Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского

Казань, 3 апреля 2022 г.

5 класс

Вариант 4

1. Найдите хотя бы одно решение ребуса ТРОС+ТРОС+ТРОС=МОСТ.

Решение. Заметим, что ребус в условии равносилен ребусу ТРОС·3=МОСТ. В качестве решения подойдут значения Т=2, Р=7, О=1, С=4, М=8, тогда получим равенство $2714 \cdot 3 = 8142$.

2. Даны сосуды объёмами 13, 14 и 25 литров. Третий сосуд заполнили водой, а первые два остались пусты. Как с их помощью отмерить 8 литров воды, если выливать воду нельзя?

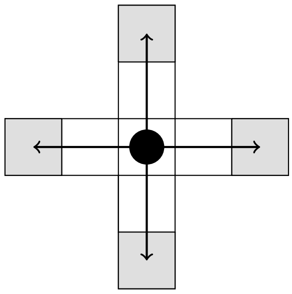
Решение. Отобразим необходимую последовательность действий с помощью таблицы, где в каждой строке указаны объёмы воды в сосудах после очередного переливания.

13 л	**14 л**	**25 л**
0	0	25
0	14	11
13	1	11
0	1	24
1	0	24
1	14	10
13	2	10
0	2	23
2	0	23
2	14	9
13	3	9
0	3	22
3	0	22
3	14	**8**

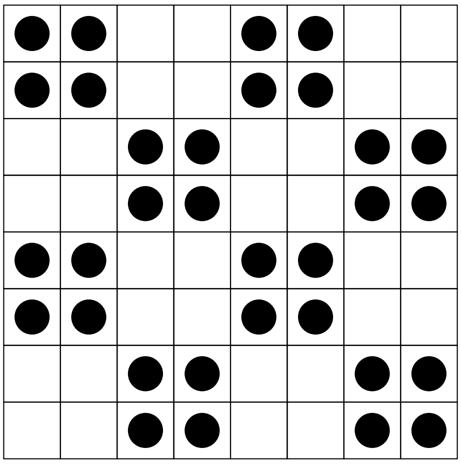
3. Вася сказал маме, что на минувшей неделе в школе он не получил ни одного кола и ни одной двойки. Сумма оценок, полученных Васей за неделю, равна 34. Докажите, что Вася обманул свою маму, если всего ему поставили 11 оценок, среди которых есть по крайней мере одна пятёрка.

Решение. Предположим, Вася не получил ни одного кола и ни одной двойки. Тогда минимально возможная сумма полученных им оценок, с учётом того, что есть хотя бы одна пятёрка, равна $3 \cdot 10 + 5 = 35 > 34$. Противоречие.

4. *Заяц* – фигура, которая ходит на две клетки вперёд, назад, вправо или влево (см. рис.). Какое наибольшее количество зайцев, не бьющих друг друга, можно расположить на доске размером 8×8?



Решение. Заметим, что в прямоугольнике 1×4 можно расположить не более двух зайцев, не бьющих друг друга, т.к. иначе найдутся две клетки на расстоянии два, в которых стоят зайцы. Значит, на доске 8×8 можно расположить не более 32 зайцев. Пример с 32 зайцами представлен на рисунке.



5. Антон, Борис, Виктор — выпускники одной школы. Известно, что выпускались они в течение трёх последовательных лет, а Последний звонок у всех проходил 25 мая. Виктор окончил школу раньше остальных, Антон выпускался в 2015 году, а Борис попрощался со школой в среду. В каком году окончил школу Виктор, если его выпуск пришёлся на нерабочий день (субботу или воскресенье)?

Ответ. В 2014-м.

Решение. Из условия следует, что годы выпусков всех троих равны либо 2013, 2014, 2015, либо 2014, 2015, 2016. Заметим, что 365 дней – это 52 недели и 1 день. Следовательно, день недели, соответствующий 25 мая, в следующий год смещается на один, если следующий год невисокосный, и на два, если високосный. 2016 год был високосным. Тогда если бы Борис выпускался в среду 2014 года, то в 2013-2015 годах 25 мая приходилось бы соответственно на вторник, среду и четверг, что противоречит условию. Значит, годы выпусков равны 2014, 2015, 2016, и 25 мая в эти годы приходилось на воскресенье, понедельник и среду.

Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского

Казань, 3 апреля 2022 г.

6 класс

Вариант 4

1. Вычеркните из числа 74514943 как можно меньшее количество цифр так, чтобы получившееся число делилось на 6.

Решение. Число делится на 6, если оно делится на 2 и на 3, т.е. если последняя цифра чётна и сумма всех цифр делится на 3. Следовательно, последнюю цифру точно придётся вычеркнуть. Однако оставшееся число не делится на 3. Значит, нужно вычеркнуть по крайней мере ещё одну цифру, в качестве которой можно взять цифру 1. В итоге получим число 745494, делящееся на 6.

2. Магазины "Вкуснотище", "Сладкоежка" и "Ням-ням" целый день продавали мороженое. В начале дня магазин "Вкуснотище" имел порций мороженого столько же, сколько "Сладкоежка" и "Ням-ням" вместе взятые. В течение дня "Вкуснотище" и "Ням-ням" продали одинаковое количество порций, а "Сладкоежка" – вдвое больше каждого из них. В конце дня выяснилось, что в магазине "Ням-ням" осталось непроданных порций столько же, сколько у "Вкуснотища" и "Сладкоежки" вместе. Всё ли мороженое продал магазин "Сладкоежка"?

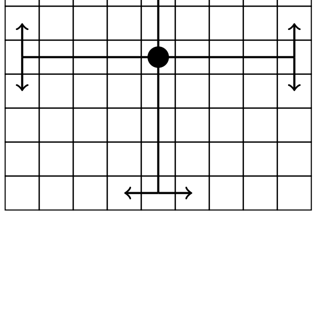
Ответ. Да.

Решение. Пусть в начале дня "Вкуснотище", "Сладкоежка" и "Ням-ням" имели v, s и n порций мороженого соответственно. Тогда по условию $v = s + n$. В конце дня стало выполняться равенство $n - a = (v - a) + (s - 2a) = v + s - 3a$, где a – количество порций, проданных магазинами "Вкуснотище" и "Ням-ням". Отсюда $n-a = v+s-3a = 2s+n-3a$, значит, $a = s$, т.е. "Сладкоежка" продал всё свое мороженое.

3. В центральной клетке доски 11×11 стоит тигр. Сможет ли он за некоторое количество ходов попасть на соседнюю по стороне клетку, если он ходит:

а) или на 1 по вертикали (вверх или вниз) и на 4 по горизонтали (влево или вправо), или на 1 по горизонтали (влево или вправо) и на 4 по вертикали (вверх или вниз) (см. рис.);

б) или на 1 по вертикали (вверх или вниз) и на 5 по горизонтали (влево или вправо), или на 1 по горизонтали (влево или вправо) и на 5 по вертикали (вверх или вниз)?



Ответ. а) да, б) нет.

Решение. а) Пример приведён на рисунке. (Фигура должна двигаться последовательно по клеткам с номерами от 1 до 5.)

4				
				3
2				
				1
●	5			

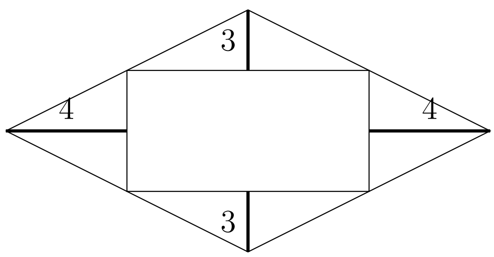
б) Заметим, что если фигура ходит в одном направлении на нечётное число клеток, то она попадает на клетку другого цвета. Следовательно, сходив в двух направлениях на нечётное число клеток, фигура всегда будет попадать на клетку того же цвета, поэтому не сможет попасть на соседнюю.

4. Антон, Борис, Виктор — выпускники одной школы. Известно, что выпускались они в течение трёх последовательных лет, а Последний звонок у всех проходил 25 мая. Виктор окончил школу раньше остальных, Антон выпускался в 2015 году, а Борис попрощался со школой в среду. В каком году окончил школу Виктор, если его выпуск пришёлся на нерабочий день (субботу или воскресенье)?

Ответ. В 2014-м.

Решение. Из условия следует, что годы выпусков всех троих равны либо 2013, 2014, 2015, либо 2014, 2015, 2016. Заметим, что 365 дней – это 52 недели и 1 день. Следовательно, день недели, соответствующий 25 мая, в следующий год смещается на один, если следующий год невисокосный, и на два, если високосный. 2016 год был високосным. Тогда если бы Борис выпускался в среду 2014 года, то в 2013-2015 годах 25 мая приходилось бы соответственно на вторник, среду и четверг, что противоречит условию. Значит, годы выпусков равны 2014, 2015, 2016, и 25 мая в эти годы приходилось на воскресенье, понедельник и среду.

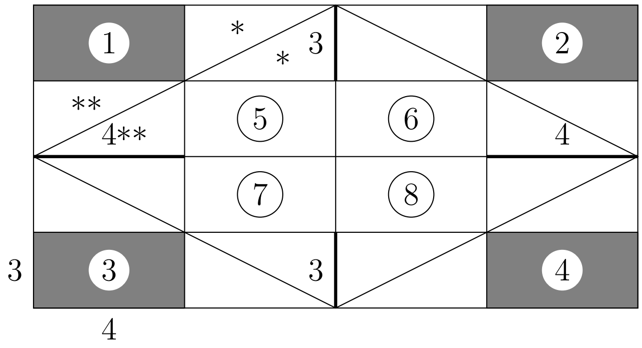
5. Внутри ромба построили прямоугольник так, как показано на рисунке. Чему равна площадь прямоугольника, если расстояния от вершин ромба до сторон прямоугольника равны 3 и 4?



Ответ. 48.

Решение. Достроим ромб до прямоугольника (см. рис.). Прямоугольные треугольники, отмеченные * и отмеченные **, равны между собой, значит, имеют одинаковую площадь. Значит, площади прямоугольников 1 и 5 также равны как разность между площадью прямоугольника и четырёх прямоугольных треугольников, отмеченных * и **. Аналогично совпадают площади прямоугольников 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8. Площадь каждого прямоугольника равна произведению сторон, т.е. $3 \cdot 4 = 12$, откуда получаем ответ.

Заметим, что решение не подразумевает расположение вершин прямоугольника на серединах сторон ромба, о чём в условии задачи не сообщалось.



Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского

Казань, 3 апреля 2022 г.

7 класс

Вариант 4

1. Четырёхзначное число таково, что все его цифры различны, а также известно, что числа 1065, 8401, 9240, 6823 содержат ровно по две цифры, принадлежащие этому числу.

а) Найдите хотя бы одно такое число. (2 балла)

б) Найдите хотя бы одно такое число при дополнительном условии, что ни одна из цифр, принадлежащих числу, не стоит на том же месте, что и в приведённых числах. (5 баллов)

Ответ. 4612.

Решение. Непосредственная проверка.

2. В Казанской лиге по футболу есть команда Казанка, а всего в лиге 19 команд. Каждая команда играет с каждой другой по одному разу. За победу команде дают 3 очка, за ничью 1, за поражение 0. Команда остаётся в лиге, если набрала хотя бы на 10 очков больше, чем половина очков от максимально возможного количества. Известно, что Казанка заняла 14 место. Может ли она остаться в лиге на следующий год?

Ответ. Нет.

Решение. Поскольку каждая команда играет 18 матчей, то всего будет сыгран $\frac{19 \cdot 18}{2} = 171$ матч. Следовательно, в сумме команды могут набрать не более $171 \cdot 3 = 513$ очков. Наибольшее возможное количество очков, которые может набрать одна команда, равно 54, значит, для того чтобы остаться на следующий год, команде необходимо набрать не менее 37 очков.

Предположим, Казанка осталась на следующий год. Тогда 14 команд лиги набрали не менее 37 очков, следовательно, в сумме набрали не менее $37 \cdot 14 = 518 > 513$ очков. Противоречие.

3. На доске выписаны 80 единиц. Два игрока, Петя и Вася, играют в следующую игру. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок должен либо стереть одно из чисел с доски, либо заменить одну из единиц на ноль. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто из игроков выигрывает при правильной игре?

Ответ. Вася.

Решение. Покажем, что для победы Васе достаточно повторять ходы Пети.

Назовём игровую позицию *хорошей*, если на доске чётное число единиц и чётное число нулей. Ясно, что начальная позиция хорошая. Если Петя стирает единицу, то на доске остаётся нечётное число единиц, значит, Вася может стереть одну единицу и получить хорошую позицию. Случаи с остальными двумя возможными ходами Пети рассматриваются аналогично. Таким образом, после ходов Васи всегда получаются хорошие позиции.

Осталось заметить, что количество ходов в игре ограничено (максимально возможное количество – 160 – достигается, если сначала все единицы поочерёдно меняются на ноль, а затем стираются все нули). Конечная позиция без чисел на доске также является хорошей, значит, Вася действительно добьётся победы путём повторения ходов Пети.

4. Докажите, что для любых натуральных a и b найдётся натуральное n такое, что число $an^2 - b$ – составное.

Решение. Если $b > 1$, то при $n = 2b$ имеем $an^2 - b = 4ab - b = b(4a - 1)$. Каждый из сомножителей больше 1, поэтому число составное.

Пусть $b = 1$. Если $a = 1$, то полагаем $n = 3$. Если $a = 2$, то полагаем $n = 5$. Если $a > 2$, то полагаем $n = a$, тогда $an^2 - b = a^3 - 1 = (a-1)(a^2+a+1)$. Снова каждый из сомножителей больше 1, поэтому число составное.

5. Дан равнобедренный треугольник ABC с углом A, равным $120°$. Медиану AM этого треугольника продлили на свою длину за точку M, получили точку X. Точки Y и Z — середины сторон AB и AC. Докажите, что треугольник XYZ равносторонний, и найдите его периметр, если $BC = 6$ и $\angle XYM = 30°$.

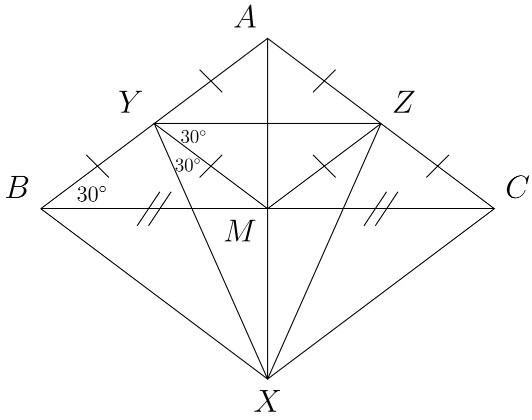
Ответ. $P_{\Delta XYZ} = 9$.

Решение. Т.к. AM – медиана, проведённая к основанию в равнобедренном треугольнике, то AM также является биссектрисой и высотой, значит, $\angle BAM = 60°$ и $AM \perp BC$. Отсюда с учётом $AM = MX$ получаем, что BM – медиана и высота в треугольнике BAX, следовательно, ΔBAX – равнобедренный с углом $60°$, т.е. равносторонний. XY – медиана в этом треугольнике, значит, также биссектриса и высота, поэтому $\angle YXA = 30°$.

Аналогичными рассуждениями можно получить, что $\angle ZXA = 30°$.

Наконец, из равенства треугольников YXA и ZXA по двум сторонам и углу между ними вытекает $YX = XZ$. Таким образом, ΔYXZ – равнобедренный с углом $\angle YXZ = 60°$, значит, равносторонний.

Перейдём теперь к вычислению периметра треугольника XYZ. Т.к. $\angle XYM = 30°$, а XY – высота в ΔBXA, то $\angle BYM = 120° = \angle YAZ$. ΔYAZ – равнобедренный с углом $120°$, значит, $\angle AYZ = 30° = \angle YBM$. Таким образом, треугольники YAZ и BYM равны по двум углам и стороне между ними, откуда $YZ = BM = BC/2$ и $P_{\Delta XYZ} = 3BC/2$.


A
Y
Z
30°
30°
B
30°
C
M
X