Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2018, №4, с. 3–15 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

К.А. БАЙКАЛОВА, Д.Ю. ЕМЕЛЬЯНОВ, Б.Ш. КУЛПЕШОВ, Е.А. ПАЛЮТИН, С.В. СУДОПЛАТОВ

ОБ АЛГЕБРАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ БИНАРНЫХ ИЗОЛИРУЮЩИХ ФОРМУЛ ТЕОРИЙ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП И ИХ УПОРЯДОЧЕННЫХ ОБОГАЩЕНИЙ

Аннотация. Описываются алгебры распределений бинарных изолирующих формул теорий абелевых групп и некоторых их упорядоченных обогащений. Это описание опирается на общую теорию алгебр изолирующих формул и учитывает специфику базируемости теорий абелевых групп, основанную на инвариантах Шмелевой. В работе приводятся таблицы Кэли для алгебр, соответствующих теориям базисных абелевых групп и их упорядоченным обогащениям. Указывается механизм преобразования алгебр для теорий базисных абелевых групп к алгебрам для произвольных теорий абелевых групп.

Ключевые слова: алгебра распределений бинарных изолирующих формул, абелева группа, элементарная теория, упорядоченное обогащение.

УДК: 510.670 : 512.541

В работах [1]–[4] введено понятие алгебры распределений бинарных изолирующих формул и ряд сопутствующих понятий, а также построена общая теория таких алгебр, позволяющая на бинарном уровне определять и описывать структурные свойства элементарных теорий. Применительно к различным естественным классам теорий алгебры распределений бинарных изолирующих формул изучены в работах [5]–[9].

В данной работе дается описание алгебр распределений бинарных изолирующих формул теорий абелевых групп и некоторых их упорядоченных обогащений. В первом и втором разделах приводятся общие результаты о сохранении алгебр распределений бинарных изолирующих формул при обогащениях теорий, а также специфика этих алгебр для семейств слабо ортогональных типов. В третьем разделе представляются необходимые сведения о теориях абелевых групп и инвариантах Шмелевой. В разделах 4, 5, 6 описываются алгебры бинарных изолирующих формул для теорий базисных абелевых групп и их упорядоченных обогащений. В разделе 7 указывается механизм преобразования алгебр для теорий базисных абелевых групп к алгебрам для произвольных теорий абелевых групп.

Будем пользоваться без пояснений терминологией, относящейся к алгебрам распределений бинарных изолирующих формул [1], [3], а также стандартными теоретико-модельными и теоретико-групповыми понятиями [10]–[13].

Поступила 13.01.2017

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан, грант № 0830/ГФ4, Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-01-00531-а) и Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6848.2016.1).

1. Критерии сохранения алгебры распределений бинарных изолирующих формул при обогащении теории

Следующие общие утверждения проясняют связь между алгебрами бинарных изолирующих формул при обогащениях теорий.

Предложение 1. *Пусть T_1, T_2 — теории, имеющие алгебры бинарных изолирующих формул $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ соответственно, и при этом выполняются следующие условия*:

a) *T_2 является обогащением теории T_1*;

b) *для любой изолирующей формулы $\varphi(a, y)$ теории T_1 совпадает метка для алгебры $\mathfrak{A}_1$ и для алгебры $\mathfrak{A}_2$, если $\varphi(a, y)$ является изолирующей формулой для теории T_2. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$;

2) *каждый 1-тип p теории T_1 с ненулевыми метками из $\cup\{\nu(p, q) \cup \nu(q, p) \mid q \in S^1(T_1)\}$ имеет единственное пополнение из $S^1(T_2)$, каждая изолирующая формула $\varphi(a, y)$ теории T_1 является изолирующей формулой теории T_2, и никакая формула $\psi(b, y)$ теории T_1 не выводится из изолирующей формулы теории T_2, не эквивалентной никакой изолирующей формуле $\chi(b, y)$ теории T_1.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Если $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$, то в алгебре $\mathfrak{A}_2$ сохраняются все метки алгебры $\mathfrak{A}_1$ и не появляется новых меток. В частности, каждый 1-тип p теории T_1 с условием $|\cup \{\nu(p, q) \cup \nu(q, p) \mid q \in S^1(T_1)\}| \geq 2$ имеет единственное пополнение из $S^1(T_2)$. Также каждая изолирующая формула $\varphi(a, y)$ теории T_1 является изолирующей формулой теории T_2, и никакая формула $\psi(b, y)$ теории T_1 не выводится из изолирующей формулы теории T_2, не эквивалентной никакой изолирующей формуле $\chi(b, y)$ теории T_1.

2) $\Rightarrow$ 1). Поскольку указанные в п. 2) условия сохраняют множество меток алгебры $\mathfrak{A}_1$, а при обогащении теории сохраняется выводимость формул, то по определению алгебры бинарных изолирующих формул получаем $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$. □

В условиях предложения 1 алгебра $\mathfrak{A}_1$ называется *подалгеброй* алгебры $\mathfrak{A}_2$ и обозначается $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2$, если $\mathfrak{A}_1$ совпадает с ограничением алгебры $\mathfrak{A}_2$ на множество меток для теории T_1.

Предложение 2. *В условиях предложения 1 выполняется $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2$ тогда и только тогда, когда каждый 1-тип p теории T_1 с ненулевыми метками из $\cup\{\nu(p, q) \cup \nu(q, p) \mid q \in S^1(T_1)\}$ имеет единственное пополнение из $S^1(T_2)$ и каждая изолирующая формула $\varphi(a, y)$ теории T_1 является изолирующей формулой теории T_2.*

Доказательство. Если $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2$, то алгебра $\mathfrak{A}_2$ может иметь новые метки относительно алгебры $\mathfrak{A}_1$ и сохраняет старые. Это означает, что должны сохраняться ненулевые метки из $\cup\{\nu(p, q) \cup \nu(q, p) \mid q \in S^1(T_1)\}$ с единственностью T_2-пополнений таких 1-типов p, а также метки для изолирующих формул $\varphi(a, y)$ теории T_1 при T_2-обогащении. □

Замечание 1. Поскольку при обеднении T_1 теории T_2 до сигнатуры, содержащей все сигнатурные символы изолирующей формулы $\varphi(a, y)$, эта формула является изолирующей и для теории T_1 (возможно с увеличением множества реализаций типа $\mathrm{tp}(a)$ для данной модели теории T_2), наряду с подалгебрами, то будем говорить о *естественном ограничении* алгебры $\mathfrak{A}_2$ до алгебры $\mathfrak{A}_1$. При этом метки, в которых участвуют 1-типы теории T_2, преобразуются в метки, в которых участвуют их полные 1-подтипы, относящиеся к теории T_1.

2. Слабая ортогональность типов и алгебры распределений бинарных изолирующих формул

Пусть M — модель некоторой теории T, $A \subseteq B \subseteq M$, B — конечное множество, $p_1, p_2, \ldots, p_s \in S_1(A)$. Напомним, что семейство 1-типов $\{p_1, \ldots, p_s\}$ называется *слабо ортогональным* *над* B, если все s-кортежи $\langle a_1, \ldots, a_s\rangle \in p_1(M)\times\cdots\times p_s(M)$ имеют один и тот же тип над B. Слабо ортогональное семейство S над $\emptyset$ называется просто *слабо ортогональным*, а если, кроме того, S состоит из двух типов p и q, то типы p и q называются *слабо ортогональными* с записью $p \perp^w q$.

Предложение 3. *Для любых слабо ортогональных типов $p(x), q(y) \in S^1(\emptyset)$ и алгебры $\mathfrak{A}$ распределений бинарных изолирующих формул данной теории T справедливы следующие утверждения*:

1) *если p и q — главные типы, то множество $\nu(p,q)$ состоит из единственной метки и при $p \neq q$ эта метка является положительной, а при $p = q$ — нулевой*;

2) *если p — неглавный тип и q — главный тип, то $\nu(q,p) = \emptyset$ и $\nu(p,q)$ состоит из единственной метки*; *эта метка является отрицательной и соответствует множеству необращаемых главных дуг, переводящих реализации типа p в реализации типа q*;

3) *если p и q — неглавные типы, то $\nu(p,q)\cup\nu(q,p) = \emptyset$.*

Доказательство. 1) Пусть $p(x)$ и $q(y)$ — главные типы, изолируемые формулами $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ соответственно. Так как $p \perp^w q$, то формула $\chi(x,y) \rightleftharpoons \varphi(x)\wedge\psi(y)$ изолирует единственное пополнение типа $p(x)\cup q(y)$. Теперь, если $p \neq q$, то единственная метка, принадлежащая $\nu(p,q)$, кодирует класс эквивалентности формул, содержащий формулу $\chi(x,y)$. Эта метка является положительной, поскольку формулы $\chi(a,y)$ и $\chi(x,b)$ являются изолирующими при $\models p(a)$ и $\models q(b)$. Если $p = q$, то из единственности пополнения $r(x,y)$ типа $p(x)\cup q(y)$ следует, что $(x \approx y) \in r$, r имеет единственную реализацию и, следовательно, $\nu(p,p) = \{0\}$.

2) Пусть $p(x)$ — неглавный тип и $q(y)$ — главный тип, изолируемый формулой $\psi(y)$. Так как $p \perp^w q$, то формула $\chi(x,y) \rightleftharpoons (x\approx x)\wedge\psi(y)$ задает единственную метку для $\nu(p,q)$ и эта метка является отрицательной ([3], предложение 3.1.0.4). Согласно этому предложению $\nu(q,p) = \emptyset$.

3) Если p и q — неглавные типы, то $\nu(p,q)\cup\nu(q,p) = \emptyset$, поскольку в противном случае некоторая формула $\varphi(x,y)$, а также ее отрицание будут совместны с типом $p(x)\cup q(y)$, что противоречит условию $p \perp^w q$. □

Предложение 4. *Для любых слабо ортогональных типов $p(x), q(y) \in S^1(\emptyset)$ и алгебры $\mathfrak{A}$ распределений бинарных изолирующих формул данной теории T справедливы следующие утверждения*:

1) *если $u \in \nu(p,p)$ и $v \in \nu(p,q)$, то $u\cdot v = \{v\}$*;

2) *если $u \in \nu(p,q)$ и $v \in \nu(q,q)$, то $u\cdot v = \{u\}$*;

3) *если $u \in \nu(p,q)$ и $\nu(q,p) \neq \emptyset$, то $\nu(q,p) = \{u^{-1}\}$ и $u\cdot u^{-1} = \nu(p,p)$*;

4) *если $q(y) \perp^w r(z)$, $u \in \nu(p,q)$ и $v \in \nu(q,r)$, то $u\cdot v = \nu(p,r)$.*

Доказательство. В силу $p \perp^w q$, если $\theta_u(a,z)$ — формула с меткой u и $\theta_v(b,y)$ — формула с меткой v, где $\models p(a)$ и $\models \theta_u(a,b)$, то $\exists z(\theta_u(a,z)\wedge\theta_v(z,y))$ — изолирующая формула, влекущая тип q, что для п. 1) означает $u\cdot v = \{v\}$, а для п. 2) — $u\cdot v = \{u\}$.

3) Если $u \in \nu(p,q)$ и $\nu(q,p) \neq \emptyset$, то по предложению 3 типы $p(x)$ и $q(x)$ являются изолированными и конъюнкция $\chi(x,y)$ их главных формул $\varphi_p(x)$ и $\varphi_q(y)$ влечет единственное пополнение типа $p(x)\cup q(x)$. При этом формула $\chi(x,y)$ имеет метку u при переходе от p к q и имеет обратную метку u^{-1} при переходе от q к p. Произведение $u\cdot u^{-1}$ состоит из всех меток изолирующих формул, связывающих реализации типа p, т. е. $u\cdot u^{-1} = \nu(p,p)$.

4) По условию метки u и v соответствуют некоторым формулам $\theta_u(x,y)$ и $\theta_v(y,z)$ таким, что в любой модели M теории T из $M \models p(a)$ вытекает $\theta_u(a,M) = q(M)$, а из $M \models q(b)$ следует $\theta_v(b,M) = r(M)$. Тогда для формулы $\chi(x,z) \rightleftharpoons \exists y(\theta_u(x,y)\wedge\theta_v(y,z))$ выполняется $\chi(a,M) = r(M)$. Отсюда следует, что формула $\theta_w(a,z)$ с произвольной меткой $w \in \nu(p,r)$ влечет формулу $\chi(a,z)$. Тем самым $u\cdot v = \nu(p,r)$. □

Пусть $p(x) \in S^1(\emptyset)$ — тип с единственной реализацией в любой модели данной теории, например, тип, содержащий формулу $(x \approx c)$, где c — сигнатурный константный символ. Тогда тип $p(x)$ слабо ортогонален любому полному 1-типу данной теории T. Применяя предложения 3 и 4, получаем

Следствие 1. Для любого типа $p(x) \in S^1(\emptyset)$ с единственной реализацией в любой модели данной теории T, любых типов $q(y), r(z) \in S^1(\emptyset)$ и алгебры $\mathfrak{A}$ распределений бинарных изолирующих формул теории T справедливы шесть утверждений:

1) если q — главный тип, то множество $\nu(p,q)$ состоит из единственной метки и при $p \neq q$ эта метка является положительной, а при $p = q$ — нулевой;

2) если q — неглавный тип, то $\nu(p,q) = \emptyset$ и $\nu(q,p)$ состоит из единственной метки, которая является отрицательной и соответствует множеству необращаемых главных дуг, переводящих реализации типа q в реализацию типа p;

3) если $u \in \nu(p,p)$ и $v \in \nu(p,q)$, то $u = 0$ и $u \cdot v = \{v\}$;

4) если $u \in \nu(p,q)$ и $v \in \nu(q,q)$, то $u \cdot v = \{u\}$;

5) если $u \in \nu(p,q)$, то $\nu(q,p) = \{u^{-1}\}$, $u \cdot u^{-1} = \{0\}$ и $u^{-1} \cdot u = \nu(q,q)$;

6) если $u \in \nu(q,p)$ и $v \in \nu(p,r)$, то $u \cdot v = \nu(q,r)$.

Непосредственно из предложения 4 вытекает

Следствие 2. Для любого семейства $S = \{S_i \mid i \in I\}$ такого, что каждое множество S_i состоит из полных 1-типов теории T и $p_i \perp^w p_j$ при $p_i \in S_i$, $p_j \in S_j$, $i \neq j$, алгебра $\mathfrak{A}_{\cup S}$ распределений бинарных изолирующих формул, связывающих реализации типов из $\cup S$, задается своими ограничениями $\mathfrak{A}_{S_i}$ на множества S_i, $i \in I$, а также соотношениями $u_{ij} \cdot u_{jk} = \nu(p_i, p_k)$ при $u_{ij} \in \nu(p_i, p_j)$, $u_{jk} \in \nu(p_j, p_k)$, $p_i \in S_i$, $p_j \in S_j$, $p_k \in S_k$, где $i \neq j$ или $j \neq k$, $|\nu(p_i, p_k)| = 1$ при $i \neq k$.

В условиях следствия 2 будем говорить, что алгебры $\mathfrak{A}_{S_i}$ образуют *слабо ортогональное семейство*, а алгебра $\mathfrak{A}_S$ называется *соединением* этого семейства. В случае $S_i = \{p_i\}$ алгебра $\mathfrak{A}_{S_i}$ обозначается через $\mathfrak{A}_{p_i}$.

3. Теории абелевых групп

Пусть A — абелева группа, тогда через kA обозначается ее подгруппа $\{ka \mid a \in A\}$, через $A[k]$ — подгруппа $\{a \in A \mid ka = 0\}$. Если p — простое число и $pA = \{0\}$, то через $\dim A$ обозначается размерность группы A, рассматриваемой как векторное пространство над полем из p элементов. Следующие числа для произвольных p и n (p простое, n натуральное) называются инвариантами Шмелевой для группы A [10]:

$$\alpha_{p,n}(A) = \min\{\dim((p^n A)[p]/(p^{n+1}A)[p]), \omega\},$$
$$\beta_p(A) = \min\{\inf\{\dim((p^n A)[p]) \mid n \in \omega\}, \omega\},$$
$$\gamma_p(A) = \min\{\inf\{\dim((A/A[p^n])/p(A/A[p^n])) \mid n \in \omega\}, \omega\},$$
$$\varepsilon(A) \in \{0,1\} \ \text{ и } \ \varepsilon(A) = 0 \Leftrightarrow (nA = \{0\} \ \text{ для некоторого } \ n \in \omega, \ \ n \neq 0).$$

Известно ([10], теорема 8.4.10), что две абелевы группы элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда их соответствующие инварианты Шмелевой совпадают. Кроме того, справедливо

Предложение 5 ([10], предложение 8.4.12). *Пусть для каждого p и n даны кардиналы $\alpha_{p,n}$, β_p, $\gamma_p \leq \omega$ и $\varepsilon \in \{0,1\}$. Для того чтобы существовала абелева группа A, для которой инварианты Шмелевой $\alpha_{p,n}(A)$, $\beta_p(A)$, $\gamma_p(A)$ и $\varepsilon(A)$ совпадали соответственно с $\alpha_{p,n}$, β_p, γ_p и ε, необходимо и достаточно выполнения следующих условий*:

1) *если для простого p множество $\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}$ бесконечно, то $\beta_p = \gamma_p = \omega$;*

2) *если $\varepsilon = 0$, то для любого простого p выполнены равенства $\beta_p = \gamma_p = 0$ и множество $\{\langle p,n\rangle \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}$ конечно.*

Через $\mathbf{Q}$ будем обозначать аддитивную группу рациональных чисел, $\mathbf{Z}_{p^n}$ — циклическую группу порядка p^n, $\mathbf{Z}_{p^\infty}$ — квазициклическую группу всех комплексных корней из 1 степени p^n для всех $n \geq 1$, R_p — группу несократимых дробей со взаимно простым с p знаменателем. Группы $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}_{p^n}$, R_p, $\mathbf{Z}_{p^\infty}$ называются *базисными*. В дальнейшем обозначения для указанных групп будут также отождествляться с их носителями.

Из совпадения теорий абелевых групп, имеющих одинаковые инварианты Шмелевой, вытекает, что любая абелева группа A элементарно эквивалентна группе

$$\oplus_{p,n}\mathbf{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})} \oplus \oplus_p \mathbf{Z}_{p^\infty}^{(\beta_p)} \oplus \oplus_p R_p^{(\gamma_p)} \oplus \mathbf{Q}^{(\varepsilon)},$$

где $B^{(k)}$ означает прямую сумму k подгрупп, изоморфных группе B. Таким образом, теория любой абелевой группы имеет в качестве своей модели некоторую прямую сумму базисных групп.

4. Алгебры распределений бинарных изолирующих формул теории аддитивной группы рациональных чисел и ее упорядоченного обогащения

В этом разделе описывается алгебра распределений бинарных изолирующих формул [1], [3] теории аддитивной группы рациональных чисел, а также ее упорядоченного обогащения. При описании алгебр будем опираться на описание алгебр для слабо o-минимальных счетно категоричных теорий, полученное в работе [9].

Обозначим через T теорию $\mathrm{Th}(\langle \mathbf{Q}; +, 0\rangle)$ аддитивной группы рациональных чисел.

Напомним ([10], лемма 8.4.5), что любая полная теория абелевой группы базируется множеством позитивно примитивных формул, сводящимся к множеству формул вида

$$\exists y(m_1x_1 + \cdots + m_nx_n \approx p^k y), \tag{1}$$

$$m_1x_1 + \cdots + m_nx_n \approx 0, \tag{2}$$

где $m_i \in \mathbf{Z}$, $k \in \omega$, p — простое число ([10], лемма 8.4.7). Поскольку для теории любой делимой группы формулы вида (1) эквивалентны тождественно истинным формулам, любая бинарная изолирующая формула теории T представляется как

$$y \approx rx, \quad r \in \mathbf{Q}. \tag{3}$$

Рассмотрим единственный неалгебраический 1-тип $p(x)$. Очевидно, что этот тип изолируется формулой $\neg(x \approx 0)$. Для каждой формулы $y \approx rx$, связывающей реализации типа $p(x)$, введем метку u_r, $r \neq 0$. Очевидно, что в алгебре $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ имеют место соотношения $u_{r_1} \cdot u_{r_2} = \{u_{r_1r_2}\}$, $r_1, r_2 \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$, $u_r^{-1} = u_{r^{-1}}$, $r \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$. Следовательно, алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ детерминирована, и порождающая ее алгебра $\mathfrak{P}'_{\nu(p)}$ изоморфна мультипликативной группе $\mathbf{Q}^* = \langle \mathbf{Q} \setminus \{0\}; \cdot\rangle$.

Обозначим через u_{00} метку для формулы $(x \approx 0 \wedge y \approx 0)$, через u_{01} — метку для формулы $(x \approx 0 \wedge \neg y \approx 0)$, а через u_{10} — метку для формулы $(\neg x \approx 0 \wedge y \approx 0)$.

Имеет место табл. 1, определяющая перемножение указанных меток друг с другом, а также с метками u_r, $u_{r'}$ $r' \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$, и опирающаяся на предложение 4 и следствие 1.

Таблица 1.

$\cdot$	u_{00}	u_{01}	u_{10}	$u_{r'}$
u_{00}	$\{u_{00}\}$	$\{u_{01}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
u_{01}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{u_{00}\}$	$\{u_{01}\}$
u_{10}	$\{u_{10}\}$	$\{u_r \mid r \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
u_r	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{u_{10}\}$	$\{u_{rr'}\}$

Вышеуказанные соотношения задают частичную алгебру на булеане множества введенных меток. Обозначим эту алгебру через $\mathfrak{Q}$.

Таким образом, получено описание алгебры бинарных изолирующих формул теории T и справедлива

Теорема 1. *Алгебра бинарных изолирующих формул теории* $\mathrm{Th}(\langle \mathbf{Q}; +, 0\rangle)$ *изоморфна алгебре* $\mathfrak{Q}$.

Замечание 2. Результат теоремы 1 основан на том, что $\mathrm{Aut}\mathbf{Q} \simeq \mathbf{Q}^*$ ([11], с. 61).

Для теории $\mathrm{Th}(\langle \mathbf{Q}; <, +, 0\rangle)$ упорядоченной группы рациональных чисел тип $p(x)$ имеет два пополнения $p_-(x)$ и $p_+(x)$ формулами $x < 0$ и $x > 0$ соответственно. Вместо метки u_{01} будем рассматривать метки u_{01}^- и u_{01}^+ для формул $(x \approx 0 \wedge y < 0)$ и $(x \approx 0 \wedge y > 0)$ соответственно, а вместо метки u_{10} будем рассматривать метки u_{10}^- и u_{10}^+ для формул $(y \approx 0 \wedge x < 0)$ и $(y \approx 0 \wedge x > 0)$ соответственно.

Заметим, что элиминация кванторов для полных упорядоченных абелевых групп была доказана А. Робинсоном в [14]. Основываясь на данном результате, в [15] было установлено, что полные упорядоченные абелевы группы являются o-минимальными.

Имеет место табл. 2, определяющая перемножение указанных меток друг с другом, а также с метками u_{00}, u_{r^-}, $u_{r'^-}$, u_{r^+}, $u_{r'^+}$, где $r^-, r'^- < 0$, $r^+, r'^+ > 0$, и опирающаяся на предложение 4 и следствие 1.

Таблица 2

$\cdot$	u_{00}	u_{01}^-	u_{01}^+	u_{10}^-	u_{10}^+	$u_{r'^-}$	$u_{r'^+}$
u_{00}	$\{u_{00}\}$	$\{u_{01}^-\}$	$\{u_{01}^-\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
u_{01}^-	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{u_{00}\}$	$\{u_{00}\}$	$\{u_{01}^+\}$	$\{u_{01}^-\}$
u_{01}^+	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{u_{00}\}$	$\{u_{00}\}$	$\{u_{01}^-\}$	$\{u_{01}^+\}$
u_{10}^-	$\{u_{10}\}$	$\{u_r \mid r > 0\}$	$\{u_r \mid r < 0\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
u_{10}^+	$\{u_{10}\}$	$\{u_r \mid r < 0\}$	$\{u_r \mid r > 0\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
u_{r^-}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$ при $x < 0$, $\{u_{10}^+\}$ при $x > 0$	$\{u_{10}^-\}$ при $x < 0$, $\emptyset$ при $x > 0$	$\{u_{r^- - r'^-}\}$	$\{u_{r^- - r'^+}\}$
u_{r^+}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{u_{10}^-\}$ при $x < 0$, $\emptyset$ при $x > 0$	$\emptyset$ при $x < 0$, $\{u_{10}^+\}$ при $x > 0$	$\{u_{r^+ + r'^-}\}$	$\{u_{r^+ + r'^+}\}$

Вышеуказанные соотношения задают частичную алгебру на булеане множества введенных меток. Обозначим эту алгебру через $\mathfrak{Q}^<$.

Таким образом, получено описание алгебры бинарных изолирующих формул теории упорядоченной группы рациональных чисел и справедлива обобщающая теорему 1

Теорема 2. *Алгебра бинарных изолирующих формул теории* $\mathrm{Th}(\langle \mathbf{Q}; <, +, 0\rangle)$ *изоморфна алгебре* $\mathfrak{Q}^<$.

Отметим, что алгебра $\mathfrak{Q}$ не является подалгеброй алгебры $\mathfrak{Q}^<$ в силу приведенного описания этих алгебр, а также в силу предложения 2.

5. Алгебры распределений бинарных изолирующих формул теорий циклических и квазициклических групп, а также их циклически упорядоченных обогащений

В этом разделе опишем алгебры $\mathfrak{Z}_{p^n}$ распределений бинарных изолирующих формул для теорий циклических групп $\mathbf{Z}_{p^n}$, где p — простое число, а также алгебры для квазициклических групп $\mathbf{Z}_{p^\infty}$.

Известно ([11], с. 61), что $\mathrm{Aut}\,\mathbf{Z}_m \simeq \mathbf{Z}_m^*$, где $|\mathbf{Z}_m^*| = \varphi(m)$, φ — функция Эйлера, т. е. $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ при взаимно простых m, n и $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ при простом p.

Множество 1-типов теории $\mathrm{Th}(\mathbf{Z}_{p^n})$ состоит из типов $q_0(x), q_1(x), \ldots, q_n(x)$, где $q_0(x)$ изолируется формулой $\psi_0(x) \rightleftharpoons (x \approx 0)$, $q_j(x)$ — формулой $\psi_j(x) \rightleftharpoons (p^j x \approx 0 \wedge \neg p^{j-1} x \approx 0)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Обозначим через u_{ij} метку, связывающую тип q_i с q_j, где u_{ij} соответствует формуле $\psi_i(x)\wedge\psi_j(y)$, если $i=0$ или $j=0$, и u_{ij} соответствует формуле $\psi_i(x)\wedge(p^{i-j}x\approx y)$ при $i\neq 0$ и $j\neq 0$. Кроме того, введем метки $v_{i,r,k}$, которые соответствуют формулам $\psi_i(x)\wedge(kp^{-r}x\approx y)$, $0\leq r\leq n-i$, $0<k<p^{i+r}$. При этом естественно будем считать, что $v_{i,0,p^{i-j}}=u_{ij}$ и $v_{i,r,k}=v_{i,r-1,k/p}$ при $r>0$ и $p\,|\,k$. Отметим также, что метки вида $v_{i,r,k}$ определяют формулы с единственными решениями и наряду с метками u_{i0} влекут метки для формул вида (1).

Таким образом, для описания алгебры бинарных изолирующих формул достаточно составить таблицу умножения для меток u_{00}, u_{i0}, u_{0j}, $v_{i,r,k}$, $i,j\in\{1,\ldots,n\}$, $r\in\{0,\ldots,n-i\}$, $k\in\{1,\ldots,p^{i+r}-1\}$. С этой целью обозначим через $O(i,j)$ *орбиту переходов* от типа q_i к типу q_j, $i,j>0$, состоящую из меток v_{i,j,kp^i} формул $(kp^{i-j}x\approx y)$, где k не делится на p. Кроме того, для метки $v_{i,r,k}$ через $D_p(i,r,k)$ обозначим значение $l-i-r$, где l — показатель степени числа p в разложении числа k на простые сомножители.

Нетрудно заметить, что орбита переходов $O(i,j)$ определяет всевозможные переходы от реализаций типа $q_i(x)$ к реализациям типа $q_j(y)$ формулами вида (3), а значение $l=D_p(i,r,k)$ указывает на переход от типа q_i к типу q_l по формулам с меткой $v_{i,r,k}$.

Таблица 3 умножения для алгебры $\mathfrak{Z}_{p^n}$ выглядит следующим образом, где $i,i',j,j'>0$, k не делится на p^i и k' не делится на $p^{i'}$.

Таблица 3.

$\cdot$	u_{00}	$u_{0j'}$	$u_{i'0}$	$v_{i',r',k'}$
u_{00}	$\{u_{00}\}$	$\{u_{0j'}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
u_{0j}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$ при $i'\neq j$, $\{u_{00}\}$ при $i'=j$	$\emptyset$ при $i'\neq j$, $\{u_{0s}\}$ при $i'=j$ и $s=D_p(i',r',k')$
u_{i0}	$\{u_{i0}\}$	$O(i,j')$	$\emptyset$	$\emptyset$
$v_{i,r,k}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$ при $D_p(i,r,k)\neq i'$, $\{u_{i0}\}$ при $D_p(i,r,k)=i'$	$\emptyset$ при $D_p(i,r,k)\neq i'$, $\{v_{i,r+r',kk'(\mathrm{mod}\,p^n)}\}$ при $D_p(i,r,k)=i'$

На основании построения алгебры $\mathfrak{Z}_{p^n}$ справедлива

Теорема 3. *Алгебра бинарных изолирующих формул теории* $\mathrm{Th}(\mathbf{Z}_{p^n})$ *изоморфна алгебре* $\mathfrak{Z}_{p^n}$.

Нетрудно понять, что алгебры $\mathfrak{Z}_{p^n}$ образуют возрастающую цепь при $n\geq 1$. Объединение этой цепи обозначим через $\mathfrak{Z}^0_{p^\infty}$. Полученная алгебра является алгеброй распределений бинарных изолирующих формул для семейства изолированных 1-типов теории $\mathrm{Th}(\mathbf{Z}_{p^\infty})$ квазициклической группы. Как известно [10], единственный неглавный 1-тип $q_\infty(x)$ этой теории реализуется $\mathbf{Q}$-расширениями группы $\mathbf{Z}_{p^\infty}$ в виде прямых слагаемых. При этом переходы изолирующими формулами на множестве реализаций типа $q_\infty(x)$ могут осуществляться только формулами с метками v_r, образуя подалгебру $\mathfrak{Q}^*$ алгебры $\mathfrak{Q}$, а переходы изолирующими формулами, связывающими тип $q_\infty(x)$ с остальными 1-типами, — только необращаемыми дугами от типа $q_\infty(x)$ к изолированным типам $q_i(x)$ посредством формул $(x\approx x)\wedge\psi_i(y)$ с отрицательными метками $u_{\infty,i}$ и со следующими правилами умножения: 1) $u_r\cdot u_{\infty,i}=\{u_{\infty,i}\}$; 2) $u_{\infty,i}\cdot u_{i,r,k}=\{u_{\infty,k}\}$.

Тем самым, комбинируя алгебру $\mathfrak{Z}^0_{p^\infty}$ с $\mathfrak{Q}^*$, получаем алгебру $\mathfrak{Z}_{p^\infty}$ бинарных изолирующих формул теории $\mathrm{Th}(\mathbf{Z}_{p^\infty})$, для которой справедлива

Теорема 4. *Алгебра бинарных изолирующих формул теории* $\mathrm{Th}(\mathbf{Z}_{p^\infty})$ *изоморфна* $\mathfrak{Z}_{p^\infty}$.

Замечание 3. Алгебры $\mathfrak{Z}_{p^n}$ и $\mathfrak{Z}_{p^\infty}$ не меняются, если снабдить структуры $\mathbf{Z}_{p^n}$ и $\mathbf{Z}_{p^\infty}$ соответственно естественными тернарными отношениями $\widehat{R}_{p^n}$ и $\widehat{R}_{p^\infty}$ циклических порядков, согласованными с поворотами на окружности. Эта инвариантность алгебр $\mathfrak{Z}_{p^n}$ и $\mathfrak{Z}_{p^\infty}$ выполняется по предложению 1 в силу того, что введение отношений $\widehat{R}_{p^n}$ и $\widehat{R}_{p^\infty}$ не увеличивает множества формульно определимых унарных и бинарных отношений.

6. Алгебры распределений бинарных изолирующих формул теорий групп R_p и их упорядоченных обогащений

В этом разделе опишем алгебры $\mathfrak{R}_p$ распределений бинарных изолирующих формул для теорий групп R_p, представляемых в виде подгруппы группы $\mathbf{Q}$, состоящей из несократимых дробей с взаимно простыми с p знаменателями, где p — некоторое простое число.

В силу базируемости теории $\mathrm{Th}(R_p)$ формулами вида (1) и (2) главные 1-типы изолируются формулами $(x \approx 0)$, $\exists y(x \approx p^{i-1}y) \wedge \neg\exists z(x \approx p^i y)$, $i \geq 1$. Обозначим соответствующие типы через $q_0(x)$, $q_i(x)$, а их изолирующие формулы через $\psi_0(x)$, $\psi_i(x)$, $i \in \omega \setminus \{0\}$. Также имеется единственный неглавный тип $q_\infty(x)$, все реализации которого помимо делимости на все степени простых чисел $p' \neq p$ делятся на все степени числа p, т.е. вместе с нулем образуют делимую группу без кручения. Таким образом, согласно теореме 1 алгебра распределений бинарных изолирующих формул для $q_0(x)$ и $q_\infty(x)$ изоморфна алгебре $\mathfrak{Q}^<$.

Связи между типами q_i, $i \in \omega \setminus \{0\}$, обеспечиваются формулами вида $(y \approx rx)$, $r \neq 0$. При этом для несократимых дробей $r = r_1/r_2$ осуществляется переход от типа $q_i(x)$ к типу $q_j(y)$, если r удовлетворяет следующим условиям:

1) r_1 и r_2 не делятся на p при $i = j$;
2) r_1 делится на максимальную степень p^{j-i} при $i < j$;
3) r_2 делится на максимальную степень p^{i-j} при $i > j$.

Обозначим через $\mathbf{Q}^*_{\overline{p}}$ мультипликативную группу, состоящую из ненулевых несократимых дробей $r = r_1/r_2$, где r_1 и r_2 не делятся на p. Известно [12], [13], что эта группа изоморфна свободной абелевой группе счетного ранга, т.е. прямому произведению счетного числа групп $\mathbf{Z}$, где каждый прямой сомножитель отвечает за сложение и вычитание степеней соответствующего ему простого числа $p' \neq p$. Следовательно, группа $\mathbf{Q}^*_{\overline{p}}$ изоморфна мультипликативной группе $\mathbf{Q}^*$.

Согласно 1) на множестве реализаций типа $q_i(x)$ формулы вида $(y \approx rx)$, где $r \neq 0$, r_1 и r_2 не делятся на p, образуют детерминированную алгебру, задаваемую группой $\mathbf{Q}^*_{\overline{p}}$, а согласно 2) и 3) при последовательном переходе от типа $q_i(x)$ к типу $q_j(y)$ формулой $(y \approx rx)$, а затем от типа $q_j(y)$ к типу $q_s(z)$ формулой $(z \approx r'y)$ результирующий переход от типа $q_i(x)$ к типу $q_s(z)$ осуществляется формулой $(z \approx rr'x)$.

Таким образом, мультипликативная группа $\mathbf{Q}^*$ связывает типы $q_i(x)$, $i \in \omega \setminus \{0\}$, а ее подгруппа $\mathbf{Q}^*_{\overline{p}}$ (изоморфная $\mathbf{Q}^*$) связывает реализации каждого фиксированного типа $q_i(x)$. При этом формулы вида $(y \approx rx)$, $r \neq 0$, не позволяют перейти от типа $q_\infty(x)$ к типам $q_i(x)$, $i \neq \infty$, или обратно, т.е. группа $\mathbf{Q}^*$ действует независимо для $q_\infty(x)$ и для множества $\mathbf{q}_{\mathrm{fin}} = \{q_i \mid i \neq \infty\}$.

Отметим, что бинарные формулы вида (1), т.е. формулы

$$\exists z(mx + ny \approx p^k z), \tag{4}$$

$m, n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, $k \in \omega$, также связывают типы из множества $\mathbf{q}_{\mathrm{fin}}$. Покажем, что для описания алгебр бинарных изолирующих формул формулы вида (4) можно не рассматривать.

Действительно, достаточно установить, что формулы вида (4) при $m \neq 0$ и $n \neq 0$ не могут задавать новых, с точностью до эквивалентности, изолирующих бинарных формул относительно описанных выше. Если $\models \exists z(ma + nb \approx p^k z)$, где $ma + nb \neq 0$, $\models q_{s_1}(a)$, $\models q_{s_2}(b)$, $m = p^{t_1}m'$, $n = p^{t_2}n'$, $(m', p) = (n', p) = 1$, то $\models q_{s_1+t_1}(ma)$, $\models q_{s_2+t_2}(nb)$ и $\models q_l(ma+$

nb), где $l = \min\{s_1+t_1, s_2+t_2\} \geq k$. Если $ma+nb = 0$, то приходим к соотношению $b = -\frac{m}{n}a$, задаваемому формулой вида (3). Из указанных соотношений вытекает, что формула (4) связывает все реализации типа q_{s_1} со всеми реализациями типа q_{s_2} и, значит, формула (4) и вместе с ней формула $\exists z(mx+ny \approx p^k z) \wedge \psi_{s_1}(x) \wedge \psi_{s_2}(y)$ являются логическим следствием бесконечного числа формул вида (3). Отсюда следует, что никакая формула вида (4), взятая конъюнктивно с главными формулами типов q_i, а также с отрицаниями формул вида (3), не является изолирующей. Следовательно, с учетом базируемости формулами вида (1) и (2), новых, с точностью до эквивалентности, изолирующих бинарных формул в теории $\mathrm{Th}(R_p)$ не возникает.

Таким образом, алгебра $\mathfrak{R}_p$ строится на основе двух копий $\mathbf{Q}_1^*$ и $\mathbf{Q}_2^*$ мультипликативной группы $\mathbf{Q}^*$, первая из которых вместе с метками u_{0i} и u_{i0}, $i \in \omega$, тиражированием таблицы умножения для алгебры $\mathfrak{Q}$ (с заменой u_{01} и u_{10} на u_{0i} и u_{i0} соответственно) обеспечивает связи между типами из $\mathbf{q}_{\mathrm{fin}}$, а вторая группа позволяет связывать реализации типа $q_\infty(x)$. Для завершения построения алгебры $\mathfrak{R}_p$ вводятся отрицательные метки $u_{\infty,i}$ для формул $(x \approx x) \wedge \psi_i(y)$, где $\psi_i(y)$ — изолирующая формула типа $q_i(y)$, $i \in \omega$, со следующими правилами умножения:

1) $u_{\infty,\infty} \cdot u_{\infty,i} = \{u_{\infty,i}\}$, где $u_{\infty,\infty}$ — произвольная метка для изолирующей формулы по элементу из $\mathbf{Q}_2^*$;

2) $u_{\infty,i} \cdot u_{i,j} = \{u_{\infty,j}\}$, где $u_{i,j}$ — произвольная метка для изолирующей формулы по элементу из $\mathbf{Q}_1^*$, связывающему тип q_i с типом q_j.

Приведенные выше рассуждения позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема 5. *Алгебра бинарных изолирующих формул теории* $\mathrm{Th}(R_p)$ *изоморфна* $\mathfrak{R}_p$.

Обогатим группу R_p естественным отношением $<$. Теория $T = \mathrm{Th}(\langle R_p; <\rangle)$ полученной структуры имеет множество 1-типов, которые получаются однозначным пополнением типа $q_0(x)$, а также типов $q_i(x) \cup \{x < 0\}$, $q_i(x) \cup \{0 < x\}$, $i \in \omega \cup \{\infty\}$. Пополнению типа $q_0(x)$ присвоим то же самое имя, а пополнениям типов $q_i(x) \cup \{x < 0\}$ и $q_i(x) \cup \{0 < x\}$ — имена $q_i^-(x)$ и $q_i^+(x)$ соответственно.

Таким образом, список полных 1-типов теории T исчерпывается множеством $\{q_0\} \cup \cup \{\{q_i^-, q_i^+\} \mid i \in \omega \setminus \{0\} \cup \{\infty\}\}$, где неглавными являются лишь типы q_∞^-, q_∞^+. При этом типы q_i^- (как и типы q_i^+) перемежаются друг с другом: между любыми двумя различными реализациями типа q_i^- найдутся реализации произвольного типа q_j^-.

Как и типы q_i, метки, введенные выше для алгебры $\mathfrak{R}_p$, также раздваиваются. При этом при переходе от типа q_i к типу q_j под действием меток для формул $(rx \approx y)$ сохраняется знак плюс или минус для пополнений этих типов, если $r > 0$, и меняется знак на противоположный, если $r < 0$. Кроме того, метки $u_{\infty,\infty}$, $u_{\infty,i}$ и $u_{i,j}$ приобретают знаки как исходных типов (по первой координате), так и результирующих типов (по второй координате) с условиями $u_{\infty,\infty}^{\alpha,\beta} \cdot u_{\infty,i}^{\beta,\gamma} = \{u_{\infty,i}^{\alpha,\gamma}\}$ и $u_{\infty,i}^{\alpha,\beta} \cdot u_{i,j}^{\beta,\gamma} = \{u_{\infty,j}^{\alpha,\gamma}\}$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \{-, +\}$.

Таким образом, определяется алгебра $\mathfrak{R}_p^<$, относящаяся к теории T, и справедлива

Теорема 6. *Алгебра бинарных изолирующих формул теории* $\mathrm{Th}(\langle R_p; <\rangle)$ *изоморфна* $\mathfrak{R}_p^<$.

7. Об алгебрах распределений бинарных изолирующих формул теорий абелевых групп

В этом разделе на основе определенных выше алгебр опишем схемы построения алгебр распределений бинарных изолирующих формул для теорий прямых сумм базисных абелевых групп. Поскольку этими теориями исчерпываются все теории абелевых групп, нижеследующие схемы позволяют описать все алгебры распределений бинарных изолирующих формул для теорий абелевых групп.

Замечание 4. Поскольку все прямые суммы $\mathbf{Q}'$ группы $\mathbf{Q}$ элементарно эквивалентны, то алгебры распределений бинарных изолирующих формул для (единой) теории $\mathrm{Th}(\mathbf{Q}')$ попарно изоморфны и тем самым изоморфны алгебре $\mathfrak{Q}$.

Теперь заметим, что при взятии прямых сумм базисных абелевых групп, помимо описанных выше 1-типов, могут возникать новые 1-типы, соответствующие прямым суммам элементов этих базисных групп.

Например, группа $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_3$, будучи изоморфной группе $\mathbf{Z}_6$, помимо элементов порядка 2 и 3, имеет два элемента порядка 6. Таким образом, дополнительно к типам $q_0(x)$, $q_2(x)$, $q_3(x)$, задаваемым формулами $(x \approx 0)$, $(2x \approx 0) \wedge \neg(x \approx 0)$, $(3x \approx 0) \wedge \neg(x \approx 0)$ соответственно, возникает тип $q_6(x)$, задаваемый формулой $(6x \approx 0) \wedge \neg(x \approx 0) \wedge \neg(2x \approx 0) \wedge \neg(3x \approx 0)$. При этом изолирующие формулы $(y \approx 2x)$ и $(y \approx 3x)$ связывают тип $q_6(x)$ с типами $q_3(y)$ и $q_2(y)$ соответственно, где $q_2 \perp^w q_3$.

В общем случае для прямых сумм групп $\mathfrak{Z}_{p^n}$ возможны следующие случаи и их подслучаи, задающие алгебру $\mathfrak{A}$ изолирующих формул теории T.

I. Прямых слагаемых больше одного и это число конечно.

A) Все прямые слагаемые изоморфны. Тогда формулы $\varphi(a,y) \wedge \psi_j(y)$, где $\models q_i(a)$, q_i — типы из раздела 5, $i \in \{1,\ldots,n\}$, $\varphi(x,y)$ — отрицание дизъюнкции изолирующих формул, задающей линейную зависимость элементов, являются изолирующими формулами с некоторыми метками w_{ij}, символизирующими переход от элементов a к линейно независимым с ними реализациям типов $q_j(y)$. При этом перемножение с участием новых меток подчиняется следующим правилам:

a) множество $w_{ij}w_{jk}$ состоит из метки w_{ik}, а также из всех меток алгебры $\mathfrak{Z}_{p^n}$, переводящих реализации типа q_i в реализации типа q_k (аналогично [8] для подстановок с большим двух числом компонент связности, поскольку имеются по крайней мере три попарно линейно независимые реализации типа q_k);

b) если метка u_{jk} из $\mathfrak{Z}_{p^n}$ связывает реализации типа q_j с реализациями типа q_k, то $w_{ij}u_{jk} = \{w_{ik}\}$, а $u_{jk}w_{kl} = \{w_{jl}\}$;

c) в остальных случаях, т. е. при несогласованности переходов по индексам 1-типов, произведения $w_{ij}w_{rs}$, $w_{ir}u_{jk}$, где $j \neq r$, $u_{jk}w_{st}$, где $k \neq s$, пусты.

Полученные алгебры $\mathfrak{A}$, зависящие от порядков p^n, обозначим через $\mathfrak{Z}'_{p^n}$.

B) Имеются неизоморфные прямые слагаемые, но все они относятся к одному и тому же простому числу p. Тогда ненулевые элементы неизоморфных прямых слагаемых имеют разные типы, учитывающие порядки этих прямых слагаемых, и число пополнений q_i^l каждого типа q_i, $i > 0$, совпадает с числом типов изоморфизма прямых слагаемых $\mathfrak{Z}_{p^n}$, где $i \leq n$. Порядки ненулевых элементов рассматриваемой прямой суммы имеют вид p^k, где k пробегает значения от 1 до наивысшего порядка прямых слагаемых. Типы q_i^l и $q_j^{l'}$ слабо ортогональны при $l \neq l'$. Алгебра $\mathfrak{A}$ получается из алгебры, описанной в п. A), заменой меток w_{ij} на множества меток $w_{ij}^{ll'}$, связывающих типы q_i^l и $q_j^{l'}$ формулами, описывающими линейную независимость.

В искомой алгебре $\mathfrak{A}$ имеются ограничения вида $\mathfrak{Z}_{p^n}$ и (или) $\mathfrak{Z}'_{p^n}$. В зависимости от этих ограничений алгебру $\mathfrak{A}$ будем обозначать через $*_{p^n}\mathfrak{A}_{p^n}$, где $\mathfrak{A}_{p^n} = \mathfrak{Z}_{p^n}$ или $\mathfrak{A}_{p^n} = \mathfrak{Z}'_{p^n}$.

C) Имеются неизоморфные прямые слагаемые, относящиеся к различным простым числам p. Тогда при наличии групп $\mathbf{Z}_{p_1^{n_1}}, \ldots, \mathbf{Z}_{p_k^{n_k}}$ прямое произведение этих групп, помимо элементов с 1-типами q_i^l, содержит элементы порядков $p_{j_1}^{s_1} \ldots p_{j_t}^{s_t}$ для взаимно простых чисел p_{j_a} и $s_a \leq n_{j_a}$. Обозначим соответствующие типы через $\widehat{q}_{j_1\ldots j_t}^{s_1\ldots s_t}$. Связь между 1-типами, как и выше, осуществляется посредством меток u для формул $(y \approx rx)$, а также меток w для свойства линейной независимости. Алгебру $\mathfrak{A}$ будем обозначать снова через $*_{p^n}\mathfrak{A}_{p^n}$, считая при этом, что $\mathfrak{A}_{p^n} = \mathfrak{Z}_{p^n}$ или $\mathfrak{A}_{p^n} = \mathfrak{Z}'_{p^n}$, а p^n варьируется как по основанию, так и по показателю.

II. Число прямых слагаемых бесконечно. Тогда согласно предложению 5 возможны следующие случаи.

A) Для любого простого p множество $\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}$ конечно. Тогда $\varepsilon = 1$ и алгебра $\mathfrak{A}$, помимо ограничения $*_{p^n}\mathfrak{A}_{p^n}$, также имеет ограничение $\mathfrak{Q}$. Кроме того, прямые суммы $a + b$ ненулевых элементов a из $\oplus\mathbf{Z}_{p^n}$ с ненулевыми элементами b из $\mathbf{Q}$ имеют неглавные типы и, будучи элементами бесконечного порядка, могут делиться лишь на ограниченные степени чисел p. При этом, поскольку $\mathbf{Q}$ — делимая группа, делимость этих прямых сумм как и связь между типами посредством меток изолирующих формул, задается делимостью и действием меток, соответствующих меткам для теории $\mathrm{Th}(\oplus\mathbf{Z}_{p^n})$.

B) Для некоторого простого p множество $\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}$ бесконечно. Тогда в силу предложения 5 для каждого такого p имеет место $\beta_p = \gamma_p = \omega$ и $\varepsilon = 1$. Следовательно, алгебра $\mathfrak{A}$, помимо ограничения $*_{p^n}\mathfrak{A}_{p^n}$, из которого удалены метки w для неформульных отношений линейной независимости, а также ограничения $\mathfrak{Q}$, имеет ограничения вида $\mathfrak{Z}_{p^\infty}$ и $\mathfrak{R}_p$, из которых удалены метки для изолирующих формул, использующих изолированность 1-типов: эти 1-типы перестают быть изолированными, поскольку в моделях данной теории слагаемые вида $\mathbf{Z}_{p^\infty}$ и R_p могут опускаться. Сложением элементов из прямых слагаемых $\oplus\mathbf{Z}_{p^n}$, $\mathbf{Z}_{p^\infty}$, R_p и $\mathbf{Q}$ образуются элементы, определяющие новые, по отношению к этим слагаемым, 1-типы. Связи, задаваемые бинарными изолирующими формулами и определяющие алгебру $\mathfrak{A}$, как и ранее соответствуют бинарным формулам вида (3), (4), а также, в случае слабой ортогональности типов $p(x)$ и $q(y)$, формулам вида

$$(x \approx x) \wedge \varphi(y), \tag{5}$$

где $\varphi(y)$ — изолирующая формула типа $q(y)$.

В общем случае для теории абелевой группы (при условии $\beta_p \neq 0$ или $\gamma_p \neq 0$) отношение линейной (не)зависимости не является формульным и связи между типами посредством меток алгебры $\mathcal{A}$ также задаются формулами вида (3)–(5). При этом, если множество P простых чисел p с условием $\beta_p \neq 0$ или $\gamma_p \neq 0$ бесконечно, то аналогично [16], [17] образуется континуальное семейство 1-типов, задаваемых делимостью на какие-то произвольные фиксированные максимальные степени чисел из P.

Литература

[1] Shulepov I.V., Sudoplatov S.V. *Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory*, Siberian Elect. Math. Reports **11**, 380–407 (2014).

[2] Sudoplatov S.V. *Deterministic and absorbing algebras*, 9th Panhellenic Logic Symposium, July 15–18, 2013, National Techn. University of Athens (Greece, Athens, NTUA, 2013), 91–96.

[3] Sudoplatov S.V. *Классификация счетных моделей полных теорий.* Ч. 1 (Изд-во НГТУ, Новосибирск, 2014).

[4] Ovchinnikova E.V., Sudoplatov S.V. *Generations and quotients for algebras of distributions of binary formulas*, Lobachevskii J. Math. **36** (4), 403–406 (2015).

[5] Sudoplatov S.V. *Algebras of distributions for binary semi-isolating formulas for families of isolated types and for countably categorical theories*, International Math. Forum **9** (21), 1029–1033 (2014).

[6] Sudoplatov S.V. *Forcing of infinity and algebras of distributions of binary semi-isolating formulas for strongly minimal theories*, Math. and Stat. **2** (5), 183–187 (2014).

[7] Ovchinnikova E.V., Sudoplatov S.V. *Structures of distributions of isolating formulas as derivative structures*: *for acyclic graphs*, 9th Panhellenic Logic Symposium, July 15–18, 2013, National Techn. University of Athens (Greece, Athens, NTUA, 2013), 74–79.

[8] Емельянов Д.Ю. *Об алгебрах распределений бинарных формул теорий унаров*, Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. “Матем.” **17**, 23–36 (2016).

[9] Емельянов Д.Ю., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. *Алгебры распределений бинарных формул в счетно категоричных слабо о-минимальных структурах*, Алгебра и логика **56** (1), 13–36 (2017).

[10] Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. *Математическая логика* (Физматлит, М., 2011).

[11] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. *Основы теории групп* (Наука, М., 1982).

[12] Фукс Л. *Бесконечные абелевы группы.* Т. 1 (Мир, М., 1974).

[13] Фукс Л. *Бесконечные абелевы группы.* Т. 2 (Мир, М., 1977).

[14] Robinson A. *Complete theories* (North-Holland, Amsterdam, 1956).

[15] Pillay A., Steinhorn C. *Definable sets in ordered structures.* I, Trans. Amer. Math. Soc. **295** (2), 565–592 (1986).
[16] Baldwin J.T., Blass A., Glass A.M.W., Kueker D.W. *A "natural" theory without a prime model*, Algebra Universalis **3**, 152–155 (1973).
[17] Попков Р.А. *Распределение счетных моделей теории группы целых чисел*, Сиб. матем. журн. **56** (1), 185–191 (2015).

Кристина Андреевна Байкалова

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, д. 20, г. Новосибирск, 630073, Россия,

e-mail: bkristina@bk.ru

Дмитрий Юрьевич Емельянов

Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск, 630090, Россия,

e-mail: dima-pavlyk@mail.ru

Бейбут Шайыкович Кулпешов

Международный университет информационных технологий;
Институт математики и математического моделирования МОН РК,
ул. Манаса Жандосова, д. 34А/8А, г. Алматы, 050040, Республика Казахстан;
ул. Пушкина, д. 125, г. Алматы, 050010, Республика Казахстан,

e-mail: b.kulpeshov@iitu.kz

Евгений Андреевич Палютин

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН;
Новосибирский государственный университет;
Институт математики и математического моделирования МОН РК,
пр. Академика Коптюга, д. 4, г. Новосибирск, 630090, Россия;
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск, 630090, Россия;
ул. Пушкина, д. 125, г. Алматы, 050010, Республика Казахстан,

e-mail: palyutin@math.nsc.ru

Сергей Владимирович Судоплатов

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН;
Новосибирский государственный технический университет;
Новосибирский государственный университет;
Институт математики и математического моделирования МОН РК,
пр. Академика Коптюга, д. 4, г. Новосибирск, 630090, Россия;
пр. К. Маркса, д. 20, г. Новосибирск, 630073, Россия;
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск, 630090, Россия;
ул. Пушкина, д. 125, г. Алматы, 050010, Республика Казахстан,

e-mail: sudoplat@math.nsc.ru

K.A. Baikalova, D.Yu. Emel'yanov, B.Sh. Kulpeshov, E.A. Palyutin, and S.V. Sudoplatov

On algebras of distributions of isolating formulas of theory of abelian groups and their ordered enrichings

Abstract. We describe algebras of distributions of binary isolating formulas for theories of abelian groups and their ordered enriching. This description is based on general theory of algebras of isolating formulas and uses the specificity of basedness of theories of abelian groups which is based on Shmeleva's invariants. We give Cayley tables for algebras corresponding to theories of base abelian groups and their ordered enrichings, and point out a machinery of transformation of theories of base abelian groups into algebras for arbitrary theories of abelian groups.

Keywords: algebra of distributions of binary isolating formulas, abelian group, elementary theory, ordered enriching.

Kristina Andreeva Baikalova

Novosibirsk State Technical University,
20 K. Marks Ave., Novosibirsk, 630073 Russia,

`e-mail:` bkristina@bk.ru

Dmitrii Yur'evich Emel'yanov

Novosibirsk State University,
1 Pirogova str., Novosibirsk, 630090 Russia,

`e-mail:` dima-pavlyk@mail.ru

Beibut Shaiykovich Kulpeshov

International Information Technology University;
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling,
34A/8A, Manas Zhandosov str., Almaty, 050040 Republic of Kazakhstan;
125 Pushkin str., Almaty, 050010 Republic of Kazakhstan,

`e-mail:` b.kulpeshov@iitu.kz

Evgenii Andreevich Palyutin

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS;
Novosibirsk State University;
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling,
4 Academician Koptyug Ave., Novosibirsk, 630090 Russia;
1 Pirogova str., Novosibirsk, 630090 Russia;
125 Pushkin str., Almaty, 050010, Republic of Kazakhstan,

`e-mail:` palyutin@math.nsc.ru

Sergei Vladimirovich Sudoplatov

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS;
Novosibirsk State Technical University;
Novosibirsk State University;
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling,
4 Academician Koptyug Ave., Novosibirsk, 630090 Russia;
20 K. Marks Ave., Novosibirsk, 630073 Russia;
1 Pirogova str., Novosibirsk, 630090 Russia;
125 Pushkin str., Almaty, 050010 Republic of Kazakhstan

`e-mail:` sudoplat@math.nsc.ru