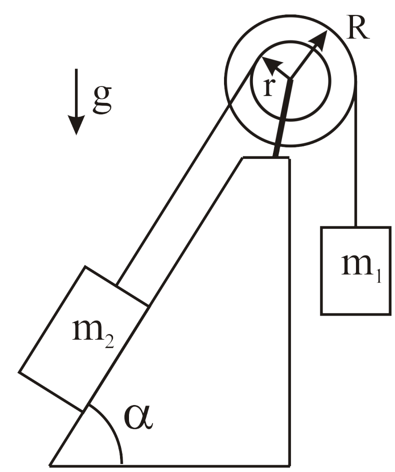

Рис. 9.

Ответ: $\dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{R}{r\sin\alpha}$.

Решение: Система будет находится в равновесии, когда моменты сил натяжения нитей относительно оси блока будут равны. Пусть T_1 — сила натяжения нити, на которой висит груз массой m_1, а T_2 — сила натяжения нити, к которой прикреплён груз массой m_2. Очевидно, что $T_1 = m_1 g$. С другой стороны, $T_2 = m_2 g\sin\alpha$. Записываем теперь условие равенства моментов:

$$m_1 gR = m_2 g\sin\alpha \cdot r \quad \Rightarrow \quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{R}{r\sin\alpha}.$$

Задача 5. (20 баллов)
Пробковый шарик, полностью погруженный в воду, начинает всплывать на поверхность с ускорением 11,2 м/с^2. С каким ускорением начнёт двигаться в воде алюминиевый шарик того же объёма? Плотность пробки равна 200 кг/м^3, плотность алюминия — 2700 кг/м^3, плотность воды — 1000 кг/м^3. Ускорение свободного падения принять равным 9,8 м/с^2.
Примечание. Шарик, погруженный в жидкость, при равноускоренном движении испытывает силу сопротивления, пропорциональную ускорению: $F_{\text{сопр}} \sim a$.

Ответ: 5,2 м/с^2.

Решение: Так как, по условию, сила сопротивления пропорциональна ускорению, будет считать, что $F_{\text{сопр}} = ka$, где k — неизвестный коэффициент. На шарик, всплывающий к поверхности (ускорение a_1 направлено вверх), действуют сила Архимеда, сила тяжести и сила сопротивления, направленная вниз. Запишем второй закон Ньютона:

$$ma_1 = F_A - F_T - ka_1 \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{пр}} V a_1 = \rho_{\text{в}} V g - \rho_{\text{пр}} V g - ka_1 \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{пр}} a_1 = \rho_{\text{в}} g - \rho_{\text{пр}} g - \frac{ka_1}{V},$$

где V — объём шарика. Отсюда, подставив числовые данные, найдём значение величины k/V:

$$\frac{k}{V} = \frac{(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{пр}})g}{a_1} - \rho_{\text{пр}} = \frac{800\ \text{кг/м}^3 \cdot 9{,}8\ \text{м/с}^2}{11{,}2\ \text{м/с}^2} - 200\ \text{кг/м}^3 = 500\ \text{кг/м}^3.$$

Во втором случае сила сопротивления, действующая на опускающийся шарик (ускорение a_2 направлено вниз), направлена вверх:

$$-ma_2 = F_A - F_T + ka_2 \quad \Rightarrow \quad -\rho_{\text{ал}} V a_2 = \rho_{\text{в}} V g - \rho_{\text{ал}} V g + ka_2 \quad \Rightarrow \quad \left(\rho_{\text{ал}} + \frac{k}{V}\right) a_2 = (\rho_{\text{ал}} - \rho_{\text{в}})g$$

$$\Rightarrow \quad a_2 = \frac{(\rho_{\text{ал}} - \rho_{\text{в}})g}{\rho_{\text{ал}} + k/V} = \frac{1700\ \text{кг/м}^3 \cdot 9{,}8\ \text{м/с}^2}{2700\ \text{кг/м}^3 + 500\ \text{кг/м}^3} \approx 5{,}2\ \text{м/с}^2.$$

Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета
по предмету «Физика»
Очный тур
2014-2015 учебный год

11 класс

Вариант 1

Возможные решения

Задача 1. (20 баллов)
Идеальный одноатомный газ совершает цикл, состоящий из двух изобар и двух адиабат. Найти КПД этого цикла, если известно, что максимальное давление газа в данном цикле вдвое превышает минимальное.
Примечание. Адиабатный процесс описывается уравнением Пуассона: $pV^{5/3} = \text{const}$.

Ответ: $\eta = 1 - 2^{-2/5} \approx 0{,}24$.

Решение: Очевидно, что в указанном цикле (см. рис. 10) теплота подводится к газу или отдаётся им только в изобарных процессах.

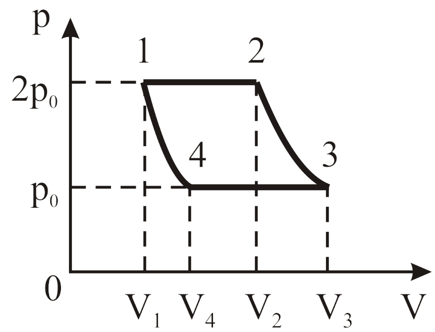

Рис. 10.

Найдём полученное Q_+ и отданное Q_- количество теплоты ($\Delta V_{12} = V_2 - V_1$, $\Delta V_{43} = V_3 - V_4$):

$$Q_+ = Q_{12} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T_{12} + 2p_0\Delta V_{12} = 5p_0\Delta V_{12},$$

$$Q_- = Q_{43} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T_{43} + p_0\Delta V_{43} = \frac{5}{2}p_0\Delta V_{43}.$$

Так как участки 23 и 41 представляют собой адиабаты, получим, что

$$\begin{cases} 2p_0V_1^{5/3} = p_0V_4^{5/3} \\ 2p_0V_2^{5/3} = p_0V_3^{5/3} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} V_4 = V_1 \cdot 2^{3/5} \\ V_3 = V_2 \cdot 2^{3/5} \end{cases} \Rightarrow \quad \Delta V_{43} = \Delta V_{12} \cdot 2^{3/5}.$$

Подставим теперь полученные выражения в формулу для КПД цикла:

$$\eta = 1 - \frac{Q_-}{Q_+} = 1 - \frac{(5/2)p_0\,\Delta V_{43}}{5p_0\,\Delta V_{12}} = 1 - 2^{-2/5} \approx 0{,}24.$$

Задача 2. (20 баллов)

На горизонтальной поверхности покоятся два бруска, связанные пружиной жёсткости k (см. рис. 11). В начальный момент пружина находится в недеформированном состоянии. Какую наименьшую скорость v следует сообщить правому бруску, чтобы левый брусок также пришёл в движение? Коэффициент трения обоих брусков о поверхность равен μ.

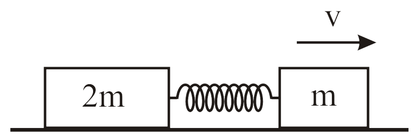

Рис. 11.

Ответ: $v = \mu g\sqrt{\dfrac{8m}{k}}$.

Решение: Пусть x — расстояние, пройденное праым бруском до остановки. Кинетическая энергия, сообщённая ему, тратится на работу против силы трения и изменение потенциальной энергии деформированной пружины:

$$\frac{mv^2}{2} = A_{\text{против тр}} + \frac{kx^2}{2} = \mu mgx + \frac{kx^2}{2}.$$

Левый брусок сдвинется с места, если величина силы упругости, возникшей в этом случае, превысит величину действующей на него силы трения покоя. В предельном случае можно записать, что

$$kx = \mu 2mg \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2\mu mg}{k}.$$

Подставляя найденное значение x, получаем

$$\frac{mv^2}{2} = \mu mg\cdot\frac{2\mu mg}{k} + \frac{k}{2}\left(\frac{2\mu mg}{k}\right)^2 = \frac{4\mu^2m^2g^2}{k} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{8\mu^2mg^2}{k} \quad \Rightarrow \quad v = \mu g\sqrt{\frac{8m}{k}}.$$

Задача 3. (20 баллов)

Конденсатор, имеющий заряд q, разряжается через катушку с индуктивностью L (см. рис. 12). Когда заряд на конденсаторе становится равным нулю, замыкают ключ K. Найти максимальное значение заряда конденсатора после замыкания ключа. Индуктивность второй катушки равна 2L.

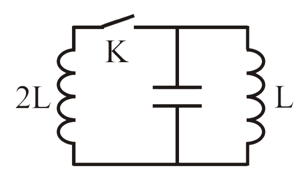

Рис. 12.

Ответ: $q\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Решение: Пусть C — ёмкость конденсатора. Используя закон сохранения энергии, найдём силу тока I_0 в правой катушке в тот момент, когда заряд на конденсаторе равен нулю

$$\frac{q^2}{2C} = \frac{LI_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{q}{\sqrt{LC}}.$$

При замыкании ключа в цепь включается левая катушка. Рассматривая контур, содержащий обе катушки индуктивности, получим (I_1 и I_2 — токи, текущие через правую и левую катушку соответственно)

$$LI_1' + 2LI_2' = 0 \quad \Rightarrow \quad LI_1 + 2LI_2 = \text{const}.$$

Так как в момент замыкания ключа $I_1 = I_0$, а $I_2 = 0$, найденное соотношение можно переписать в виде

$$LI_1 + 2LI_2 = LI_0 \quad \Rightarrow \quad I_1 + 2I_2 = I_0.$$

С другой стороны, в тот момент, когда заряд на конденсаторе снова достигнет максимума, ток через конденсатор не течёт и, следовательно, $I_2 = I_1 = I_0/3$.

Запишем ещё раз закон сохранения энергии и найдём максимальное значение заряда конденсатора $\tilde{q}$ после замыкания ключа

$$\frac{q^2}{2C} = \frac{\tilde{q}^2}{2C} + \frac{LI_1^2}{2} + \frac{2LI_2^2}{2} = \frac{\tilde{q}^2}{2C} + \frac{LI_0^2}{6} = \frac{\tilde{q}^2}{2C} + \frac{q^2}{6C} \quad \Rightarrow \quad \tilde{q}^2 = \frac{2q^2}{3} \quad \Rightarrow \quad \tilde{q} = q\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Задача 4. (20 баллов)
Длинная, очень тонкая прямая нить — световод — изготовлена из прозрачного материала с показателем преломления $n = \sqrt{1{,}75}$. Один из концов нити прижат к источнику рассеянного света. Другой конец нити размещён на расстоянии $L = 5$ см от расположенного перпендикулярно световоду экрана. Найти диаметр D светового пятна на экране. Считать, что диаметр световода много меньше, чем D.

Ответ: $D = 17{,}3$ см.

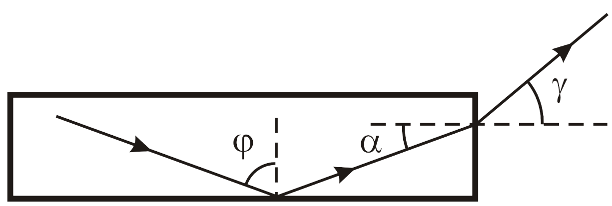

Рис. 13.

Решение: Через очень длинный световод пройдут только те лучи, которые падают на границу с воздухом под углом, большим угла полного отражения. Остальные лучи будут терять энергию за счёт преломления и до конца практически не дойдут. Граница светового пятна на экране будет определяться лучами, идущими под предельным углом φ (см. рис. 13) и выходящими из торца световода (напомним, что его диаметр считается пренебрежимо малым). Для этих лучей $\sin\varphi = 1/n$. С другой стороны, по закону Снеллиуса $\sin\gamma = n\sin\alpha$. Отсюда, учитывая, что $\cos\alpha = \sin\varphi = 1/n$, получим

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n} \quad \Rightarrow \quad \sin\gamma = n\sin\alpha = \sqrt{n^2 - 1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 60^\circ.$$

Найдём теперь диаметр светового пятна:

$$D = 2L\,\mathrm{tg}\,\gamma = 2L\sqrt{3} \approx 17{,}3 \text{ см}.$$

Задача 5. (20 баллов)
Легковая машина движется по горизонтальному шоссе за грузовиком. В протекторе заднего колеса грузовика застрял камень. На каком минимальном расстоянии s от грузовика может ехать легковая машина, чтобы камень, вырвавшийся из колеса грузовика, не долетел до неё? Машины движутся со скоростью $v = 72$ км/ч. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

Ответ: 40 м.

Решение: Перейдём в систему отсчёта, связанную с движущимися машинами. Относительно неё камень, застрявший в колесе, вылетает со скоростью $v = 72$ км/ч $= 20$ м/с, равной линейной скорости вращения обода колеса. Вылетевший камень пролетит расстояние $L = \dfrac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$, где α — угол, под которым направлена его начальная скорость. Так как угол α может быть любым, минимальное безопасное расстояние s равно максимально возможному значению L, которое получается при $\alpha = 45^\circ$, то есть

$$s = \frac{v^2 \sin(2 \cdot 45^\circ)}{g} = \frac{v^2}{g} = 40 \text{ м.}$$

Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета
по предмету «Физика»
Очный тур
2014-2015 учебный год

11 класс

Вариант 2

Возможные решения

Задача 1. (20 баллов)
Идеальный одноатомный газ совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух адиабат. Найти КПД этого цикла, если известно, что максимальный объём газа в данном цикле вдвое превышает минимальный.
Примечание. Адиабатный процесс описывается уравнением Пуассона: $pV^{5/3} = \text{const}$.

Ответ: $\eta = 1 - 2^{-2/3} \approx 0{,}37$.

Решение: Очевидно, что в указанном цикле (см. рис. 14) теплота подводится к газу или отдаётся им только в изохорных процессах.

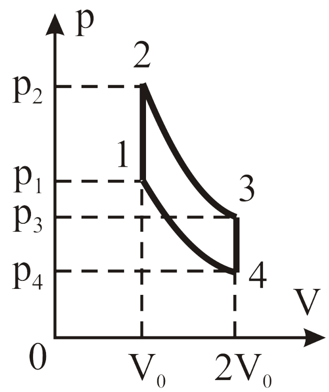

Рис. 14.

Найдём полученное Q_+ и отданное Q_- количество теплоты ($\Delta p_{12} = p_2 - p_1$, $\Delta p_{43} = p_3 - p_4$):

$$Q_+ = Q_{12} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T_{12} = \frac{3}{2}V_0\Delta p_{12},$$

$$Q_- = Q_{43} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T_{43} = 3V_0\Delta p_{43}.$$

Так как участки 23 и 41 представляют собой адиабаты, получим, что

$$\begin{cases} p_1V_0^{5/3} = p_4(2V_0)^{5/3} \\ p_2V_0^{5/3} = p_3(2V_0)^{5/3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_4 = p_1 \cdot 2^{-5/3} \\ p_3 = p_2 \cdot 2^{-5/3} \end{cases} \Rightarrow \quad \Delta p_{43} = \Delta p_{12} \cdot 2^{-5/3}.$$

Подставим теперь полученные выражения в формулу для КПД цикла:

$$\eta = 1 - \frac{Q_-}{Q_+} = 1 - \frac{3V_0\Delta p_{43}}{(3/2)V_0\Delta p_{12}} = 1 - 2^{-2/3} \approx 0{,}37.$$

Задача 2. (20 баллов)

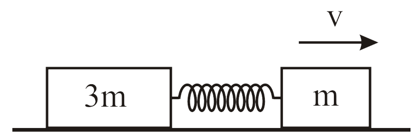

Рис. 15.

На горизонтальной поверхности покоятся два бруска, связанные пружиной жёсткости k (см. рис. 15). В начальный момент пружина находится в недеформированном состоянии. Какую наименьшую скорость v следует сообщить правому бруску, чтобы левый брусок также пришёл в движение? Коэффициент трения обоих брусков о поверхность равен μ.

Ответ: $v = \mu g\sqrt{\dfrac{15m}{k}}$.

Решение: Пусть x — расстояние, пройденное праым бруском до остановки. Кинетическая энергия, сообщённая ему, тратится на работу против силы трения и изменение потенциальной энергии деформированной пружины:

$$\frac{mv^2}{2} = A_{\text{против тр}} + \frac{kx^2}{2} = \mu mgx + \frac{kx^2}{2}.$$

Левый брусок сдвинется с места, если величина силы упругости, возникшей в этом случае, превысит величину действующей на него силы трения покоя. В предельном случае можно записать, что

$$kx = \mu 3mg \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3\mu mg}{k}.$$

Подставляя найденное значение x, получаем

$$\frac{mv^2}{2} = \mu mg \cdot \frac{3\mu mg}{k} + \frac{k}{2}\left(\frac{3\mu mg}{k}\right)^2 = \frac{15\mu^2 m^2 g^2}{2k} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{15\mu^2 mg^2}{k} \quad \Rightarrow \quad v = \mu g\sqrt{\frac{15m}{k}}.$$

Задача 3. (20 баллов)

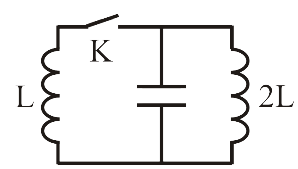

Рис. 16.

Конденсатор, имеющий заряд q, разряжается через катушку с индуктивностью 2L (см. рис. 16). Когда заряд на конденсаторе становится равным нулю, замыкают ключ K. Найти максимальное значение заряда конденсатора после замыкания ключа. Индуктивность второй катушки равна L.

Ответ: $\dfrac{q}{\sqrt{3}}$.

Решение: Пусть C — ёмкость конденсатора. Используя закон сохранения энергии, найдём силу тока I_0 в правой катушке в тот момент, когда заряд на конденсаторе равен нулю

$$\frac{q^2}{2C} = \frac{2LI_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{q}{\sqrt{2LC}}.$$

При замыкании ключа в цепь включается левая катушка. Рассматривая контур, содержащий обе катушки индуктивности, получим (I_1 и I_2 — токи, текущие через правую и левую катушку соответственно)

$$2LI_1' + LI_2' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2LI_1 + LI_2 = \text{const}.$$

Так как в момент замыкания ключа $I_1 = I_0$, а $I_2 = 0$, найденное соотношение можно переписать в виде

$$2LI_1 + LI_2 = 2LI_0 \quad \Rightarrow \quad I_1 + I_2/2 = I_0.$$

С другой стороны, в тот момент, когда заряд на конденсаторе снова достигнет максимума, ток через конденсатор не течёт, и, следовательно, $I_2 = I_1 = 2I_0/3$.

Запишем ещё раз закон сохранения энергии и найдём максимальное значение заряда конденсатора $\tilde{q}$ после замыкания ключа

$$\frac{q^2}{2C} = \frac{\tilde{q}^2}{2C} + \frac{2LI_1^2}{2} + \frac{LI_2^2}{2} = \frac{\tilde{q}^2}{2C} + \frac{2LI_0^2}{3} = \frac{\tilde{q}^2}{2C} + \frac{q^2}{3C} \quad \Rightarrow \quad \tilde{q}^2 = \frac{q^2}{3} \quad \Rightarrow \quad \tilde{q} = \frac{q}{\sqrt{3}}.$$

Задача 4. (20 баллов)
Длинная, очень тонкая прямая нить — световод — изготовлена из прозрачного материала с показателем преломления $n = \sqrt{1{,}25}$. Один из концов нити прижат к источнику рассеянного света. Другой конец нити размещён на расстоянии $L = 7$ см от расположенного перпендикулярно световоду экрана. Найти диаметр D светового пятна на экране. Считать, что диаметр световода много меньше, чем D.

Ответ: $D = 8{,}1$ см.

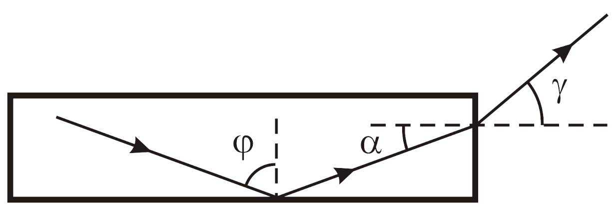

Рис. 17.

Решение: Через очень длинный световод пройдут только те лучи, которые падают на границу с воздухом под углом, большим угла полного отражения. Остальные лучи будут терять энергию за счёт преломления и до конца практически не дойдут. Граница светового пятна на экране будет определяться лучами, идущими под предельным углом φ (см. рис. 17) и выходящими из торца световода (напомним, что его диаметр считается пренебрежимо малым). Для этих лучей $\sin\varphi = 1/n$. С другой стороны, по закону Снеллиуса $\sin\gamma = n\sin\alpha$. Отсюда, учитывая, что $\cos\alpha = \sin\varphi = 1/n$, получим

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n} \quad \Rightarrow \quad \sin\gamma = n\sin\alpha = \sqrt{n^2-1} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 30^\circ.$$

Найдём теперь диаметр светового пятна:

$$D = 2L\,\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{2L}{\sqrt{3}} \approx 8{,}1 \text{ см}.$$

Задача 5. (20 баллов)
Легковая машина движется по горизонтальному шоссе за грузовиком. В протекторе заднего колеса грузовика застрял камень. На каком минимальном расстоянии s от грузовика может ехать легковая машина, чтобы камень, вырвавшийся из колеса грузовика, не долетел до неё? Машины движутся со скоростью $v = 90$ км/ч. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

Ответ: 62,5 м.

Решение: Перейдём в систему отсчёта, связанную с движущимися машинами. Относительно неё камень, застрявший в колесе, вылетает со скоростью $v = 90$ км/ч $=$ $= 25$ м/с, равной линейной скорости вращения обода колеса. Вылетевший камень пролетит расстояние $L = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$, где α — угол, под которым направлена его начальная скорость. Так как угол α может быть любым, минимальное безопасное расстояние s равно максимально возможному значению L, которое получается при $\alpha = 45^\circ$, то есть

$$s = \frac{v^2 \sin(2 \cdot 45^\circ)}{g} = \frac{v^2}{g} = 62{,}5 \text{ м.}$$