Казанский (Приволжский) федеральный университет
СУНЦ IT-лицей КФУ

ГЕОМЕТРИЯ

Методическая библиотека

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Специализированный учебный научный центр –
общеобразовательная школа-интернат IT-лицей

ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

КАЗАНЬ
2021

УДК 514.1
ББК 22.151
Г 36

Печатается по рекомендации педагогического совета Специализированного учебного научного центра – общеобразовательная школа-интернат «IT-лицей» федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет» (протокол № 2 от 15.10.2021)

Авторы:
Р.Ф. Ахвердиев, кандидат технических наук, учитель математики СУНЦ IT-лицей КФУ, доцент кафедры высшей математики КНИТУ
Е.А. Турилова, доктор физико-математических наук, доцент, директор Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского КФУ
Ф.Г. Искакова, руководитель кафедры математики, учитель математики первой квалификационной категории СУНЦ IT-лицей КФУ
Д.Н. Бикмухаметова, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики КНИТУ
С.Р. Еникеева, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики КНИТУ

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры специальной математики Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева-КАИ
А.Ю. Погодина;
кандидат технических наук, доцент кафедры математики Университета управления «ТИСБИ»
Л.Р. Пантелеева

Г 36 **Геометрия:** учеб. пособие [Электронный ресурс] / Р.Ф. Ахвердиев, Е.А. Турилова, Ф.Г. Искакова и др. – Электрон. текстовые дан. (1 файл: 45,2 Мб). – Казань: Издательство Казанского университета, 2021. – 60с. – Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: https://kpfu.ru/portal/docs/F_232446255/Geometriya.pdf. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-00130-544-6

В пособии авторами рассмотрены задачи разной степени сложности по планиметрии и стереометрии с подробными решениями, а также предоставлен необходимый теоретический материал. Для организации самостоятельной работы по данным разделам геометрии предложены задачи с указаниями и ответами.

Пособие будет полезно при организации итогового повторения при подготовке к ЕГЭ по математике в 11 классе, а также при подготовке к ОГЭ по математике для учащихся 9 класса.

УДК 514.1
ББК 22.151

ISBN 978-5-00130-544-6

© Издательство Казанского университета, 2021

Введение

Решение геометрических задач вызывает трудности у учащихся, так как редко какая задача может быть решена только с использованием одной определенной формулы. При решении геометрических задач нужно свободно владеть всем теоретическим материалом, а выполняя чертеж, надо постараться сделать его так, чтобы он соответствовал условию задачи. Хороший чертеж подскажет ход рассуждений. Но, конечно, чтобы приобрести навык в решении задач, надо решить достаточно большое их количество, переходя от простых к сложным.

Цель – оказать помощь учащимся в подготовке к сдаче Единого Государственного Экзамена (ЕГЭ) по геометрии (по планиметрии и стереометрии), для чего в пособии авторами рассмотрены задачи разной степени сложности с подробными решениями; а также помочь учащимся при самостоятельной работе по данным разделам геометрии, для этого предложены задачи с указаниями и ответами.

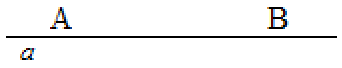
Пособие будет полезно при организации итогового повторения при подготовке к ЕГЭ по математике в 11 классе, а также при подготовке к ОГЭ по математике для учащихся 9 класса.

Часть I. Планиметрия

Планиметрия – это раздел геометрии, в котором изучаются фигуры на плоскости.

1. *Угол и его виды.*

Прямая



(AB)

Луч

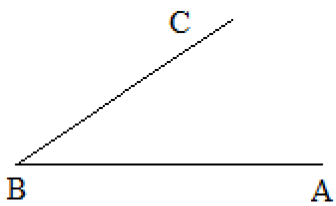
[AB)

(AB]

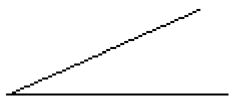
Отрезок

[AB]

Угол – фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки.



т. *B* – вершина угла,
BA и *BC* – стороны угла.
Угол обозначается $\angle B$,
$\angle ABC$.

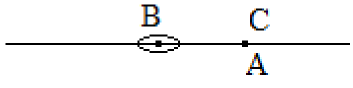


Острый угол < 90^0

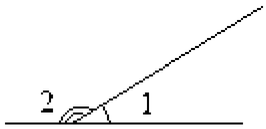
Прямой угол = 90^0

Тупой угол > 90^0

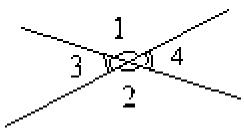
Развернутый угол = 180^0



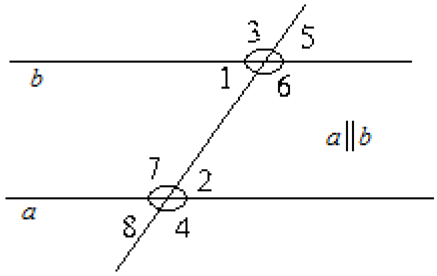
Полный угол = 360^0



$\angle 1+\angle 2=180^0$
Смежные углы

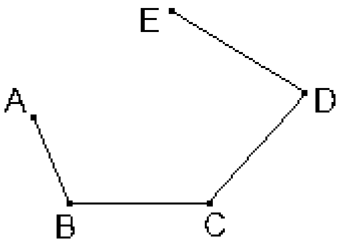


$\angle 1=\angle 2$ и $\angle 3=\angle 4$
Вертикальные углы

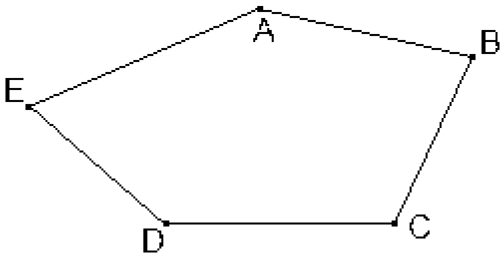


$\angle 6 = \angle 7$ и $\angle 1 = \angle 2$ – внутренние накрестлежащие углы;
$\angle 3 = \angle 4$ и $\angle 5 = \angle 8$ – внешние накрестлежащие углы;
$\angle 5 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 7$ – соответственные углы;
$\angle 2 + \angle 6 = 180^0$ и $\angle 1 + \angle 7 = 180^0$ – односторонние углы.
Углы измеряются в градусах:
$1^0 = {}^1\!/_{360}$ – часть полного оборота.
$1^0 = 60'$, $1' = 60''$.

2. Треугольник и его виды. Общие сведения

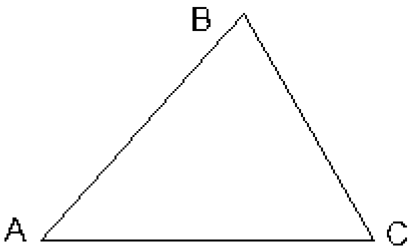


ABCDE – ломаная, точки *A*, *B*, *C*, *D*, *E* – вершины ломаной, *AB*, *BC*, *CD*, *DE* – звенья ломаной.

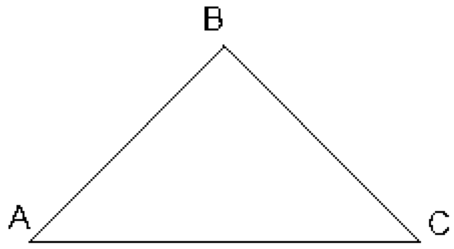


ABCDE – замкнутая ломаная.

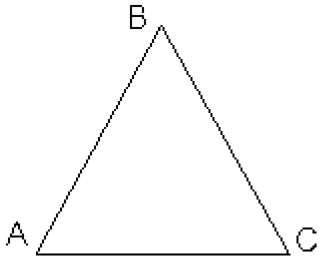
Треугольник – фигура, ограниченная замкнутой ломаной, состоящая из трех звеньев.



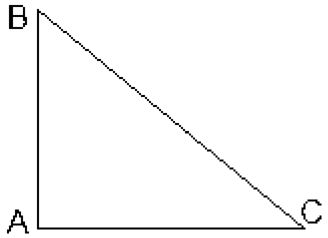
Остроугольный треугольник (все углы острые)



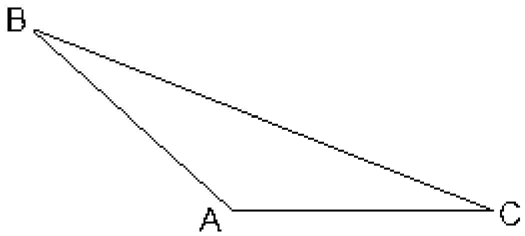
Равнобедренный треугольник ($AB = BC$, $\angle A = \angle C$, AC – основание, т. B – вершина)



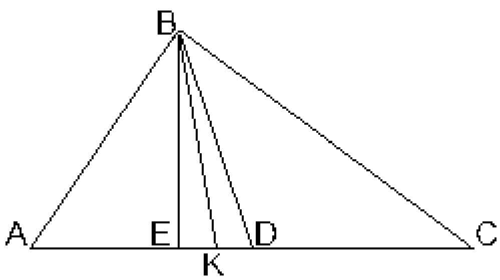
Равносторонний треугольник ($AB = BC = AC$)



Прямоугольный треугольник ($\angle BAC = 90^0$, BC – гипотенуза, AB, AC – катеты)



Тупоугольный треугольник ($\angle BAC > 90^0$)



BD – медиана, $AD = DC$.
BE – высота, $BE \perp AC$.
BK – биссектриса, $\angle ABK = \angle KBC$.

В правильном треугольнике высота, медиана и биссектриса совпадают.

Сумма всех углов в треугольнике равна 180^0.

<u>Во всяком треугольнике</u> пересекаются в одной точке:

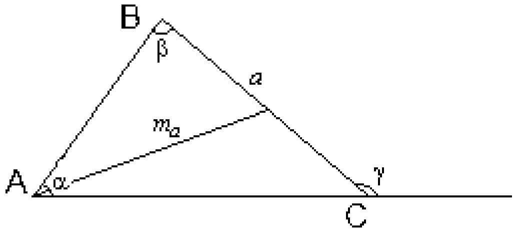
а) три медианы (эта точка делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины угла);

б) три перпендикуляра, проведенных из середин сторон треугольника (эта точка является центром окружности, описанной около треугольника);

в) три биссектрисы (эта точка является центром вписанной в треугольник окружности).

<u>Во всяком треугольнике:</u>

а) внешний угол равен сумме двух внутренних, не смежных с ним. $\angle\gamma = \angle\alpha + \angle\beta$.

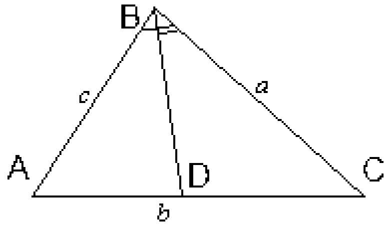


Длина медианы $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}$.

Длина стороны $a = \frac{2}{3}\sqrt{2\left(m_b + m_c\right)^2 - m_a{}^2}$.

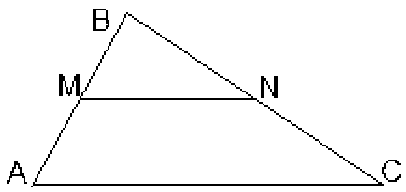
$m_a{}^2 + m_b{}^2 + m_c{}^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$;

б)



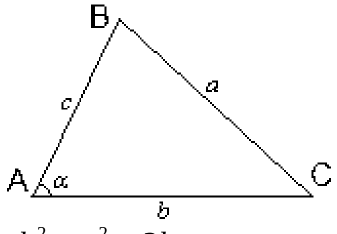
Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$;

в)



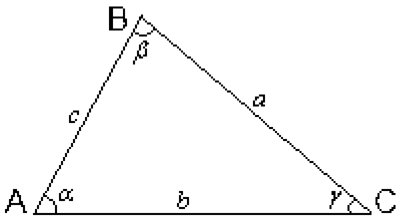
Средняя линия треугольника параллельна его основанию и равна его половине, т. е. $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$;

г) Теорема косинусов:



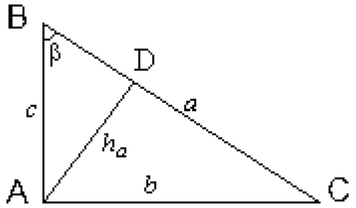
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$;

д) Теорема синусов:



$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$, где R – радиус окружности, описанной около треугольника.

<u>В прямоугольном треугольнике</u>:



а) $a^2=b^2+c^2$ – теорема Пифагора;

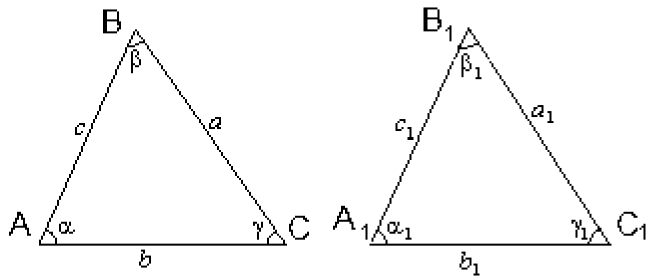
б) $\sin\beta=\frac{b}{a},\cos\beta=\frac{c}{a},tg\beta=\frac{b}{c},ctg\beta=\frac{c}{b}$;

в) центр описанной около треугольника окружности лежит на гипотенузе и делит ее пополам;

г) высота, проведенная из прямого угла, является средним геометрическим отрезков BD и DC, т. е. $h_a=\sqrt{BD\cdot DC}$;

д) $b=\sqrt{a\cdot a_b}$, $c=\sqrt{a\cdot a_c}$.

Признаки равенства треугольников:



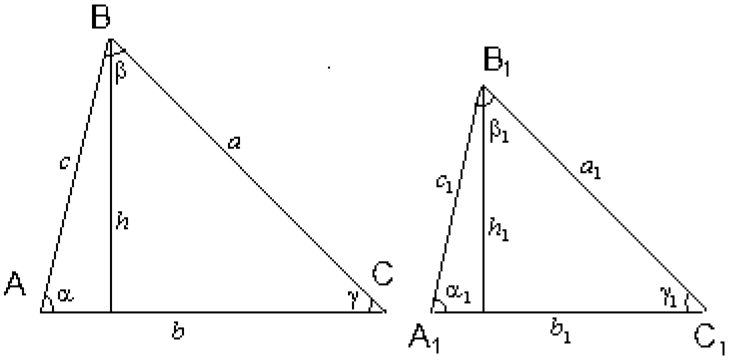
$\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$, если

1) $a=a_1,b=b_1,\gamma=\gamma_1$;

2) $c=c_1,\alpha=\alpha_1,\beta=\beta_1$;

3) $a=a_1,b=b_1,c=c_1$.

Признаки подобия треугольников:



$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, если

1) $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1$;

2) $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1}, \gamma = \gamma_1$;

3) $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} = \dfrac{c}{c_1}$.

Следствие: $\dfrac{S}{S_1} = \dfrac{a^2}{{a_1}^2}, \dfrac{h}{h_1} = \dfrac{a}{a_1}$.

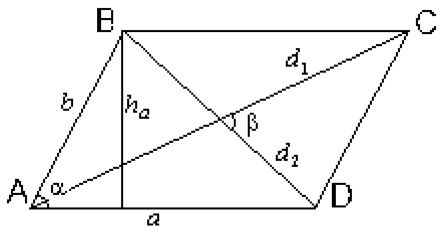
3. Площади фигур

а) Параллелограмм – четырехугольник, у которого:

1) $AB \parallel CD, BC \parallel AD, \quad AB = CD, BC = AD$;

2) диагонали делятся точкой их пересечения пополам;

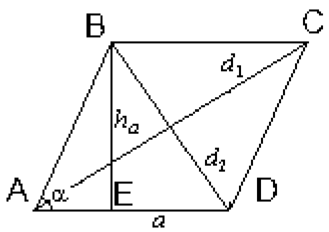
3) противоположные углы равны.



$$S = a \cdot h_a = a \cdot b \cdot \sin\alpha = b \cdot h_b = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\beta .$$

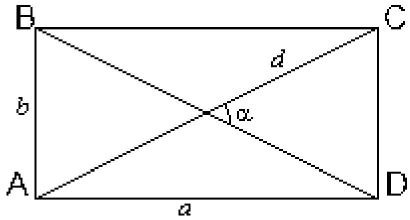
В параллелограмме ${d_1}^2 + {d_2}^2 = 2(a^2 + b^2)$.

б) Ромб – параллелограмм, у которого все стороны равны, диагонали взаимно перпендикулярны и делят углы ромба пополам.



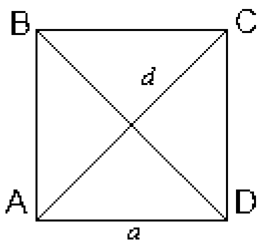
$S = a^2 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 = a \cdot h_a$. $\quad d_1{}^2 + d_2{}^2 = 4a^2$.

в) Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые, а диагонали равны.



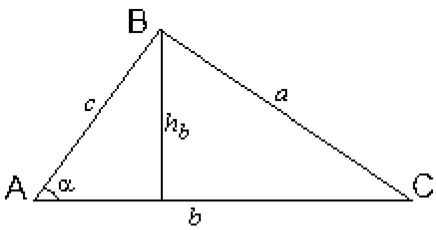
$S = a \cdot b = \frac{1}{2} d^2 \sin\alpha$. $\qquad a^2 + b^2 = d^2$.

г) Квадрат – прямоугольник, у которого все стороны равны.



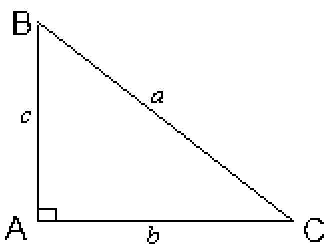
$S = a^2 = \frac{1}{2} d^2$.

д) Треугольник



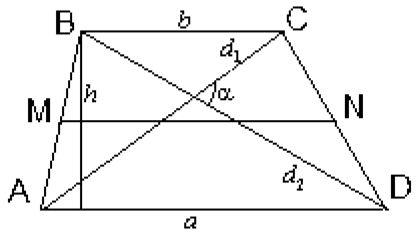
$$S = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} c \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin\alpha =$$
$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где p – полупериметр треугольника, т. е. $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.



$S = \frac{1}{2} bc$.

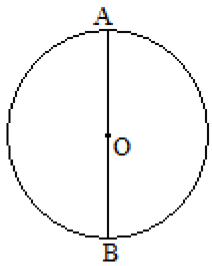
е) Трапеция – четырехугольник, у которого две стороны параллельны.



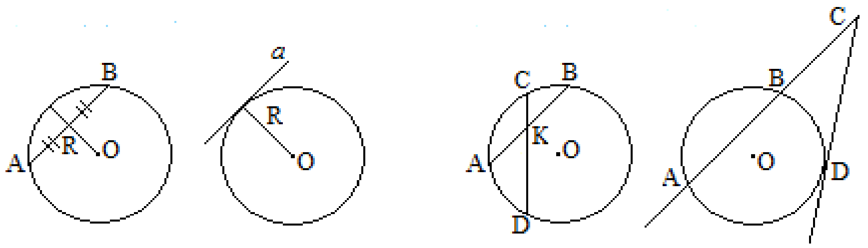
$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = MN \cdot h = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha$, где MN – средняя линия трапеции, $MN = \frac{a+b}{2}$.

Следствие. Площадь равнобедренной трапеции, у которой диагонали перпендикулярны, вычисляется по формуле: $S = \frac{1}{2} d^2$.

4. Окружность и круг



$OA = R$; $AB = D = 2R$. R – радиус окружности. D – диаметр окружности.

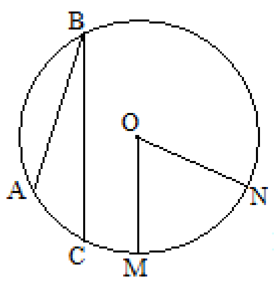


Радиус, перпендикулярный хорде, делит ее пополам и наоборот.

Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.

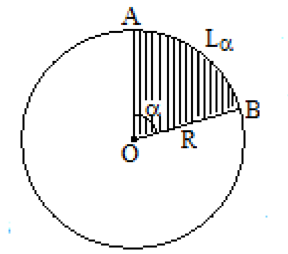
Если через точку, взятую внутри круга, проведены хорды, то произведение длин отрезков хорд, на которые эти хорды делятся общей точкой, есть величина постоянная, т. е. $AK \cdot KB = CK \cdot KD$.

Если из точки, взятой вне круга, проведены касательная и секущая, то произведение длин отрезков всей секущей и ее внешней части равно квадрату длины касательной, т. е. $AC \cdot BC = CD^2$.

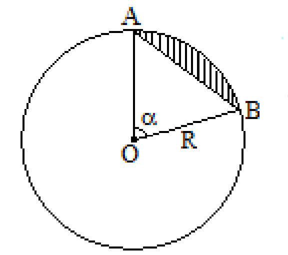


$\angle ABC$ – вписанный угол;
$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$;
$\angle MON$ – центральный угол;
$\angle MON = \cup MN$.

Длина окружности $L = 2\pi R$. Площадь круга $S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$.



$L_\alpha = \alpha R$ (величина угла берется в радианах), $\alpha = \dfrac{\pi}{180}\cdot\alpha^0$, значит площадь сектора $S = \dfrac{\alpha}{2}\cdot R^2 = \dfrac{\pi R^2\alpha^0}{360}$.



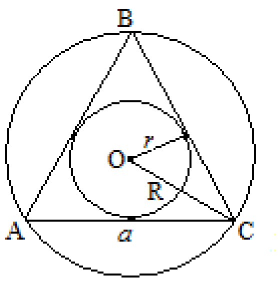
Площадь сегмента $S = S_{сектора} - S_{\Delta AOB}$, т. е. $S = \dfrac{\pi R^2\alpha^0}{360} - \dfrac{1}{2}R^2\sin\alpha$.

5. Правильные многоугольники и окружность

Для правильного многоугольника:

$$a_n = 2r\cdot tg\frac{180^0}{n} = 2R\sin\frac{180^0}{n};\ r = R\cos\frac{180^0}{n};\ S = \frac{1}{2}R^2 n\cdot\sin\frac{360^0}{n}.$$

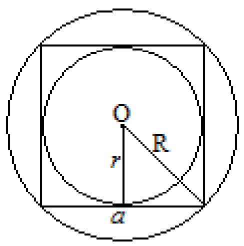
Частные случаи:



$a = 2\sqrt{3}\cdot r = \sqrt{3}R$.

$S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}\cdot r^2 = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4}$.

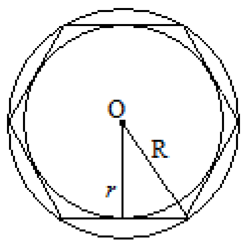
$P = 3a = 6\sqrt{3}\cdot r = 3\sqrt{3}R$.



$a = 2r = \sqrt{2}R$.

$S = a^2 = 4r^2 = 2R^2$.

$P = 4a = 8r = 4\sqrt{2}R$.

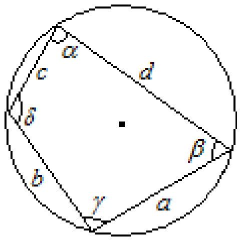


$a = R = \dfrac{2\sqrt{3}\cdot r}{3}$.

$S = \dfrac{3\sqrt{3}\cdot a^2}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{2} = 2\sqrt{3}\cdot r^2$

.

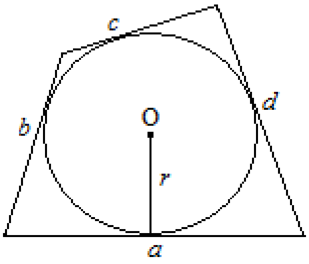
Для четырехугольника, вписанного в окружность:



$$\alpha + \gamma = \delta + \beta = 180^0$$

$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$

Для четырехугольника, описанного около окружности:

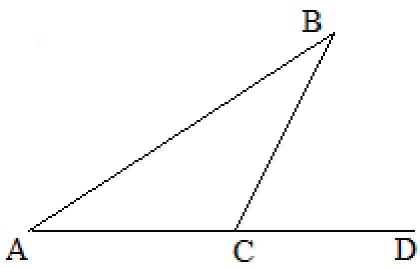


$a + c = b + d$.
$S = pr$,
где $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$.

Задачи

1. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 70^0. Найдите углы треугольника.

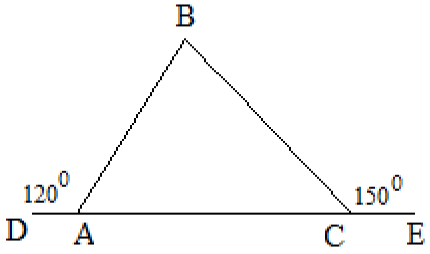
Дано: ΔABC – равнобедренный.
Найти: углы треугольника.



Решение:
Угол $BCD = 70^0$ (по условию), и он равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним, т. е. $\angle ABC + \angle BAC = 70^0$. А так как ΔABC – равнобедренный, где один из углов $\angle ACB = 180^0 - 70^0 = 110^0$, то $\angle ABC = \angle BAC = 35^0$ (у равнобедренного треугольника углы при основании равны).
Ответ: 35^0, 35^0, 110^0.

2. Найдите углы треугольника, если два внешних угла равны 120^0 и 150^0.

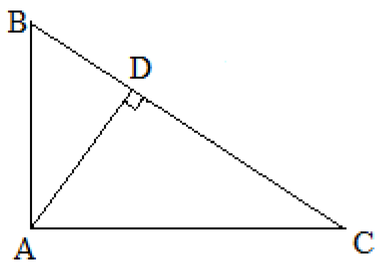
Дано: $\angle DAB = 120^0$, $\angle BCE = 150^0$.
Найти: углы треугольника.



Решение:
Так как $\angle DAB = 120^0$, то смежный с ним $\angle BAC = 180^0–120^0 = 60^0$, а так как $\angle BCE = 150^0$, то смежный с ним $\angle ACB = 180^0–150^0 = 30^0$, следовательно, $\angle ABC = 180^0–60^0–30^0 = 90^0$.
Ответ: 30^0, 60^0, 90^0.

3. Из вершины прямого угла в ΔABC проведена высота AD. Найдите угол DAC, если угол ABC равен 20^0.

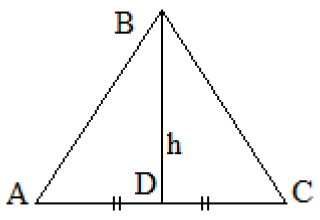
Дано: ΔABC – прямоугольный, AD – высота, $\angle ABC = 20^0$.
Найти: $\angle DAC$.



Решение:
Так как $AD \perp BC$, то $\angle ADB = 90^0$, $\angle ABC = 20^0$ (по условию), значит $\angle BAD = 180^0 – 90^0 – 20^0$, $\angle BAD = 70^0$, тогда $\angle DAC = 90^0 – 70^0 = 20^0$.
Ответ: 20^0.

4. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 17, основание равно 16. Найдите высоту, опущенную на основание.

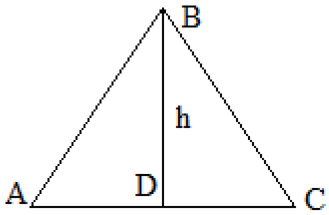
Дано: $AB = BC = 17$, AC = 16.
Найти: h.



Решение:
Так как ΔDBC – прямоугольный, $h^2 = BC^2 - DC^2$ (теорема Пифагора). $BC = 17$ (по условию), $DC = \frac{1}{2}AC$, так как в равнобедренном треугольнике высота совпадает с медианой, т. е. $DC = 8$.
Значит, $h = \sqrt{17^2 - 8^2}$, $h = 15$.
Ответ: 15.

5. В равностороннем треугольнике со стороной a найдите высоту.

Дано: $AB = BC = AC = a$.
Найти: h.



Решение:

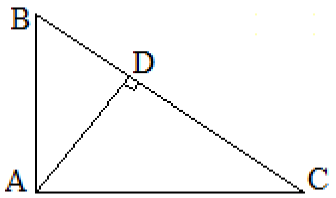
Рассмотрим ΔDBC, $h = \sqrt{BC^2 - DC^2}$, т. е. $BC = a$ (по условию), $DC = \frac{1}{2}AC$, т. е. $DC = \frac{1}{2}a$,

$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2}$, $h = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2}$, $h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$, $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

6. Катет прямоугольного треугольника равен 5 м, а его проекция на гипотенузу равна 3 м. Найдите гипотенузу и другой катет.

Дано: $AC = 5$ м, $DC = 3$ м.
Найти: AB, BC.



Решение:

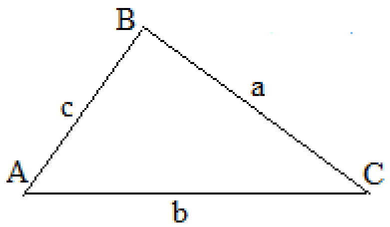
По условию $AC = 5$ м, $DC = 3$ м. Используя одно из свойств перпендикуляра, опущенного из прямого угла, а именно: $AC = \sqrt{BC \cdot DC}$, получим $BC = \frac{AC^2}{DC}$, $BC = \frac{25}{3}$, $BC = 8\frac{1}{3}$ (м). А теперь, рассмотрев ΔABC и применив теорему Пифагора, получим $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}$,

$AB = \sqrt{\left(8\frac{1}{3}\right)^2 - 25} = \sqrt{\frac{625}{9} - 25}$, $AB = \sqrt{\frac{400}{9}}$, $AB = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$ (м).

Ответ: $8\frac{1}{3}$ м и $6\frac{2}{3}$ м.

7. Найдите высоты треугольника со сторонами 13, 14, 15.

Дано: $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$.
Найти: h_a, h_b, h_c.



Решение:

Так как $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$ (по условию), используя формулу Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, получим $S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} =$ $\sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$.

А так как $S = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} c h_c$, то

$h_b = \frac{2S}{b}$, $h_b = \frac{2 \cdot 84}{15}$, $h_b = 11{,}2$.

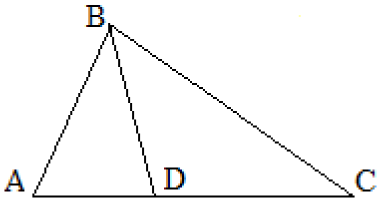
$h_a = \frac{2S}{a}$, $h_a = \frac{2 \cdot 84}{14}$, $h_a = 12$.

$h_c = \frac{2S}{c}$, $h_c = \frac{2 \cdot 84}{13}$, $h_c = 12\frac{12}{13}$.

Ответ: 11,2; 12; $12\frac{12}{13}$.

8. Периметр треугольника равен 32 см. Биссектриса одного из его углов делит противоположную сторону треугольника на отрезки длиной 3 см и 5 см. Найдите длины двух других сторон треугольника.

Дано: P = 32 см, AD = 3 см, DC = 5 см, BD – биссектриса.
Найти: AB и BC.

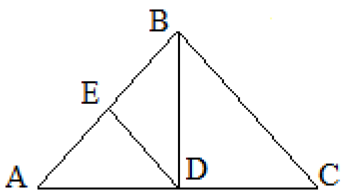


Решение:

По теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника имеем, что $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$, т. е. $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$, а т. к. $AD + DC = 8$ см и $AB + BC + AC = 32$ см (по условию), то $AB + BC = 32 - 8 = 24$ см. Значит, $BC = 24 - AB$, следовательно, $\frac{AB}{24 - AB} = \frac{3}{5}$, откуда $5AB = 72 - 3AB$, $5AB + 3AB = 72$, $8AB = 72$, $AB = 9$ см, следовательно, $BC = 15$ см.
Ответ: 9 см, 15 см.

9. Найти значение $\sqrt{3} \cdot S$, где S – площадь равнобедренного треугольника, у которого длина основания равна 12, а высота, опущенная на основание, равна отрезку прямой, соединяющей середины основания и боковой стороны.

Дано: ΔABC – равнобедренный, AB = BC, AC = 12, BD = DE.
Найти: $\sqrt{3} \cdot S$.

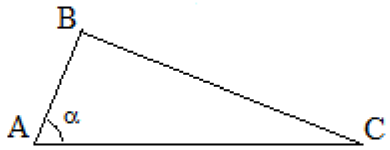


Решение:

$S_\Delta = \frac{1}{2} AC \cdot BD$, $BD = DE = \frac{1}{2} BC$, т. к. если в ΔABC считать основанием BC, то DE будет средней линией (проходит через середины сторон AC и AB), поэтому из ΔBDC имеем $BC^2 = DC^2 + BD^2$, т. е. $4BD^2 = 6^2 + BD^2$, $3BD^2 = 36$, $BD^2 = 12$, $BD = 2\sqrt{3}$. Следовательно, $S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2\sqrt{3}$, $S = 12\sqrt{3}$, значит, $\sqrt{3} \cdot S = \sqrt{3} \cdot 12\sqrt{3} = 36$.
Ответ: 36.

10. Даны две стороны треугольника *ABC* – 3 см и 10 см, а также синус угла между ними, равный $\frac{4}{5}$. Найти неизвестную сторону.

Дано: $AB = 3$ см, $AC = 5$ см, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.
Найти: *BC*.



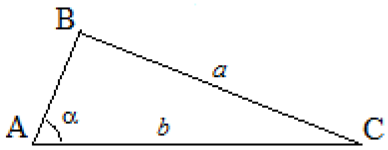
Решение:

Так как $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, а $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$, $\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}$, $\cos\alpha = \sqrt{\frac{9}{25}}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, то по теореме косинусов $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos\alpha$ имеем, что $BC = \sqrt{100+9-2\cdot 10\cdot 3\cdot\frac{3}{5}} = \sqrt{109-36} = \sqrt{73}$.

Ответ: $\sqrt{73}$.

11. В треугольнике *ABC* угол *BAC* равен 30^0, $AC = 3$ см, $BC = 2{,}5$ см. Найдите сторону *AB*.

Дано: $BC = 2{,}5$ см, $AC = 3$ см, $\angle\alpha = 30^0$.
Найти: *AB*.



Решение:

Используя теорему синусов $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$, имеем $\frac{\sin 30^0}{2{,}5} = \frac{\sin B}{3} = \frac{\sin C}{c}$, а т. к. сумма углов в треугольнике равна 180^0, то $\frac{\sin 30^0}{2{,}5} = \frac{\sin B}{3} = \frac{\sin\left(180^0 - \left(30^0 + B\right)\right)}{c}$. Отсюда получаем $\frac{0{,}5}{2{,}5} = \frac{\sin B}{3} = \frac{\sin\left(30^0 + B\right)}{c}$. Следовательно, $\frac{1}{5} = \frac{\sin B}{3}$, $\sin B = \frac{3}{5}$,

$\sin\left(30^0 + B\right) = \sin 30^0\cdot\cos B + \sin B\cdot\cos 30^0$, $\sin\left(30^0 + B\right) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} + \frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$,

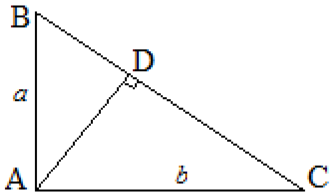
$\sin\left(30^0 + B\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} + \frac{3\sqrt{3}}{10}$, $\sin\left(30^0 + B\right) = \frac{4+3\sqrt{3}}{10}$.

$\frac{1}{5} = \frac{4+3\sqrt{3}}{10c}$, $2c = 4+3\sqrt{3}$, $c = \frac{4+3\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{4+3\sqrt{3}}{2}$.

12. Длины катетов прямоугольного треугольника равны a и b. Найдите длину биссектрисы прямого угла.

Дано: $BC = a$, $AC = b$,
CD – биссектриса.
Найти: CD.



Решение:

Используя свойство биссектрисы $\frac{BD}{DA} = \frac{BC}{AC}$ и то, что $BA = BD + DA = \sqrt{AC^2 + BC^2}$, $BA = \sqrt{a^2 + b^2}$, получим $\frac{BD}{BA - BD} = \frac{BC}{AC}$, $\frac{BD}{\sqrt{a^2+b^2} - BD} = \frac{a}{b}$, $b \cdot BD = a \cdot \left(\sqrt{a^2+b^2} - BD\right)$.

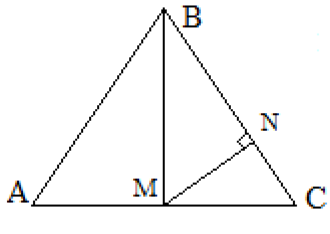
$b \cdot BD = a \cdot \sqrt{a^2+b^2} - a \cdot BD$, $b \cdot BD + a \cdot BD = a \cdot \sqrt{a^2+b^2}$, $BD \cdot (a+b) = a \cdot \sqrt{a^2+b^2}$, т. е. $BD = \frac{a \cdot \sqrt{a^2+b^2}}{a+b}$. Из треугольника ABC (по теореме синусов) $\frac{AB}{\sin 90^0} = \frac{CA}{\sin B}$, $\sin B = \frac{CA \cdot \sin 90^0}{AB}$, $\sin B = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Из треугольника CBD (по теореме синусов) $\frac{CD}{\sin B} = \frac{BD}{\sin \angle BAD}$, $\angle BAD = \angle DAC = \frac{1}{2} \cdot 90^0 = 45^0$. $\frac{CD}{b \big/ \sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a \cdot \sqrt{a^2+b^2}}{(a+b) \cdot \sqrt{2} \big/ 2}$,

$\frac{CD \cdot \sqrt{a^2+b^2}}{b} = \frac{a \cdot \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{2}}{(a+b)}$. $CD = \frac{ab \cdot \sqrt{2}}{a+b}$.

Ответ: $\frac{ab \cdot \sqrt{2}}{a+b}$.

13. В равнобедренном треугольнике длина основания равна a, длина высоты, опущенной на основание, равна h. Найдите расстояние от середины основания до боковой стороны.

Дано: $AB = BC$, $AC = a$, $BM = h$,
$MN \perp BC$.
Найти: MN.



Решение:

Используя свойство перпендикуляра, опущенного из прямого угла $\frac{MN}{NC} = \frac{BN}{MN}$, имеем $MN^2 = NC \cdot BN$. Из треугольника MNC можем записать, что $NC = \sqrt{MC^2 - MN^2}$, $NC = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - MN^2}$. Из треугольника MBN имеем $BN = \sqrt{BM^2 - MN^2}$, $BN = \sqrt{h^2 - MN^2}$, т. е. $MN^2 = \sqrt{\frac{a^2}{4} - MN^2} \cdot \sqrt{h^2 - MN^2}$. Обозначим MN через x и, возведя обе стороны уравнения $x^2=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}-x^2}\cdot\sqrt{h^2-x^2}$ в квадрат, получим $x^4=\left(\dfrac{a^2}{4}-x^2\right)\cdot\left(h^2-x^2\right)$. Раскроем скобки.

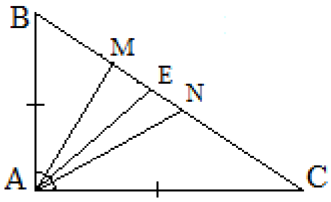
$x^4=\dfrac{a^2}{4}\cdot h^2-\dfrac{a^2}{4}\cdot x^2-x^2\cdot h^2+x^4$, т. е. $x^2\left(h^2+\dfrac{a^2}{4}\right)=\dfrac{a^2h^2}{4}$, $x^2=\dfrac{a^2h^2}{4}:\dfrac{4h^2+a^2}{4}$,

$x^2=\dfrac{a^2h^2}{4h^2+a^2}$, откуда $x=MN=\dfrac{ah}{\sqrt{4h^2+a^2}}$.

Ответ: $\dfrac{ah}{\sqrt{4h^2+a^2}}$.

14. В прямоугольном равнобедренном треугольнике через вершину прямого угла проведены две прямые, которые разбивают этот угол на три равных угла. Найти длины отрезков, на которые эти прямые разбивают гипотенузу, если ее длина равна a.

Дано: $BA = CA$, $BC = a$, $\angle BAM=\angle MAN=\angle NAC$.
Найти: BM, MN, NC.



Решение:
Согласно условию задачи $\Delta\ ABM = \Delta\ ANC$ (по двум углам и прилежащей к ним стороне), значит $BM = NC$. Проведем высоту AE, $\Delta\ AEC$ – равнобедренный и, следовательно, $AE=EC=\dfrac{a}{2}$, $\angle EAC=\angle ECA=45^0$, тогда $\angle EAN=45^0-30^0=15^0$. Отсюда получаем, что $tg15^0=\dfrac{EN}{AE}$,

$EN=AE\cdot tg15^0$, $EN=\dfrac{a}{2}\cdot tg15^0$. $tg15^0=\sqrt{\dfrac{1-\cos30^0}{1+\cos30^0}}=\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{\sqrt3}{2}}{1+\dfrac{\sqrt3}{2}}}=\sqrt{\dfrac{2-\sqrt3}{2+\sqrt3}}=$

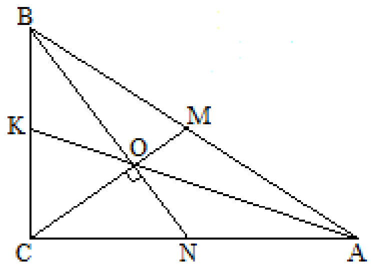
$=\sqrt{\dfrac{\left(2-\sqrt3\right)\left(2-\sqrt3\right)}{\left(2+\sqrt3\right)\left(2-\sqrt3\right)}}=2-\sqrt3$.

$EN=\dfrac{a}{2}\left(2-\sqrt3\right)$. $NC=\dfrac{a}{2}-\dfrac{a\left(2-\sqrt3\right)}{2}=\dfrac{a\left(\sqrt3-1\right)}{2}$. $BM=\dfrac{a\left(\sqrt3-1\right)}{2}$. $MN=2EN$, $MN=a\left(2-\sqrt3\right)$.

Ответ: $\dfrac{a\left(\sqrt3-1\right)}{2}$; $a\left(2-\sqrt3\right)$; $\dfrac{a\left(\sqrt3-1\right)}{2}$.

15. В прямоугольном треугольнике *ABC* с гипотенузой *AB*, медианы *CM* и *BN* перпендикулярны. Найти длины всех трех медиан, если *AB* = *c*.

Дано: CM, BN – медианы, $CM \perp BN$, $AB = c$.
Найти: BN, CM, AK.



Решение:
Так как $CM \perp BN$, то CO – высота, опущенная из прямого угла в треугольнике CNB, значит, $CO^2 = BO \cdot ON$, $CO = 2OM$, $ON = \frac{1}{2}BO$, т. е. $(2OM)^2 = BO \cdot \frac{1}{2}BO$, $4OM^2 = \frac{1}{2}BO^2$, $BO^2 = 8OM^2$. Из треугольника BOM имеем $OM^2 + BO^2 = BM^2$. Получим систему:

$$\begin{cases} BO^2 = 8OM^2 \\ OM^2 + BO^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Решаем ее: $OM^2 + 8OM^2 = \frac{c^2}{4}$, $9OM^2 = \frac{c^2}{4}$, $OM^2 = \frac{c^2}{36}$, $OM = \frac{c}{6}$. $BO = \sqrt{8 \cdot \frac{c^2}{36}}$, $BO = \frac{c}{3}\sqrt{2}$.

А так как $CM = 3OM$, то $CM = \frac{c}{2}$. $BN = 1{,}5BO$, $BN = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}c$, $BN = \frac{\sqrt{2}}{2}c$.

Найдем третью медиану AK из треугольника KCA. $AK = \sqrt{AC^2 + KC^2}$. Так как $KC = \frac{1}{2}BC = MN$, то из Δ OMN имеем $MN = \sqrt{OM^2 + ON^2}$.

$MN = \sqrt{\left(\frac{c}{6}\right)^2 + \left(\frac{c\sqrt{2}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{c^2}{36} + \frac{2c^2}{36}} = \frac{c}{6}\sqrt{3}$. AC найдем из треугольника ABC:

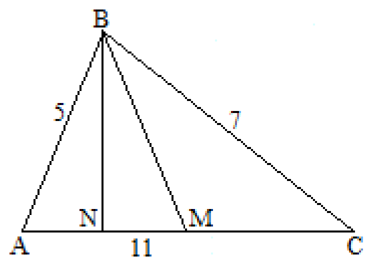
$AC = \sqrt{AB^2 - CB^2}$, $AC = \sqrt{c^2 - \left(\frac{c\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{c^2 - \frac{3c^2}{9}} = \frac{c}{3}\sqrt{6}$, следовательно,

$AK = \sqrt{\frac{6c^2}{9} + \frac{3c^2}{36}} = \sqrt{\frac{27c^2}{36}} = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{c}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}c$; $\frac{c\sqrt{3}}{2}$.

16. Стороны треугольника равны 5 см, 7 см, 11 см. Найти медиану, проведенную к наибольшей стороне.

Дано: AB = 5 см, BC = 7 см, AC = 11 см, BM – медиана.
Найти: BM.



Решение:

Проведем высоту *BN*. Рассмотрим Δ *NBM*: $BM = \sqrt{NM^2 + NB^2}$. Обозначим $NM = x$, тогда из Δ *ABN*: $BN^2 = AB^2 - AN^2$, а из Δ BNC: $BN^2 = BC^2 - NC^2$, т. е. получим $AB^2 - AN^2 = BC^2 - NC^2$.

$25 - (5{,}5 - x)^2 = 49 - (5{,}5 + x)^2$.

Решая полученное уравнение, получим, что $x = \frac{12}{11}$, $NM = \frac{12}{11}$. $BN^2 = 25 - \left(5{,}5 - \frac{12}{11}\right)^2 = \frac{2691}{484}$, значит, $BM = \sqrt{\frac{2691}{484} + \frac{144}{121}} = \sqrt{\frac{3267}{484}} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

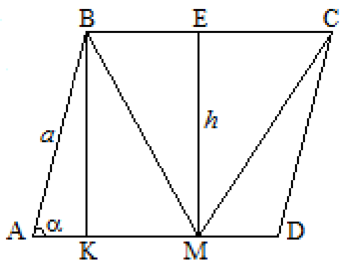
17. На стороне *AD* ромба *ABCD* взята точка *M*, причем $MD = \frac{3}{10}AD$ и $BM = MC = 11$ см. Найдите площадь треугольника *BCM*.

Дано: *ABCD* – ромб,

$MD = \frac{3}{10}AD$,

$BM = MC = 11$ см.

Найти: $S_{\Delta BCM}$



Решение:

$S_{\Delta BCM} = \frac{1}{2} BC \cdot ME$. Рассмотрим Δ *ABM* и Δ *MCD*. По теореме косинусов: $MB^2 = AB^2 + AM^2 - 2AB \cdot AM \cdot \cos\alpha$,

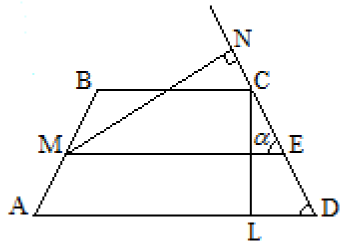
$MC^2 = MD^2 + CD^2 + 2MD \cdot CD \cdot \cos\alpha$. Обозначим сторону ромба $AB = a$, тогда $121 = a^2 + (0{,}7a)^2 - 2a \cdot 0{,}7a \cdot \cos\alpha$ (∗), $121 = a^2 + (0{,}3a)^2 + 2a \cdot 0{,}3a \cdot \cos\alpha$. Отсюда следует, что $a^2 + 0{,}49a^2 - 1{,}4a^2 \cdot \cos\alpha = a^2 + 0{,}09a^2 + 0{,}6a^2 \cdot \cos\alpha$, $1{,}49 - 1{,}4\cos\alpha = 1{,}09 + 0{,}6\cos\alpha$, $2\cos\alpha = 0{,}4$, $\cos\alpha = 0{,}2$. Подставляя найденное значение $\cos\alpha = 0{,}2$ в (∗), имеем: $121 = a^2 + 0{,}49a^2 - 1{,}4a^2 \cdot 0{,}2$. Отсюда $a^2 = 100$, $a = 10$, т. е. длина стороны ромба равна 10. Из Δ *ABK*: $\sin\alpha = \frac{h}{a}$, $h = a \cdot \sin\alpha$, $h = 10 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = 10 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = 10 \cdot \sqrt{\frac{24}{25}} = 10 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5}$, $h = 4\sqrt{6}$.

Следовательно, $S_{\Delta BMC} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{6} \cdot 10 = 20\sqrt{6}$.

Ответ: $20\sqrt{6}$.

18. В трапеции длина основания равна $2a$, длины всех остальных сторон этой трапеции равны a. Найдите расстояние от середины одной боковой стороны до другой боковой стороны.

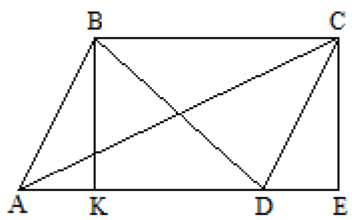
Дано: $ABCD$ – трапеция, $AB = BC = CD = a$, $AD = 2a$, $BN \perp CD$, $AM = MB$.
Найти: MN.



Решение:
Из точки M проведем прямую, параллельную AD, ME будет средней линией трапеции. $ME = \dfrac{BC + AD}{2}$, т. е. $ME = \dfrac{a + 2a}{2} = \dfrac{3}{2}a$. Рассмотрим прямоугольный треугольник NLD. $CL \perp AD$, $\cos\angle ADC = \dfrac{LD}{ND}$, $\cos\angle ADC = \dfrac{\cancel{a}/2}{a} = \dfrac{1}{2}$, $\angle ADC = 60^0$. Следовательно, и $\angle MEN = 60^0$. Если в треугольнике MEN $\angle MEN = 60^0$, то, следовательно, $\angle NME = 30^0$ и $NE = \dfrac{1}{2}ME$, как сторона, лежащая против угла в 30^0. Используя теорему Пифагора, имеем $MN = \sqrt{ME^2 - NE^2}$, т. е. $MN = \sqrt{\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{3a}{4}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{27a^2}{16}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}a$.
Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a$.

19. Найдите площадь параллелограмма, если длина одной из сторон равна 51 см, а длины диагоналей равны 40 см и 74 см.

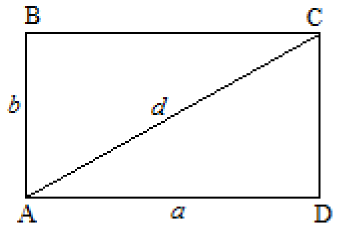
Дано: $ABCD$ – параллелограмм, $AD = 51$ см, $BD = 40$ см, $AC = 74$ см.
Найти: S.



Решение:
$S = AD \cdot BK$, $BK = h$. Из Δ DBK: $h^2 = DB^2 - DK^2$.
Из Δ ACE: $h^2 = AC^2 - KE^2$. Отсюда следует по теореме Пифагора: $40^2 - (51 - x)^2 = 74^2 - (51 + x)^2$, где $AK = DE = x$.
$40^2 - 51^2 + 2 \cdot 51x - x^2 = 74^2 - 51^2 - 2 \cdot 51x - x^2$, $204x = 74^2 - 40^2$, $204x = 3876$, $x = 19$, т. е. $DK = 19$. А так как $h^2 = DB^2 - DK^2$, то $h = \sqrt{40^2 - (51 - 19)^2}$, $h = \sqrt{40^2 - 32^2}$, $h = \sqrt{576} = 24$.
Следовательно, $S = 51 \cdot 24 = 1224$.
Ответ: 1224.

20. Диагональ прямоугольника равна 5, а разность длин его сторон равна 1. Найдите периметр прямоугольника.

Дано: $ABCD$ – прямоугольник,
AC = 5 см, $AD – AB$ = 1 см,
AC = 74 см.
Найти: P.



Решение:
$P = 2(a+b)$. Так как $d^2 = a^2 + b^2$ (по теореме Пифагора), $a - b = 1$ (по условию), то получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными.

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} = 5 \\ a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 + b \\ (1+b)^2 + b^2 = 25 \end{cases}$$

$(1+b)^2 + b^2 = 25$,

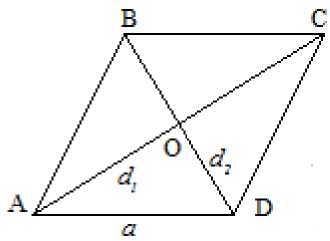
$1 + 2b + b^2 + b^2 = 25$,

$2b^2 + 2b - 24 = 0$, $b^2 + b - 12 = 0$, $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 49$, $\sqrt{D} = 7$, тогда $b_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 7}{2} = -4;\ 3$, т. е. $b = 3$, значит, $a = 4$. $P = 2(4+3) = 14$.

Ответ: 14.

21. Периметр ромба равен 48 см, сумма длин диагоналей равна 26 см. Найдите площадь ромба.

Дано: $ABCD$ – ромб,
$P = 48$ см, $AC + BD = 26$ см.
Найти: S.



Решение:
$S = \dfrac{1}{2} d_1 \cdot d_2$. Так как $P = 48$, то сторона ромба $a = 12$. Используя свойство диагоналей ромба $d_1 \perp d_2$, получим из треугольника OBC: $\left(\dfrac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{d_2}{2}\right)^2 = a^2$. А, используя данное в задаче условие: $d_1 + d_2 = 26$, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными.

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = 26 \\ \left(\dfrac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{d_2}{2}\right)^2 = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = 26 - d_2 \\ {d_1}^2 + {d_2}^2 = 576 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = 26 - d_2 \\ (26 - d_2)^2 + {d_2}^2 = 576 \end{cases}$$

$(26 - d_2)^2 + {d_2}^2 = 576$,

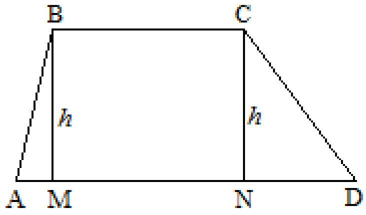
$26^2 - 2 \cdot 26 \cdot d_2 + {d_2}^2 + {d_2}^2 = 576$,

$2{d_2}^2 - 52 d_2 + 100 = 0$, ${d_2}^2 - 26 d_2 + 50 = 0$, $d_2 = 13 \pm \sqrt{169 - 50}$, $d_2 = 13 \pm \sqrt{119}$. Следовательно, $d_1 = 26 - \left(13 \pm \sqrt{119}\right) = 13 \mp \sqrt{119}$, т. е. если $d_2 = 13 + \sqrt{119}$, то $d_1 = 13 - \sqrt{119}$ или наоборот. Отсюда получаем, что $S = \dfrac{1}{2}\left(13 - \sqrt{119}\right)\left(13 + \sqrt{119}\right) = \dfrac{1}{2}(169 - 119) = 25$.

Ответ: 25.

22. Найти площадь трапеции, у которой основания равны 16 см и 44 см, а боковые стороны 17 см и 25 см.

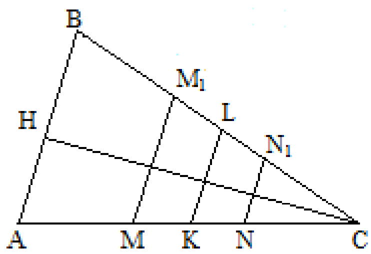
Дано: ABCD – трапеция, AB = 17 см, BC = 16 см, CD = 25 см, AD = 44 см.
Найти: S.



Решение:
$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot h$. Из треугольника *CND* имеем $h^2 = CD^2 - ND^2$. Из треугольника *ABM* имеем $h^2 = AB^2 - AM^2$. Обозначим $AM = x$, тогда $ND = 44 - 16 - x$ и получим $CD^2 - ND^2$ $= AB^2 - AM^2$, т. е. $25^2 - (28 - x)^2 = 17^2 - x^2$, $25^2 - 28^2 + 2 \cdot 28x - x^2 = 17^2 - x^2$, $56x = 448$, $x = 8$, $AM = 8$ и $h = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{289 - 64} = 15$. Следовательно, $S = \frac{16 + 44}{2} \cdot 15$. $S = 450$.
Ответ: 450.

23. Стороны треугольника разделены на три равные части, и через точки деления проведены прямые, параллельные третьей стороне. Найти площадь трапеции, заключенной между ними, если площадь треугольника равна 93.

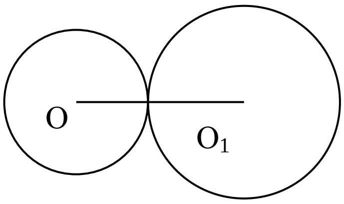
Дано: ABC – треугольник,
$BM_1=M_1N_1=N_1C$,
$MM_1 \parallel NN_1 \parallel AB$.
Найти: $S_{MM_1N_1N}$



Решение:
$S = \frac{MM_1 + NN_1}{2} \cdot h = KL \cdot h$, где KL – средняя линия трапеции и $KL = \frac{MM_1 + NN_1}{2}$, но KL является и средней линией треугольника *ABC*, т. е. $KL = \frac{1}{2}AB$. А так как $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CH = KL \cdot CH = 93$, где CH – высота треугольника *ABC*, то площадь трапеции $S_{MM_1N_1N} = 31$, потому что $h = \frac{1}{3}CH$ (по свойствам треугольника и по условию).
Ответ: 31.

24. Даны две касающиеся окружности с площадями 32π и 8π. Найдите квадрат расстояния между центрами окружностей.

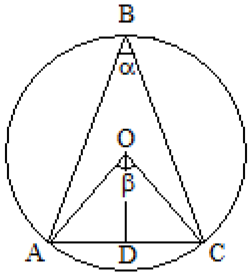
Дано: $S_1 = 8\pi$, $S_2 = 32\pi$.
Найти: $OO_1^{\ 2}$



Решение:
Так как площадь круга $S = \pi R^2$, то $S_1 = \pi R_1^{\ 2}$ и $S_2 = \pi R_2^{\ 2}$, т. е. $8\pi = \pi R_1^{\ 2}$, $R_1 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ и $32\pi = \pi R_2^{\ 2}$, $R_2 = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Значит, $OO_1 = R_1 + R_2 = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$, тогда $OO_1^{\ 2} = 72$.
Ответ: 72.

25. Угол α, вписанный в окружность, опирается на хорду длиной *a*. Найдите длину окружности.

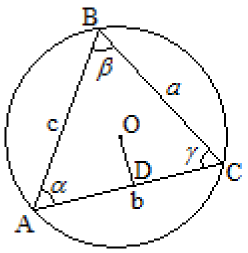
Дано: ∠α – вписанный угол,
AC = *a*.
Найти: L.



Решение:
L – длина окружности, $L = 2\pi R$. Так как угол α вписан в окружность, то он измеряется половиной дуги, на которую опирается, тогда центральный угол $\beta = 2\alpha$. Рассмотрим равнобедренный треугольник *AOC*, $AO = CO = R$, проведем в нем высоту *OD* (она совпадает с медианой и биссектрисой) и получим $\sin\alpha = \dfrac{a/2}{R}$, т.е. $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$. Следовательно, $L = 2\pi \cdot \dfrac{a}{2\sin\alpha} = \dfrac{\pi a}{\sin\alpha}$.
Ответ: $\dfrac{\pi a}{\sin\alpha}$.

26. В окружность, длина которой равна *l*, вписан треугольник с углами α и β. Определить стороны треугольника.

Дано:∠BAC=α, ∠ABC=β, L=*l*.
Найти: a, *b*, *c*.



Решение:
Используя теорему синусов, получим $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$, где R – радиус описанной окружности. Отсюда $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$, $a = 2R\sin\alpha$; $\dfrac{b}{\sin B} = 2R$, $b = 2R\sin\beta$. А так как

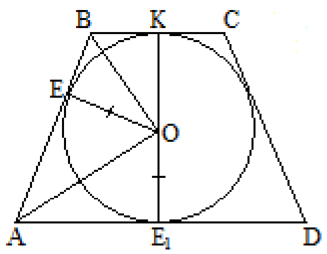
$\angle C = 180^0 - (\alpha+\beta)$, то $\sin\gamma = \sin(180^0 - (\alpha+\beta)) = \sin(\alpha+\beta)$, то, следовательно, $\dfrac{c}{\sin(\alpha+\beta)} = 2R$, $c = 2R\sin(\alpha+\beta)$.

Радиус окружности найдем, используя условия задачи: $L = 2\pi R = l$, значит, $R = \dfrac{l}{2\pi}$, тогда $a = \dfrac{l\sin\alpha}{\pi}$, $b = \dfrac{l\sin\beta}{\pi}$, $c = \dfrac{l\sin(\alpha+\beta)}{\pi}$.

Ответ: $\dfrac{l}{\pi}\sin\alpha$, $\dfrac{l}{\pi}\sin\beta$, $\dfrac{l}{\pi}\sin(\alpha+\beta)$.

27. Найдите площадь равнобедренной трапеции с острым углом α, описанной около окружности, длина которой равна *l*.

Дано: $\angle BAD = \alpha$, $L = l$.
Найти: S.



Решение:

$S = \dfrac{AD+BC}{2}\cdot h$. По условию длина окружности равна l, т. е. $L = 2\pi R = l$, значит, $R = \dfrac{l}{2R}$. Рассмотрим треугольник AE_1O – прямоугольный (радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной) и $\Delta AE_1O = \Delta AEO$, значит, $\angle OAE_1 = \angle OAE = \dfrac{\alpha}{2}$, тогда

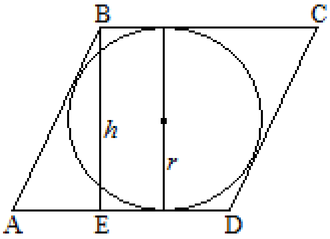
$AE_1 = OE_1\cdot ctg\dfrac{\alpha}{2} = R\cdot ctg\dfrac{\alpha}{2}$, $AE_1 = \dfrac{l}{2\pi}\cdot ctg\dfrac{\alpha}{2}$, $AD = 2AE = \dfrac{l}{\pi}\cdot ctg\dfrac{\alpha}{2}$. По аналогии ΔBEO = ΔBOK, значит, $\angle BEO = \angle KBO = \dfrac{180^0-\alpha}{2} = 90^0 - \dfrac{\alpha}{2}$ и из ΔBOK имеем $ctg\left(90^0 - \dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{BK}{KO}$, $BK = KO\cdot ctg\left(90^0-\dfrac{\alpha}{2}\right) = R\cdot tg\dfrac{\alpha}{2}$, $BK = \dfrac{l}{2\pi}\cdot tg\alpha$, $BC = 2BK = \dfrac{l}{\pi}\cdot tg\dfrac{\alpha}{2}$. Следовательно,

$$S = \left(\frac{l}{\pi}ctg\frac{\alpha}{2} + \frac{l}{\pi}tg\frac{\alpha}{2}\right)\cdot R = \frac{lR}{\pi\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{l\cdot l}{2\pi^2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} == \frac{l^2}{\pi^2\sin\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{l^2}{\pi^2\sin\alpha}$.

28. В ромб с острым углом 30^0 вписан круг. Площадь круга равна Q. Найдите площадь ромба.

Дано: $\angle BAD = 30^0$, $S_{кр} = Q$.
Найти: S_{ABCD}.



Решение:

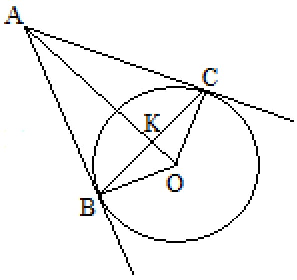
$S_{кр} = \pi r^2 = Q$ (по условию), значит, $r = \sqrt{\dfrac{Q}{\pi}}$, $h = 2r = 2\cdot\sqrt{\dfrac{Q}{\pi}}$. Рассмотрим треугольник ABE, $\angle BAE = 30^0$, $h = BE = \dfrac{1}{2}AB$, следовательно, $2\cdot\sqrt{\dfrac{Q}{\pi}} = \dfrac{1}{2}AB$, $AB = 4\cdot\sqrt{\dfrac{Q}{\pi}}$. А так как $ABCD$ – ромб, то $AB = AD$ и $S = 8\cdot\dfrac{Q}{\pi}$ или $S = AD\cdot AB\cdot\sin 30^0$,

$$S = \left(4\sqrt{\frac{Q}{\pi}}\right)^2\cdot\frac{1}{2} = 16\cdot\frac{Q}{\pi}\cdot\frac{1}{2} = 16\cdot\frac{Q}{\pi}\cdot\frac{1}{2} = \frac{8Q}{\pi}.$$

Ответ: $\dfrac{8Q}{\pi}$.

29. Из точки А к окружности проведены две касательные. Расстояния от точки А до точек касания равны 12, а расстояние между точками касания равно 14,4. Найдите радиус окружности.

Дано: $AB = AC = 12$, $BC = 14{,}4$.
Найти: R.



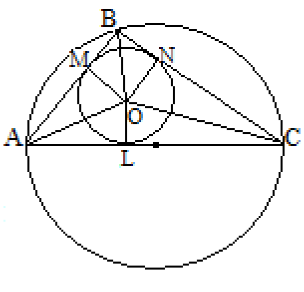
Решение:

Так как $\Delta AKC \sim \Delta OAC$, то $\dfrac{AC}{AO} = \dfrac{KC}{OC} = \dfrac{AK}{AC}$. AK найдем из ΔAKC по теореме Пифагора: $AK = \sqrt{AC^2 - KC^2}$, $AK = \sqrt{12^2 - 7{,}2^2}$, $AK = 9{,}6$. Тогда $\dfrac{9{,}6}{12} = \dfrac{7{,}2}{R}$, $R = \dfrac{12\cdot 7{,}2}{9{,}6}$, $R = 0{,}9$.

Ответ: 0,9.

30. Найти площадь прямоугольного треугольника, если диаметр описанной окружности равен 15, а радиус вписанной окружности равен 3.

Дано: $AC = 15$, $r = 3$.
Найти: $S_{\Delta ABC}$



Решение:
$\angle ABC$ опирается на диаметр, значит, равен 90^0. $OM \perp AB$, $OL \perp AC$ и $ON \perp BC$ (радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной), следовательно, $OMBN$ – квадрат со стороной равной 3. Так как центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис, то $\Delta AOM = \Delta AOL$, $\Delta OLC = \Delta ONC$, $\Delta OMB = \Delta ONB$. Если обозначим $AM = x$, то $AB = x + 3$, $AL = AM = x$, $LC = 15 - x$, $LC = NC$, $BC = NC + BN = 15 - x + 3 = 18 - x$. Следовательно, используя теорему Пифагора, имеем $AC^2 = AB^2 + BC^2$, $15^2 = (x+3)^2 + (18-x)^2$. Раскрыв скобки и решив квадратное уравнение, получим $x = 9$, т. е. $AB = 12$, $BC = 9$. $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC$, $S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 54$.
Ответ: 54.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти диаметр описанной около равнобедренного треугольника окружности, если длина основания равна 6, длина боковой стороны равна 5.

2. Найти длину средней линии равнобедренного треугольника, если угол при вершине равен 60^0, а длина боковой стороны равна 10.

3. В прямоугольной трапеции высота равна меньшему основанию и равна 8. Найти квадрат меньшей диагонали.

4. В равнобедренном треугольнике длина основания относится к длине боковой стороны как 5:4, периметр равен 13. Найти длину основания.

5. Площадь равнобедренного прямоугольного треугольника равна 36. Найти длину гипотенузы.

6. Сторона равностороннего треугольника, вписанного в окружность, равна a. Вычислить площадь квадрата, вписанного в окружность.

7. В трапеции длины оснований равны 5 и 15, а длины диагоналей равны 12 и 16. Найти площадь.

8. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит противолежащий катет на отрезки с длинами 4 и 5. Найти площадь треугольника.

9. Найти площадь ромба, периметр которого равен 12, а сумма длин диагоналей равна 8.

10. В треугольнике ABC на стороне $AB = 12$ см выбрана точка D так, что $AD = 3$ см. Найти площадь треугольника ACD, если $\angle BAC = 30^0$ и $\angle ACD = \angle ABC$.

11. Около равнобедренной трапеции с длинами оснований 8 см и 10 см описана окружность с центром, лежащим на большем основании. Найти площадь трапеции.

12. Найти площадь параллелограмма с острым углом 45^0, если его большая диагональ равна 13 см, а меньшая высота 5 см.

13. Треугольник BMP с углом MBP, равным 45^0, вписан в окружность радиуса $6\sqrt{2}$. Найти длину медианы BK, если луч BK пересекает окружность в точке C и $CK = 3$.

14. Найти периметр правильного восьмиугольника $ABCDEFGH$, если площадь четырехугольника $ABEG$ равна $8\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$.

15. В параллелограмме $ABCD$ со стороной $AD = 25$ см проведена биссектриса угла A, проходящая через точку P на стороне BC. Найти периметр трапеции $APCD$, если ее средняя линия равна 15 см, а диагональ AC равна $5\sqrt{46}$.

16. В трапеции $ABCD$ угол при вершине A прямой, а угол при вершине D равен 30^0. Окружность, центр которой лежит на стороне AD, касается прямых AB, BC, CD. Найти площадь трапеции, если известно, что радиус окружности равен R.

17. На окружности по разные стороны от диаметра AC расположены точки B и D. Известно, что $AB = \sqrt{6}$, $CD = 1$, а площадь треугольника ABC втрое больше площади треугольника BCD. Найти радиус окружности.

18. Около прямоугольного треугольника ABC описана окружность. Расстояния от концов гипотенузы AB до прямой, касающейся окружности в точке C, соответственно равны m и n. Найти катеты AC и BC.

19. Две окружности радиусов R и r ($R > r$) имеют внешнее касание в точке A. Через точку B, взятую на большей окружности, проведена прямая, касающаяся меньшей окружности в точке C. Найти длину отрезка BC. Если хорда AB имеет длину, равную a.

20. Около окружности описана равнобедренная трапеция $ABCD$. Боковая сторона AB касается окружности в точке M, а основание AD – в точке N. Отрезки MN и AC пересекаются в точке P так, что $NP : PM = 2$. Найти отношение $AD : BC$.

Ответы: 1) 6,25; 2) 5; 3) 128; 4) 5; 5) 12; 6) $\frac{2a^2}{3}$; 7) 96; 8) 54; 9) 7; 10) 4,5; 11) 27; 12) 35; 13) 12; 14) 32; 15) 80;

16) $\frac{R^2}{2}\left(6-\sqrt{3}\right)$; 17) 1,5; 18) $\sqrt{m^2+mn}$, $\sqrt{n^2+mn}$;

19) $a\sqrt{\frac{R+r}{R}}$; 20) 3.

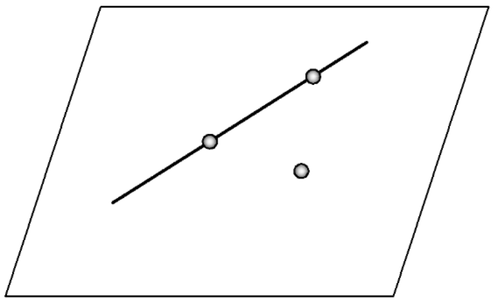
Часть II. Стереометрия

Основные определения, теоремы и формулы, которые необходимы при решении задач

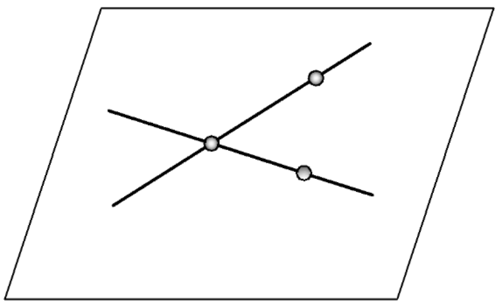
Аксиомы:
1. В каждой плоскости пространства выполняются все положения планиметрии.
2. Прямая, проходящая через две точки плоскости, лежит в этой плоскости.
3. Через три точки можно провести только одну плоскость.
4. Две различные плоскости, имеющие одну общую точку, пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

Следствия из третьей аксиомы:

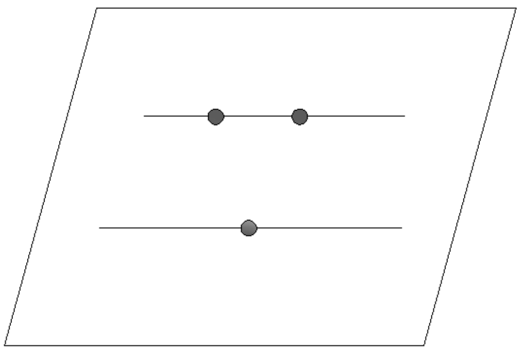
а) через прямую и точку вне ее можно провести плоскость и только одну;



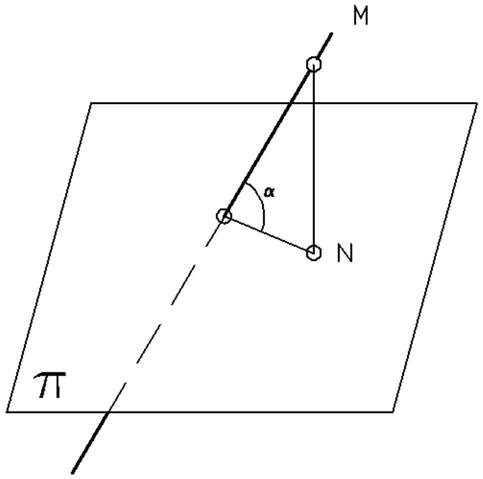
б) через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость и только одну;



в) через две параллельные прямые можно провести плоскость и только одну.

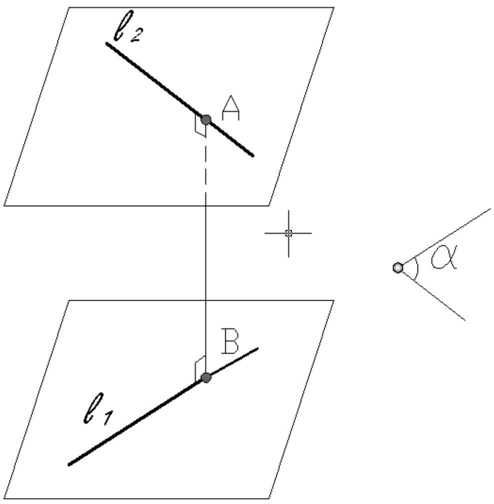


Угол между прямой и плоскостью



Опр. Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

Скрещивающиеся прямые

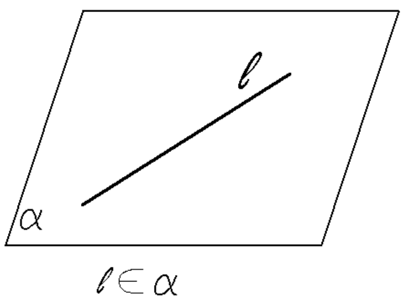


$l_1 \nparallel l_2$, $l_1 \cap l_2 = \varnothing$

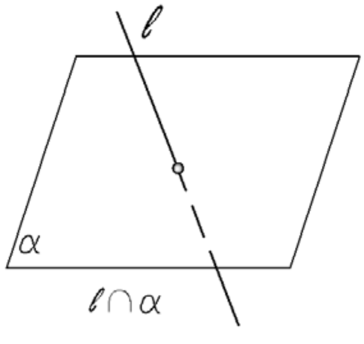
AB – расстояние между прямыми (общий перпендикуляр);

α – угол между прямыми.

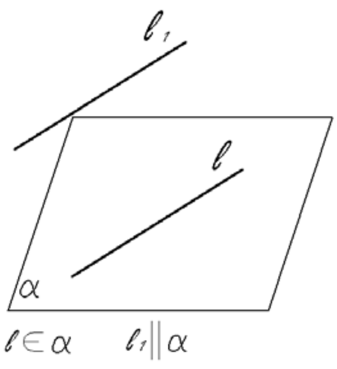
Взаимное расположение прямой и плоскости



а)



б)

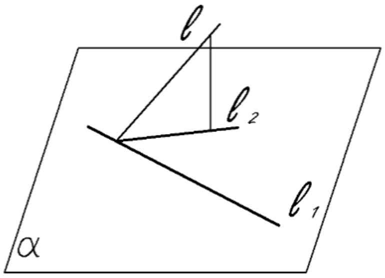


в)

Теорема. Прямая и плоскость параллельны, если прямая параллельна какой-либо прямой в этой плоскости.

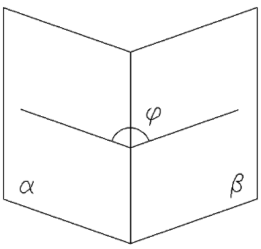
Теорема. Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым в этой плоскости.

Теорема (о трех перпендикулярах). Если наклонная прямая l перпендикулярна прямой l_1 в плоскости α , то и ее проекция l_2 также перпендикулярна l_1 .



Опр. Фигура, образованная двумя непараллельными полуплоскостями, исходящими из одной прямой, называется двугранным углом. Общая прямая называется ребром, а полуплоскости – гранями.

Двугранный угол измеряется линейным. Стороны линейного угла перпендикулярны ребру.



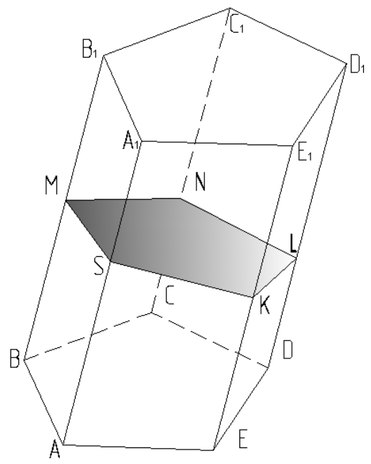
Опр. Две плоскости называются перпендикулярными, если они образуют прямой двугранный угол.

Формулы объемов и площадей поверхностей

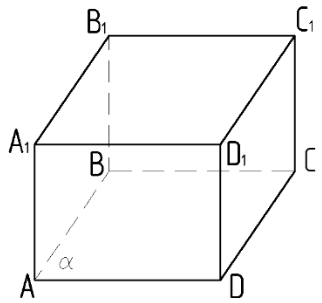
Тело, ограниченное плоскими многоугольниками, называется многогранником.

Призма

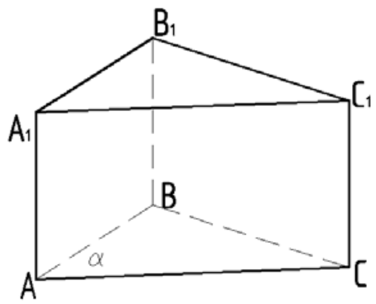
Опр. Призмой называется многогранник, у которого две грани – равные многоугольники с соответственно равными сторонами, а остальные грани – параллелограммы.



Наклонная призма.
Плоскость $MNLKS$ – перпендикулярное сечение.
$S_{бок} = P_{перп.\ сечения} \cdot AA_1$
$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$
$V = S_{осн} \cdot H$
$V = S_{перп.\ сечения} \cdot AA_1$

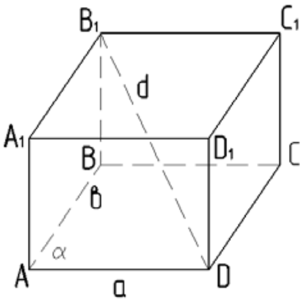


Прямая призма.
$AA_1 \perp \alpha$
$S_{бок} = P_{осн} \cdot H$
$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$
$V = S_{осн} \cdot H,\ H = AA_1$



Правильная n-угольная призма.
В основании призмы правильный n-угольник, $AA_1 \perp \alpha$
$S_{бок} = P_{осн} \cdot H = n \cdot a \cdot AA_1,\ a$ – сторона основания
$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$
$V = S_{осн} \cdot H,\ H = AA_1$

Параллелепипед
Параллелепипед – это призма, у которой основания – параллелограммы.
Наклонный параллелепипед – все грани являются параллелограммами.
Прямой параллелепипед – боковые грани – прямоугольники, основания – параллелограммы.
Прямоугольный параллелепипед – все грани – прямоугольники.
Правильный параллелепипед – боковые грани – прямоугольники, основания – квадраты.
Куб – все грани – квадраты (частный случай правильного параллелепипеда).
В параллелепипеде:
а) противоположные грани равны и параллельны;
б) все диагонали пересекаются в одной точке и делятся ею пополам;
в) точка пересечения диагоналей является центром симметрии.
В прямоугольном параллелепипеде квадрат длины диагонали равен сумме квадратов трех его измерений, и все четыре его диагонали равны.

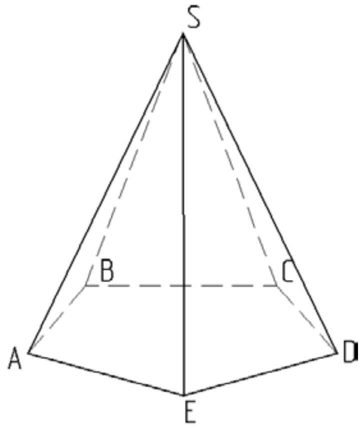


$$d^2 = AD^2 + AB^2 + AA_1^{\;2} =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2$$

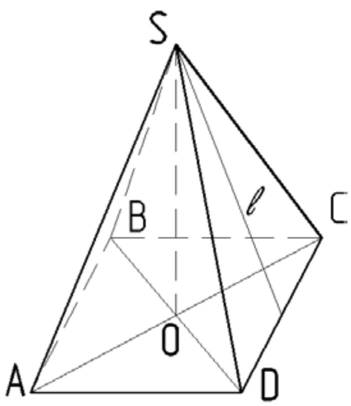
У параллелепипеда боковая поверхность $S_{бок}$, полная поверхность $S_{полн}$ и объем V вычисляются так же, как и у призмы.

Пирамида

Пирамида – многогранник, одна грань которого произвольный многоугольник, а остальные грани – треугольники, имеющие общую вершину.



Пирамида называется правильной, если в основании – правильный n-угольник, и вершина проектируется в центр основания.



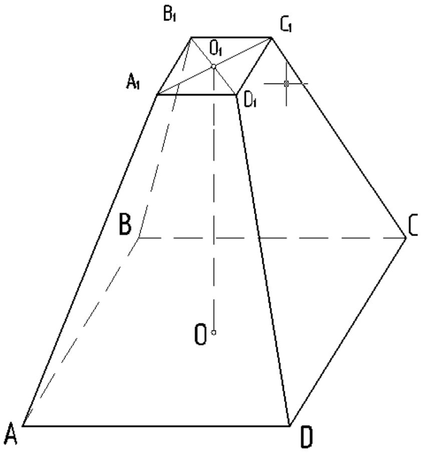
$S_{бок} = \Sigma S_{\Delta\text{-ков}} = \dfrac{1}{2} P_{осн} \cdot l$, где l – апофема (высота боковой грани)

$S_{бок} = \dfrac{1}{2} nal$

$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$

$V = \dfrac{1}{3} S_{осн} \cdot H,\ H = SO$

Усеченная правильная пирамида



Пл. $A_1B_1C_1D_1 \parallel ABCD$

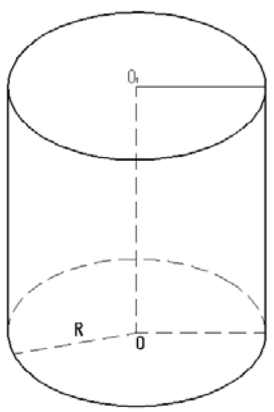
$S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \cdot l$

$S_{полн} = S_{бок} + S_1 + S_2$, где P_1, P_2 – периметры верхнего и нижнего оснований, а S_1, S_2 – их площади.

$V = \frac{1}{3} H \cdot \left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right)$, где H – высота пирамиды, $H = OO_1$.

Прямой круговой цилиндр

Прямой круговой цилиндр – это тело, полученное вращением прямоугольника вокруг оси, совпадающей с одной из его сторон. Основанием является круг.



$S_{бок}$ разворачивается в прямоугольник со сторонами H и $2\pi R$, т. е.

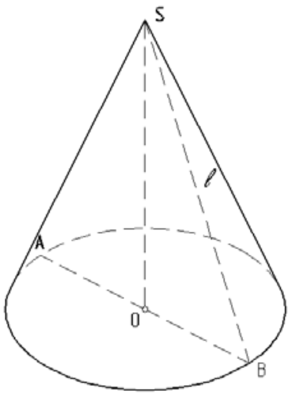
$S_{бок} = 2\pi R \cdot H$, где $H = OO_1$

$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн} = 2\pi R \cdot H + 2\pi R^2 =$
$= 2\pi R(H + R)$

$V = S_{осн} \cdot H = \pi R^2 H$, H – высота.

Прямой круговой конус

Прямой круговой конус – тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, совпадающей с одним из его катетов.



$S_{бок} = \lim\limits_{n \to \infty} S_{бок.пирамиды} =$

$= \lim\limits_{n \to \infty} P_{осн} \cdot \frac{1}{2} l = 2\pi R \cdot \frac{1}{2} l = \pi R l$,

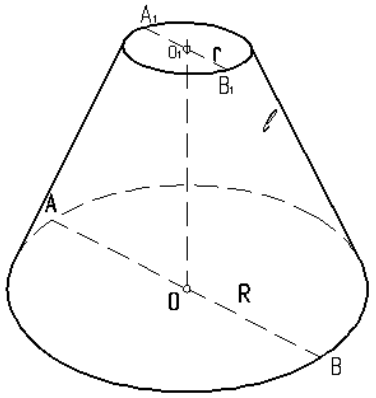
где l – образующая

$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} = \pi R l + \pi R^2 =$
$= \pi R(l + R)$

$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$, H – высота,

$H = SO$

Усеченный конус



$S_{бок} = \pi(R+r)\cdot l$

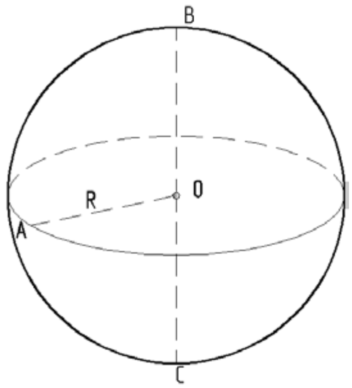
$S_{полн} = S_{бок} + S_1 + S_2 =$

$= \pi(R+r) + \pi R^2 + \pi r^2$

$V = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + Rr + r^2\right)$, где

$H = OO_1$

Сфера и шар

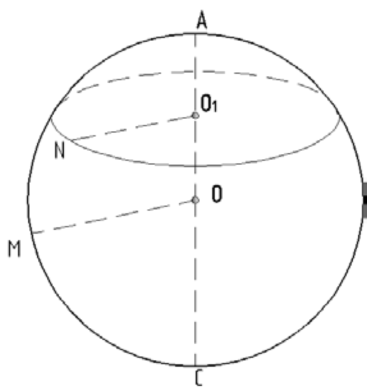


$AO = R,\ CB = D = 2R$

$S_{сферы} = 4\pi R^2 = \pi D^2 \approx 12{,}57R^2$

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3 \approx 4{,}19R^3$

Шаровой сегмент



$H = AO_1,\ MO = R,\ NO_1 = r$

$S_{бок} = 2\pi R\cdot H = \pi DH = \pi\left(r^2 + H^2\right)$

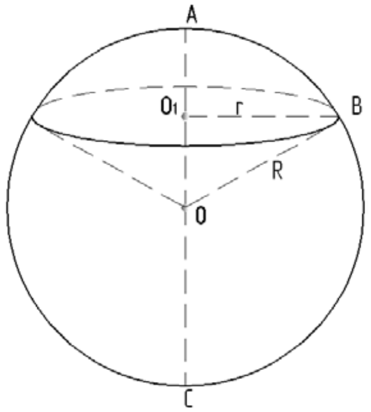
$S_{полн} = 2\pi RH + \pi r^2 =$

$= \pi\left(r^2 + H^2\right) + \pi r^2 = \pi\left(2r^2 + H^2\right)$

$V = \pi H^2\left(R - \frac{1}{3}H\right) = \frac{\pi H^2}{6}\left(H^2 + 3r^2\right)$

$r^2 = H(2R - H)$

Шаровой сектор



$H = AO_1,\ OB = R,\ O_1B = r$

$S_{полн} = 2\pi RH + \pi rR$

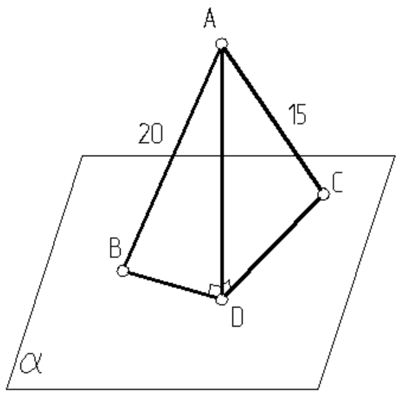
$= \pi R(r + 2H)$

$V = \dfrac{2}{3}\pi R^2 H$

Задачи

1. Из точки A к плоскости α проведены две наклонные AB и AC. Найти расстояние от точки A до плоскости, если AB = 20, AC = 15, а длины проекций относятся как 16:9.

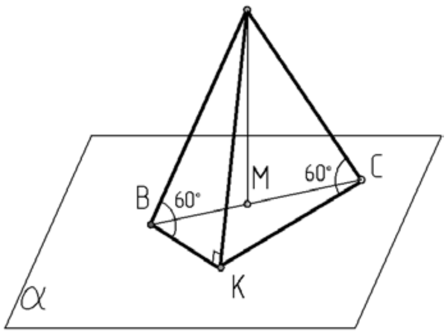
Дано: AB = 20, AC = 15,
$BD : DC$ = 16:9.
Найти: AD.



Решение:
Из треугольника ABD имеем $AD^2 = 20^2 - BD^2$. Из треугольника ADC имеем $AD^2 = 15^2 - DC^2$. Отсюда получим $400 - BD^2 = 225 - DC^2$, а так как $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{16}{9}$, то $BD = 16k$, $DC = 9k$, т. е. $400 - 256k^2 = 225 - 81k^2$, $175k^2 = 175$, $k = 1$. Значит $BD = 16$, $DC = 9$. Следовательно, $AD = \sqrt{400 - 256} = \sqrt{144} = 12$.
Ответ: 12.

2. Наклонные AB и AC к плоскости α образуют с плоскостью углы по 60^0. Расстояние от точки A до плоскости равно $10\sqrt{3}$, BC = 10. Найти расстояние от точки A до BC.

Дано: $BC = 10$, $AK = 10\sqrt{3}$,
$\angle ABK = \angle ACK = 60^0$.
Найти: AM.



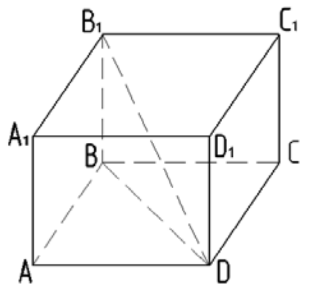
Решение:

Из треугольника ABK имеем $BK = \dfrac{1}{2}AB$ (сторона, лежащая против угла в 30^0) и получаем $BK^2 + AK^2 = AB^2$, $BK^2 + AK^2 = 4BK^2$, $3BK^2 = AK^2$, $3BK^2 = \left(10\sqrt{3}\right)^2$, $BK = 10$, значит, $AB = 20$. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC. AM – медиана и высота, тогда из треугольника ABM имеем $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{400 - 25} = \sqrt{375} = 5\sqrt{15}$, где $BM = \dfrac{1}{2}BC = 5$.

Ответ: $5\sqrt{15}$.

3. Найти объем прямого параллелепипеда, если стороны основания 3 см и 4 см, угол между ними равен 30^0, а одна из диагоналей имеет длину 6 см и образует с плоскостью основания угол 30^0.

Дано: $AD = 3$, $AB = 4$, $\angle BAD = \angle BDB_1 = 30^0$, $BB_1 = 6$
Найти: V.



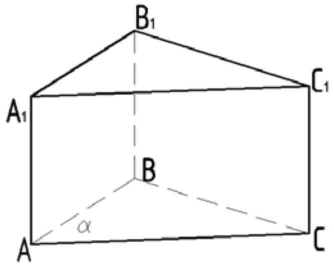
Решение:

$V = S_{осн} \cdot H$, $H = AA_1 = BB_1$, $S = AD \cdot AB \cdot \sin\angle BAD$, т. е. $S = 3 \cdot 4 \cdot \sin 30^0 = 12 \cdot \dfrac{1}{2} = 6$ (см²). Высоту H найдем из ΔB_1BD, что $\sin\angle BDB_1 = \dfrac{BB_1}{B_1D}$, откуда $BB_1 = B_1D \cdot \sin\angle BDB_1$, значит, $BB_1 = 6 \cdot \sin 30^0 = 6 \cdot \dfrac{1}{2} = 3$ (см). Следовательно, $V = 6 \cdot 3 = 18$ (см).

Ответ: 18.

4. Боковая поверхность правильной треугольной призмы равна 12 см, площадь основания равна $\sqrt{3}$ см. Найти объем призмы.

Дано: $S_{бок} = 12$, $S_{осн} = \sqrt{3}$.
Найти: V.



Решение:

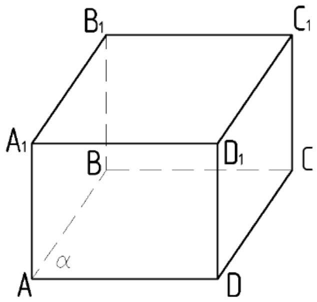
$V = S_{осн} \cdot H$, $S_{бок} = P_{осн} \cdot H$. Так как $S_{бок} = 12$ (по условию), то $P_{осн} \cdot H = 12$, значит $H = \frac{12}{P}$.

Используя формулу $S_{\Delta} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, получим длину стороны основания: $\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$, $a^2 = 4$, $a = 2$. Следовательно, $P = 3a$, $P = 6$, поэтому $H = \frac{12}{6}$, $H = 2$. $V = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

5. Боковая поверхность правильной четырехугольной призмы равна 40 см^2, а полная поверхность – 90 см^2. Найти объем призмы.

Дано: $S_{бок} = 40$, $S_{полн} = 90$.
Найти: V.



Решение:

$V = S_{осн} \cdot H$, $S_{бок} = P_{осн} \cdot H$. $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$. Согласно условию задачи имеем $4a \cdot H = 40$, $4a \cdot H + 2a^2 = 90$, т. е. получим систему:

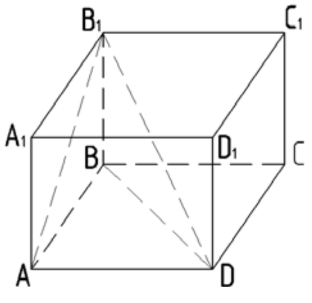
$$\begin{cases} a \cdot H = 10 \\ 2a \cdot H + a^2 = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H = \frac{10}{a} \\ 20 + a^2 = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \\ H = \frac{10}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ H = 2 \end{cases}$$

Так как $S_{осн} = a^2$, то $V = a^2 \cdot H$, $V = 25 \cdot 2 = 50$.

Ответ: 50.

6. Найти объем правильной четырехугольной призмы, диагональ которой равна 5, а диагональ боковой грани равна 4.

Дано: $B_1D = 5$, $AB_1 = 4$.
Найти: V.



Решение:

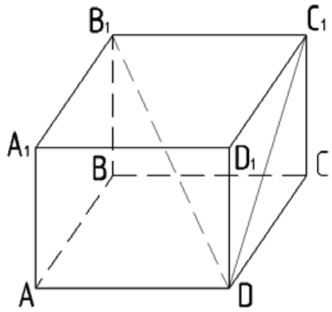
$V = S_{осн} \cdot H$, $H = BB_1$. Из прямоугольного треугольника AB_1B имеем $AB_1^2 = AB^2 + BB_1^2$. Из прямоугольного треугольника BB_1D имеем $B_1D^2 = BD^2 + BB_1^2$. BD находим из треугольника ABD: $BD = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$. Обозначим $AB = a$, $BB_1 = H$. Получим систему:

$$\begin{cases} a^2 + H^2 = 16 \\ \left(a\sqrt{2}\right)^2 + H^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + H^2 = 16 \\ 2a^2 + H^2 = 25 \end{cases}$$

Откуда имеем $a^2 = 9$, $a = 3$, $H = \sqrt{7}$. А так как $S_{осн} = a^2 = 9$ и $H = BB_1 = \sqrt{7}$, то $V = 9\sqrt{7}$.
Ответ: $9\sqrt{7}$.

7. Найти полную поверхность правильной четырехугольной призмы, удвоенная длина диагонали которой равна 7, а диагональ боковой грани равна 2,5.

Дано: $2B_1D = 7$, $DC_1 = 2{,}5$.
Найти: $S_{полн}$.



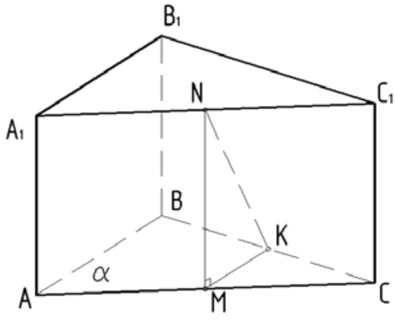
Решение:
$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$, $S_{бок} = P_{осн} \cdot H$, $S_{осн} = a^2$, где $H = AA_1$, $a = AB$. Используя свойство диагонали, имеем $B_1D^2 = a^2 + a^2 + H^2$, т. е. $2a^2 + H^2 = 3{,}5^2$. Из ΔDC_1D_1 имеем $C_1D^2 = D_1D^2 + D_1C_1{}^2$, т. е. $2{,}5^2 = H^2 + a^2$, следовательно, для нахождения H и a получим систему:

$$\begin{cases} 2a^2 + H^2 = 3{,}5^2 \\ a^2 + H^2 = 2{,}5^2 \end{cases}$$

Откуда получаем $a^2 = 6$, $a = \sqrt{6}$, $H = 0{,}5$. Значит, $S_{полн} = 4a \cdot H + a^2 = 4\sqrt{6} \cdot 0{,}5 + \left(\sqrt{6}\right)^2 = 2\sqrt{6} + 6$.
Ответ: $2\sqrt{6} + 6$.

8. В правильной треугольной призме боковое ребро на 50 % больше стороны основания. Расстояние между серединами двух непараллельных ребер оснований равно 5. Вычислить боковую поверхность призмы.

Дано:
$NK = 5$, $AA_1 = 1{,}5AB$.
Найти: $S_{бок}$.



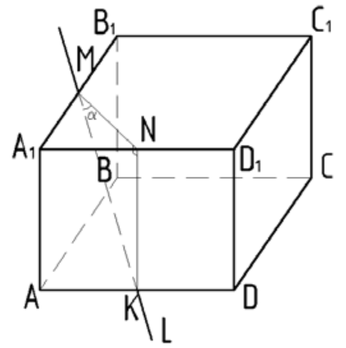
Решение:
$S_{бок} = P_{осн} \cdot H$, где $H = AA_1 = NM$. Так как призма правильная, то в основании равносторонний треугольник, т. е. $AB = BC = AC = a$. Соединим точку N с серединой стороны AC точкой M и рассмотрим ΔMNK. Так как ΔMNK – прямоугольный, то по теореме Пифагора: $NK^2 = MK^2 + MN^2$. $MK = \dfrac{1}{2}AB$ (средняя линия ΔABC), $MK = \dfrac{1}{2}a$. $MN = a + 0{,}5a = 1{,}5a$ (по условию). Следовательно, получаем: $5^2 = (0{,}5a)^2 + (1{,}5a)^2$, т. е. $2{,}5a^2 = 25$, $a^2 = 10$, $a = \sqrt{10}$,

$MN = 1{,}5\sqrt{10}$. Так как площадь правильного треугольника $S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$, то $S_{бок} = \frac{\sqrt{3}\cdot 10}{4}\cdot 1{,}5\sqrt{10} = \frac{15}{4}\sqrt{30}$.

Ответ: $\frac{15}{4}\sqrt{30}$.

9. Дана правильная четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $AB = 4$, $AA_1 = 8$. Прямая L проходит через середины ребер AD и A_1B_1. Найти тангенс угла, образованного этой прямой с плоскостью $A_1B_1C_1D_1$.

Дано: $AB = 4$, $AA_1 = 8$,
$A_1M = MB_1$, $AK = KD$.
Найти: $tg\alpha$.



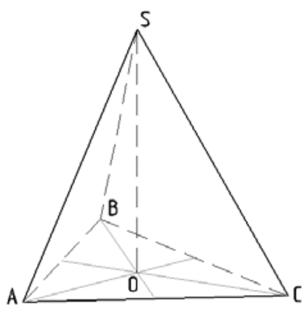
Решение:

Рассмотрим прямоугольный треугольник MNK: $tg\alpha = \frac{KN}{MN}$, $KN = AA_1 = 8$. MN – средняя линия $\Delta A_1B_1D_1$, значит, $MN = \frac{1}{2}B_1D_1$. B_1D_1 найдем из $\Delta A_1B_1D_1$ по теореме Пифагора: $B_1D_1 = \sqrt{A_1B_1^{\,2} + A_1D_1^{\,2}} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, т. к. $A_1B_1 = A_1D_1$ (стороны квадрата $A_1B_1C_1D_1$), то, следовательно, $MN = 2\sqrt{2}$. Тогда $tg\alpha = \frac{8}{2\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2}$.

Ответ: $2\sqrt{2}$.

10. В основании пирамиды треугольник со сторонами 7, 24, 25. Боковые ребра пирамиды равны 25. Найти объем пирамиды.

Дано: $AB = 7$, $BC = 24$,
$AC = 25$ $AS = BS = CS = 25$.
Найти: V.



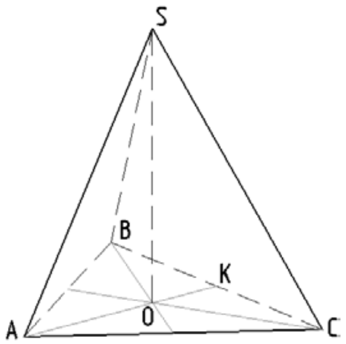
Решение:

$V = \frac{1}{3}S_{осн}\cdot H$. Высоту H найдем из ΔSOC по теореме Пифагора: $H = \sqrt{SC^2 - OC^2}$, где OC – радиус описанной около ΔABC окружности. $R = \frac{abc}{4S}$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p – полупериметр ΔABC. $p=\frac{7+24+25}{2}=28 \Rightarrow S=\sqrt{28\cdot 21\cdot 4\cdot 3}=84$, т. е. $R=\frac{7\cdot 24\cdot 25}{4\cdot 84}=\frac{25}{2}=12{,}5$, значит, $H=\sqrt{25^2-(12{,}5)^2}=12{,}5\sqrt{3}$. $V=\frac{1}{3}\cdot 84\cdot 12{,}5\sqrt{3}=350\sqrt{3}$.

Ответ: $350\sqrt{3}$.

11. Найти квадрат объема правильной треугольной пирамиды, боковое ребро и сторона основания которой соответственно равны 4 и 6.

Дано: $AB=BC=AC=4$
$AS=BS=CS=6$.
Найти: V^2.



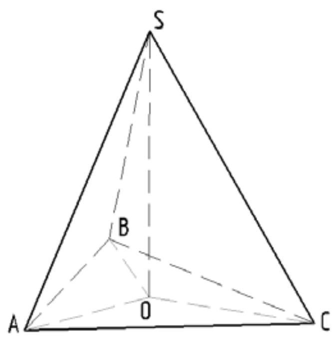
Решение:

$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot H$, $H=SO$. Так как пирамида правильная, то в ее основании – равносторонний треугольник, площадь которого $S=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$, где a – сторона основания, т. е. $S=9\sqrt{3}$. Высоту пирамиды H найдем из ΔASO: $H^2=AS^2-AO^2$, $AO=\frac{2}{3}AK$, AK – высота ΔABC и $AK=\sqrt{AB^2-BK^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, т. е. $AK=\frac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$. $AO=\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$, значит, $H=\sqrt{16-12}=2$. Следовательно, $V=\frac{1}{3}\cdot 9\sqrt{3}\cdot 2=6\sqrt{3}$.

Ответ: $6\sqrt{3}$.

12. В основании пирамиды треугольник со сторонами 6, 8 и 10 см, а все боковые ребра образуют с плоскостью основания углы по 45^0. Найдите объем пирамиды.

Дано: $AB=6$, $BC=8$, $AC=10$
$\angle OAS=\angle OBS=\angle OCS=45^0$.
Найти: V.



Решение:

$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot H$. В основании лежит прямоугольный треугольник, т. к. $6^2+8^2=10^2$, значит, $S=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24$. Высоту найдем из ΔSBO. Это прямоугольный, равнобедренный треугольник, т. к. $\angle SBO = 45^0$ (по условию), значит и $\angle BSO = 45^0$, т. е. $BO = SO, H = BO$. А так как $BO = AO = CO$, что следует из равенства треугольников $\Delta OAS = \Delta OBS = \Delta OCS$ (по гипотенузе и катету), значит, BO является радиусом описанной около ΔABC окружности, и $R = \dfrac{abc}{4S}$, $R = \dfrac{6 \cdot 8 \cdot 10}{4 \cdot 24} = 5$. Следовательно, $V = \dfrac{1}{3} \cdot 24 \cdot 5 = 40$ (см^2).

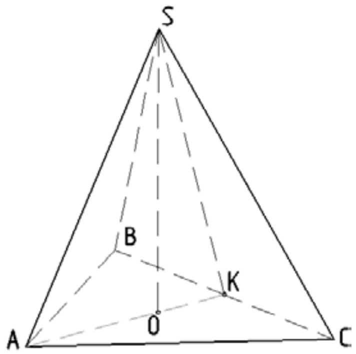
Ответ: 40.

13. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $2\sqrt{3}$. Угол между боковой гранью и плоскостью основания равен 30^0. Найти полную поверхность пирамиды.

Дано: $AB = BC = AC = 2\sqrt{3}$

$\angle SKO = 30^0$.

Найти: $S_{полн}$.



Решение:

$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$, $S_{бок} = \dfrac{1}{2} P \cdot l$, где P – периметр основания, l – апофема (высота боковой грани). $S_{осн} = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$ (площадь равностороннего треугольника), т. е. $S_{осн} = \dfrac{\left(2\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \dfrac{4 \cdot 3\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$. $P_{осн} = 3a = 3 \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$. $l = SK$ найдем из ΔOSK. $\cos 30^0 = \dfrac{OK}{SK}$, т. е. $SK = \dfrac{OK}{\cos 30^0}$. $OK = \dfrac{1}{3} AK$, $AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3$ (высота в ΔABC), значит $OK = \dfrac{1}{3} \cdot 3 = 1$, тогда $SK = \dfrac{1}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, следовательно, $S_{бок} = \dfrac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = 6$,

$S_{полн} = 6 + 3\sqrt{3}$.

Ответ: $6 + 3\sqrt{3}$.

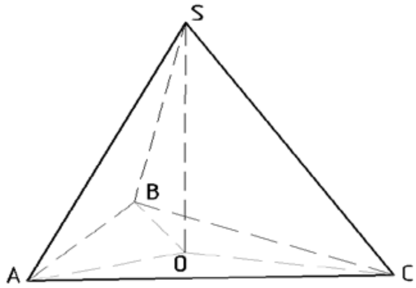
14. В правильной треугольной пирамиде $\angle ASB = \angle BSC = \angle ASC = 90^0$, высота равна $2\sqrt{3}$. Найти объем пирамиды.

Дано: $AB = BC = AC$,

$\angle ASB = \angle BSC = \angle ASC = 90^0$,

$SO = 2\sqrt{3}$.

Найти: V.



Решение:

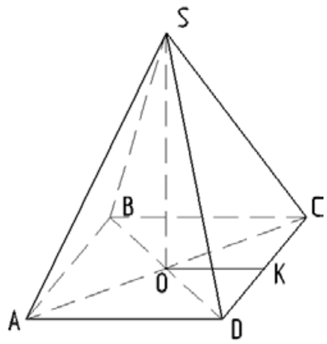
$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot H$. Рассмотрим ΔASB (прямоугольный по условию): если $AS^2+BS^2=AB^2$, $AB=a$, то $2AS^2=a^2$, $AS^2=\frac{a^2}{2}$, $AS=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $AS=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Из равенства треугольников $\Delta ASO=\Delta BSO=\Delta SCO$

(прямоугольные треугольники, равные по гипотенузе и катету) следует, что $AO=BO=CO$, значит точка O – центр описанной окружности, а $AO=R=\frac{abc}{4S}$. Так как для равностороннего треугольника $S=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$, то $R=\frac{a^3}{4\cdot\frac{\sqrt{3}a^2}{4}}=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Получаем из ΔASO: $AS^2+AO^2=SO^2$, $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2, 5a^2=72$, $a=6\sqrt{2}$. Следовательно, $S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{3}\cdot\left(6\sqrt{2}\right)^2}{4}=\frac{72\sqrt{3}}{4}=18\sqrt{3}$. Тогда $V=\frac{1}{3}\cdot18\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}=36$.

Ответ: 36.

15. Найти полную поверхность пирамиды, в основании которой ромб с диагоналями 12 и 16, а высота пирамиды равна 6,4.

Дано: $AC=12$, $BD=16$,
$SO=6{,}4$.
Найти: $S_{полн}$.



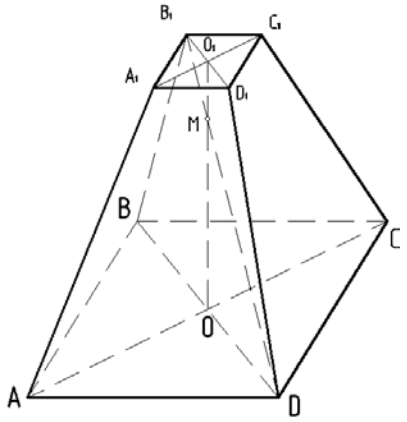
Решение:

$S_{полн}=S_{бок}+S_{осн}$, $S_{осн}=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2=\frac{1}{2}\cdot12\cdot16=96$, $S_{бок}=\frac{1}{2}P\cdot l$, где P – периметр основания, l – апофема (высота боковой грани). $P=4a$, a найдем из ΔCOD: $a^2=\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2$, $a^2=36+64=100$, $a=10$, т. е. $P=40$. Апофему l найдем из ΔOSK: $SK=\sqrt{OS^2+OK^2}$, где OK – высота в ΔCOD. $S_{\Delta COD}=\frac{96}{4}=\frac{1}{2}DC\cdot OK$, т. е. $24=\frac{1}{2}\cdot10\cdot OK$, $OK=\frac{24}{5}=4{,}8$. Следовательно, $l=\sqrt{6{,}4^2+4{,}8^2}=8$, значит, $S_{полн}=\frac{1}{2}\cdot40\cdot8+96=256$.

Ответ: 256.

16. Определить объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее диагональ равна 18 см, а длина сторон основания 14 см и 10 см.

Дано: $AD = 14$, $A_1D_1 = 10$,
$B_1D = 18$.
Найти: V.



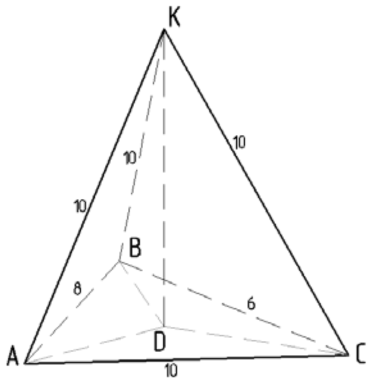
Решение:

Из того, что $\Delta OMD \sim \Delta MO_1B \Rightarrow \dfrac{OD}{O_1B_1} = \dfrac{OM}{MB_1} = \dfrac{DM}{MB_1}$. OD найдем из ΔAOD. $OD^2 + AO^2 = 14^2$, $2OD^2 = 196$, $OD = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$. O_1B_1 найдем из $\Delta A_1B_1O_1$. $O_1B_1{}^2 + O_1A_1{}^2 = 10^2$, $2O_1B_1{}^2 = 100$, $O_1B_1 = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. Следовательно, $\dfrac{7\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \dfrac{x}{18 - x}$, $7(18 - x) = 5x$, $126 - 7x = 5x$, $12x = 126$, $x = 10{,}5$. $DM = 10{,}5$, $B_1M = 18 - 10{,}5 = 7{,}5$. $OM = \sqrt{10{,}5^2 - \left(7\sqrt{2}\right)^2} = 3{,}5$ (из ΔMOD), $O_1M = \sqrt{7{,}5^2 - \left(5\sqrt{2}\right)^2} = 2{,}5$ (из ΔMO_1B_1). $H = OM + O_1M = 6$. $S_1 = 14^2 = 196$, $S_2 = 10^2 = 100$. $V = \dfrac{1}{3} \cdot 6 \cdot \left(196 + 100 + \sqrt{19600}\right) =$
$= 2 \cdot (196 + 100 + 140) = 872$.

Ответ: 872.

17. Дан треугольник ABC со сторонами 8 см, 6 см и 10 см. Найти расстояние от точки K, взятой вне плоскости ABC до плоскости треугольника, если расстояния от точки K до вершин треугольника одинаковы и равны 10 см.

Дано: $AB = 8$, $BC = 6$, $AC = 10$
$KA = KB = KC = 10$.
Найти: KD.



Решение:

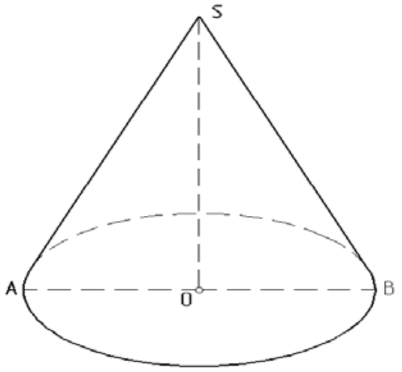
Соединим точку D с точками A, B и C. $\Delta AKD = \Delta BKD = \Delta CKD$ (равенство прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету). Следовательно, $AD = BD = CD$, а, значит, точка D является центром описанной около ΔABC окружности. $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{8 \cdot 6 \cdot 10}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8} = 5$

($S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$, т. к. ΔABC – прямоугольный, $10^2 = 6^2 + 8^2$). Рассмотрев ΔDCK, получаем, что прямая $KD \perp$ плоскости ABC, и, следовательно, $KD = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.

Ответ: $5\sqrt{3}$.

18. Найдите объем конуса, если образующая равна 12, угол при вершине осевого сечения равен 60^0.

Дано: $AS = 12$, $\angle ASB = 60^0$.
Найти: V.



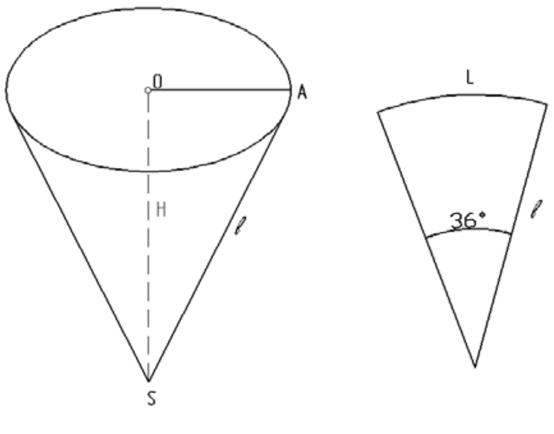
Решение:

$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$, где H – высота конуса, $H = SO$. $S_{осн} = \pi R^2$, $R = AO$. Из ΔASO имеем, что $AO = \frac{1}{2} AS$, как сторона в прямоугольном треугольнике, лежащая против угла в 30^0, т. е. $AO = 6$, $\angle ASO = 30^0$, т. к. $\angle ASB = 60^0$ (по условию). ΔASB – равнобедренный, следовательно, высота SO является медианой и биссектрисой. $S_{осн} = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$. Высоту H найдем из ΔASO по теореме Пифагора $SO = \sqrt{AS^2 - AO^2}$, $SO = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$. Следовательно, $V = \frac{1}{3} \cdot 36\pi \cdot 6\sqrt{3} = 72\sqrt{3}\pi$.

Ответ: $72\sqrt{3}\pi$.

19. Боковая поверхность конуса, равная 110 см^2, будучи развернута в плоскость, дает круговой сектор с углом 36^0. Найти объем конуса.

Дано: $S_{бок} = 110$,
$\alpha = 36^0$.
Найти: V.



Решение:

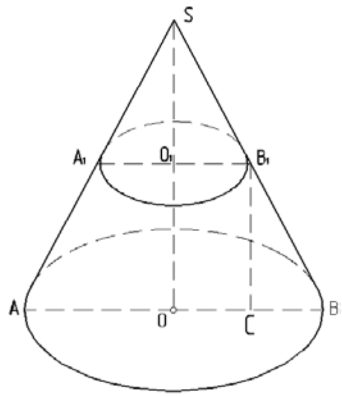
$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$, $S_{бок} = \pi R l$, $L = 2\pi R$ – длина окружности. Так как $L = \frac{2\pi l \alpha}{360}$, т. е. $L = \frac{2\pi l \cdot 36^0}{360^0} = \frac{2\pi l}{10}$, то $\frac{2\pi l}{10} = 2\pi R \Rightarrow R = 0{,}1l$. Следовательно, получаем: $S_{бок} = \pi l \cdot 0{,}1l = 110$,

$0{,}1\pi \cdot l^2 = 110$, $l^2 = \dfrac{1100}{\pi}$, $l = 10\sqrt{\dfrac{11}{\pi}}$, $R = \sqrt{\dfrac{11}{\pi}}$. Из ΔOSA находим, что $H = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{\dfrac{1100}{\pi} - \dfrac{11}{\pi}} = \sqrt{\dfrac{1089}{\pi}} = \dfrac{33}{\sqrt{\pi}}$, значит, $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \dfrac{11}{\pi} \cdot \dfrac{33}{\sqrt{\pi}} = \dfrac{121}{\sqrt{\pi}} = \dfrac{121\sqrt{\pi}}{\pi}$.

Ответ: $\dfrac{121\sqrt{\pi}}{\pi}$.

20. Прямоугольная трапеция вращается вокруг меньшей из непараллельных сторон. Найдите площадь поверхности полученного усеченного конуса, если меньшее основание трапеции равно 2 см, а боковая сторона длиной 12 см образует с основанием угол 60^0.

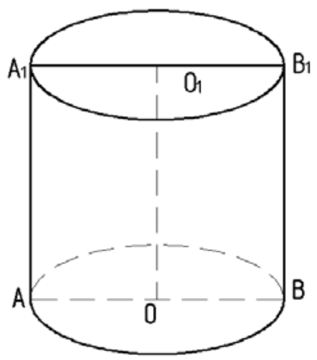
Дано: $A_1O_1 = 2$, $AA_1 = 12$, $\angle A_1AO = 60^0$.
Найти: $S_{полн}$.



Решение:
$S_{бок} = S_1 - S_2$, S_1 – боковая поверхность конуса ASB, S_2 – боковая поверхность конуса $A_1S_1B_1$. $S_1 = \pi R \cdot SB$, $S_2 = \pi R_1 \cdot SB_1$. Рассмотрим ΔSO_1B_1 и ΔSOB, они подобны, значит, $\dfrac{O_1B_1}{OB} = \dfrac{SB_1}{SB}$. Так как $OB = OC + CB$ и $CB = \dfrac{1}{2}BB_1$, как сторона, лежащая напротив угла 30^0 в ΔB_1CB, то $OB = 2 + 6 = 8$ (см), то $\dfrac{2}{8} = \dfrac{SB_1}{SB_1 + BB_1}$. Обозначим $SB_1 = x$ и получим пропорцию $\dfrac{1}{4} = \dfrac{x}{x+12}$, $4x = x + 12$, $x = 4$, т. е. $SB_1 = 4$, значит $SB = 16$. Следовательно, $S_1 = \pi \cdot 8 \cdot 16 = 128\pi$, $S_2 = \pi \cdot 2 \cdot 4 = 8\pi$. $S_{бок} = 128\pi - 8\pi = 120\pi$. $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн1} + S_{осн2}$.
$S_{полн} = 120\pi + \pi \cdot 2^2 + \pi \cdot 8^2 = 188\pi$ см^2.
Ответ: 188π.

21. Вычислить площадь полной поверхности цилиндра, объем которого равен 960π, а площадь осевого сечения равна 120.

Дано: $V = 960\pi$, $S_{AA_1B_1B} = 120$.
Найти: $S_{полн}$.



Решение:

$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$. $S_{полн} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H+R)$. $V = S_{осн} \cdot H = \pi R^2 \cdot H$. Согласно условию задачи имеем:

$$\begin{cases} \pi R^2 \cdot H = 960\pi \\ 2RH = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H = \dfrac{60}{R} \\ R^2 \cdot \dfrac{60}{R} = 960 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H = \dfrac{60}{R} \\ R = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 16 \\ H = \dfrac{15}{4} \end{cases}.$$

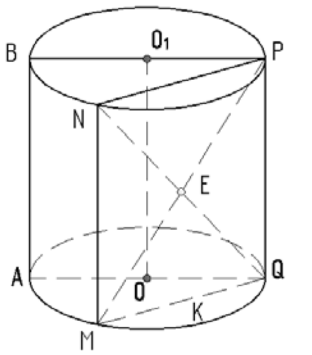
Таким образом, $S_{полн} = 2\pi \cdot 16 \cdot (16 + 3{,}75) = 632\pi$.

Ответ: 632π.

22. Сечение цилиндра $MNPQ$ содержит образующую MN. В прямоугольнике $MNPQ$ диагонали пересекаются под углом 60^0, $MQ = 5\sqrt{3}$. Найдите площадь осевого сечения. Если объем цилиндра равен 375π.

Дано: $V = 375\pi$, $MQ = 5\sqrt{3}$, $\angle MEQ = 60^0$.

Найти: S_{ABPQ}.



Решение:

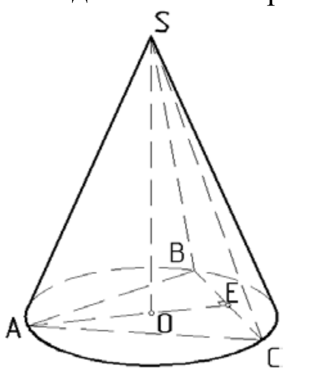
$S_{ABPQ} = AQ \cdot AB$, $AQ = 2R$, $AB = MN = H$. Так как $V = \pi R^2 \cdot H = 375\pi$, то $R = \sqrt{\dfrac{375}{H}}$. Рассмотрим ΔMEQ – равносторонний, $\angle MEQ = 60^0$ (по условию). $ME = EQ$, т. к. в прямоугольнике диагонали равны и делятся точкой их пересечения пополам. Проведя высоту EK в ΔMEQ, являющуюся также медианой и биссектрисой, получим, что $\angle KEO = 30^0$. Из ΔKEO имеем $tg30^0 = \dfrac{KQ}{EK}$, $EK = \dfrac{KQ}{tg30^0} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{15}{2}$. Тогда $MN = 2EK = 15$, т. е. $H = 15$. Следовательно, $R = \sqrt{\dfrac{375}{15}} = 5$ и $S_{ABPQ} = 2 \cdot 5 \cdot 15 = 150$.

Ответ: 150.

23. В конус объема V вписана пирамида, в основании которой равнобедренный треугольник с углом при вершине α. Найдите объем пирамиды.

Дано: V, $AB = AC$, $\angle BAC = \alpha$.

Найти: V_{ABCS}.



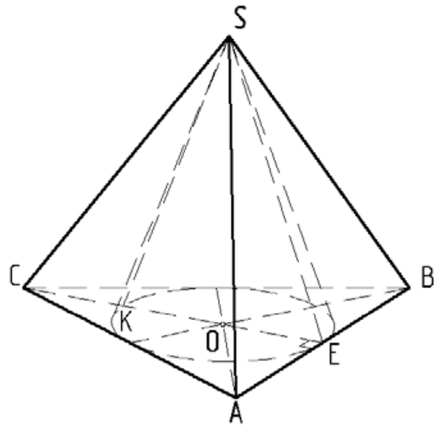
Решение:

$V_{ABCS} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot H$. Так как $V_{конуса} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H = V$ (по условию), то $H = \frac{3V}{\pi R^2}$. $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AE = BE \cdot AE$, ΔABC – равнобедренный (по условию), $AB = AC$ и $\angle BAC = \alpha$. Рассмотрим ΔABE. $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{BE}{AE}$, $BE = AE \cdot tg\frac{\alpha}{2}$, где $AE = \frac{3}{2}R$, т. к. точка O является точкой пересечения медиан ΔABE, а медианы делятся точкой их пересечения в отношении 2:1, считая от вершины, то $S_{ABC} = AE^2 \cdot tg\frac{\alpha}{2} = \left(\frac{3}{2}R\right)^2 \cdot tg\frac{\alpha}{2} = \frac{9}{4}R^2 \cdot tg\frac{\alpha}{2}$. Следовательно, $V_{ABCS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} R^2 \cdot tg\frac{\alpha}{2} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} R^2 \cdot tg\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{3V}{\pi R^2} = \frac{9}{4\pi} \cdot V \cdot tg\frac{\alpha}{2}$.

Ответ: $\frac{9V}{4\pi} tg\frac{\alpha}{2}$.

24. Радиус основания конуса R, а угол при вершине осевого сечения α. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, описанной около конуса.

Дано: $OK = R$, $\angle KSE = \alpha$.
Найти: V_{ABCS}.



Решение:

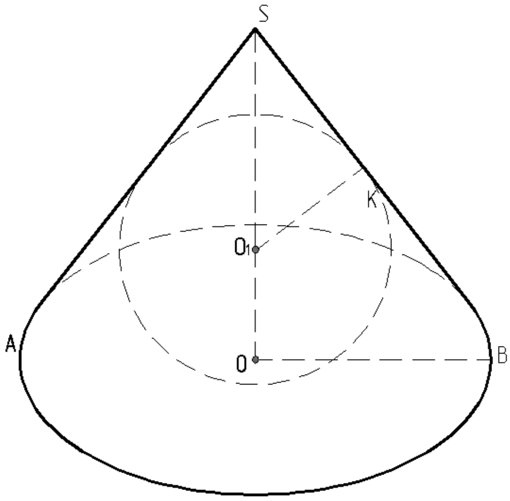
$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$, где H – высота, $H = OS$. $S_{осн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ – площадь равностороннего треугольника, где a – сторона треугольника. Выразим a через R. Точка O является центром ΔABC, следовательно, медианы совпадают с высотами и биссектрисами, и в точке O они делятся в отношении 2:1, т. к. $OE = R$, то $CE = 3R$. Рассмотрим ΔCEA – прямоугольный, по теореме Пифагора имеем, что $CE^2 + AE^2 = AC^2$, $(3R)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$, $9R^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$, $9R^2 = \frac{3a^2}{4}$, $a^2 = \frac{9R^2 \cdot 4}{3}$, $a^2 = 12R^2$, $a = 2\sqrt{3} \cdot R$. Поэтому $S_{осн} = S_{\Delta ABC} = \frac{12R^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3} \cdot R^2$. Высоту H найдем из треугольника ΔOSE, $\angle KSE = \alpha$ (по условию), а т. к. ΔKSE – равнобедренный, OS является высотой, биссектрисой и медианой, т. е. $\angle OSE = \frac{\alpha}{2}$ и $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{OE}{OS}$, $OS = \frac{OE}{tg\frac{\alpha}{2}} = OE \cdot ctg\frac{\alpha}{2}$, $OS = R \cdot ctg\frac{\alpha}{2}$. Следовательно, $V = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot R^2 \cdot R \cdot ctg\frac{\alpha}{2} =$

$= R^3 \cdot \sqrt{3} \cdot ctg\frac{\alpha}{2}$.

Ответ: $R^3 \cdot \sqrt{3} \cdot ctg\dfrac{\alpha}{2}$.

25. В конус вписан шар радиуса 2 см. Угол между образующей и высотой конуса равен 30^0. Найти боковую поверхность конуса.

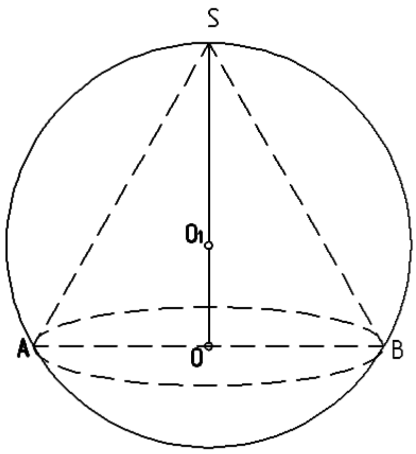
Дано: $O_1K = r = 2$, $\angle OSB = 30^0$.
Найти: $S_{бок}$.



Решение:
$S_{бок} = \pi R l$, где l – образующая, $O_1K = r = 2$, $OB = R$. $\Delta O_1SK \sim \Delta OSB$, откуда следует, что $\dfrac{O_1K}{OB} = \dfrac{O_1S}{SB}$, $\dfrac{r}{R} = \dfrac{H-r}{l}$. Из ΔOSB имеем, что $\sin 30^0 = \dfrac{OB}{SB}$, $\sin 30^0 = \dfrac{R}{l}$, $R = l \cdot \sin 30^0$, $R = \dfrac{1}{2}l$. $\cos 30^0 = \dfrac{H}{l}$, $H = l \cdot \cos 30^0$, $H = \dfrac{\sqrt{3}}{2}l$, тогда $\dfrac{2}{\frac{1}{2}l} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}l - 2}{l}$, $\dfrac{4}{l} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}l - 2}{l}$, $4 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}l - 2$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}l = 6$, $l = \dfrac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$. $R = 2\sqrt{3}$, следовательно, $S_{бок} = \pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 24\pi$.
Ответ: 24π.

26. В шар вписан конус с площадью осевого сечения S и углом при вершине 2α. Найдите объем шара.

Дано: $S_{ASB} = S$, $\angle ASB = 2\alpha$.
Найти: $V_{шара}$.



Решение:

$V_{шара} = \frac{4}{3}\pi R^3$, $R = SO$. Площадь осевого сечения $S_{ASB} = \frac{1}{2}AB \cdot SO_1 = O_1B \cdot SO_1$. $SO_1 = \frac{3}{2}R$, т. к. точка O является точкой пересечения медиан ΔASB, а медианы, пересекаясь, делятся в отношении 2:1, считая от вершины. O_1B найдем из ΔO_1SB, $tg\alpha = \frac{O_1B}{O_1S}$, $O_1B = O_1S \cdot tg\alpha = \frac{3}{2}R \cdot tg\alpha$.

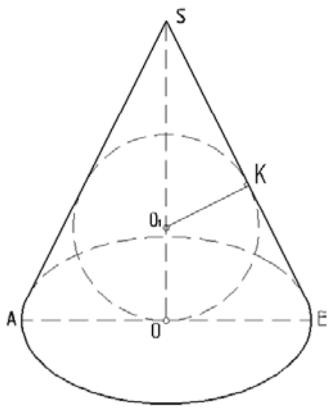
Следовательно, $S_{ASB} = \frac{3}{2}R \cdot \frac{3}{2}R \cdot tg\alpha$, а т. к. по условию $S_{ASB} = S$, то $\frac{9}{4}R^2 \cdot tg\alpha = S$, $R^2 = \frac{4S}{9tg\alpha}$, $R = \sqrt{\frac{4S}{9tg\alpha}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{S}{tg\alpha}}$, значит, $V_{шара} = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{8}{27} \cdot \frac{S}{tg\alpha}\sqrt{\frac{S}{tg\alpha}} = \frac{32}{81}\pi \cdot \frac{S}{tg\alpha}\sqrt{\frac{S}{tg\alpha}}$.

Ответ: $\frac{32}{81}\pi \cdot \frac{S}{tg\alpha}\sqrt{\frac{S}{tg\alpha}}$.

27. В конус, осевое сечение которого – равносторонний треугольник, вписан шар, объем которого равен $\frac{1}{6}$. Найдите объем конуса.

Дано: $AS = SB = AB$, $V_{шара} = \frac{1}{6}$.

Найти: $V_{конуса}$.



Решение:

$V_{конуса} = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot H$, $S_{осн} = \pi R^2$, где $R = AO$, $H = SO$. Т.к. $V_{шара} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6}$, то $r = \sqrt[3]{\frac{1/6}{4/3\,\pi}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8\pi}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{\pi}}$, где r – радиус шара, $r = O_1K$. Рассмотрим треугольники SO_1K и SOB, они подобны, следовательно, $\frac{O_1K}{OB} = \frac{SO_1}{SB} = \frac{SK}{SO}$. Обозначим $AS = SB = AB = a$, тогда $\frac{r}{R} = \frac{H-r}{a} = \frac{SK}{H}$, где $H = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ из ΔSOB по теореме Пифагора. Получим:

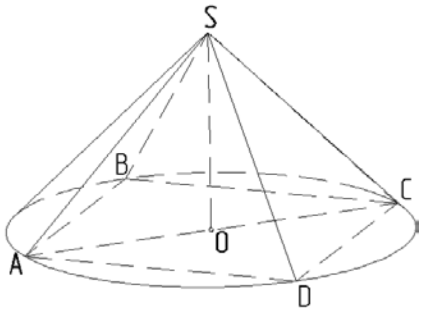
$$\frac{\frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{\pi}}}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{\pi}}}{a}, \quad \frac{1}{a\cdot\sqrt[3]{\pi}} = \frac{a\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\pi} - 1}{2a\cdot\sqrt[3]{\pi}}. \quad a\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\pi} - 1 = 2, \quad a\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\pi} = 3,$$

$a = \frac{3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\pi}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}$. Значит, $H = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2\cdot\sqrt[3]{\pi}}$, $R = \frac{\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt[3]{\pi}}$. Следовательно, $V_{конуса} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{3}{4\cdot\sqrt[3]{\pi^2}} \cdot \frac{3}{2\cdot\sqrt[3]{\pi}} = \frac{3}{8}$.

Ответ: $\frac{3}{8}$.

28. В конус вписана пирамида, в основании которой лежит квадрат со стороной, равной 3. Угол при вершине равен 60^0. Определите объем конуса.

Дано: $AD = BC = AB = CD = 3$,
$\angle DSC = 60^0$.
Найти: $V_{конуса}$.

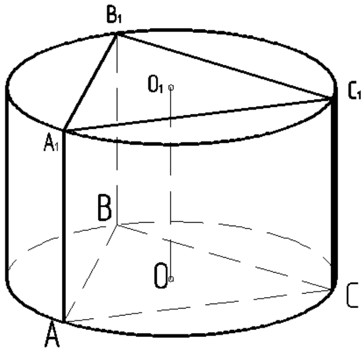


Решение:
$V_{конуса} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H$, где $R = OC$, $H = SO$. По формуле радиуса окружности, описанной около квадрата, имеем $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, a – сторона квадрата. Значит, в нашей задаче $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Высоту конуса найдем из ΔSOC по теореме Пифагора $SC^2 = OC^2 + SO^2$, $H = \sqrt{SC^2 - OC^2}$. $SC = DC = 3$, т. к. ΔDSC – равносторонний, $\angle DSC = 60^0$, поэтому $H = \sqrt{9 - \frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $V_{конуса} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{4}\pi$.

Ответ: $\frac{9\sqrt{2}}{4}\pi$.

29. В цилиндр вписана правильная треугольная призма, объем которой равен V, а отношение стороны основания к боковому ребру равно $\sqrt{3}$. Найдите объем цилиндра.

Дано: $\frac{AC}{AA_1} = \sqrt{3}$, $V_{призмы} = V$,
$BC = AB = AC$.
Найти: $V_{цилиндра}$.



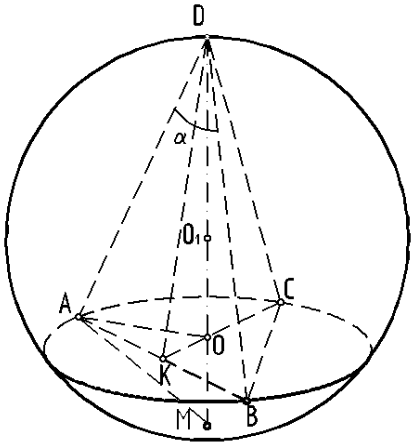
Решение:
$V_{цилиндра} = S_{осн} \cdot H = \pi R^2 \cdot H$. Так как $V_{призмы} = S_{\Delta ABC} \cdot H = V$, то, используя формулу площади равностороннего треугольника $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, получим $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = V$, где a – сторона ΔABC. Сторона правильного треугольника, вписанного в окружность, вычисляется по формуле $a = R\sqrt{3}$. Используя $\frac{AC}{AA_1} = \sqrt{3}$, имеем $\frac{a}{H} = \sqrt{3}$, $H = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = R$, $H = R$. Следовательно,

из равенства $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H = V$, получим $\frac{\left(R\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}\cdot R = V$, $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^3 = V$, $R = \sqrt[3]{\frac{4V}{3\sqrt{3}}}$, тогда $H = \sqrt[3]{\frac{4V}{3\sqrt{3}}}$ и $V_{цилиндра} = \pi\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{4V}{3\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{4V}{3\sqrt{3}}} = \pi\cdot\frac{4V}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi\cdot V$.

Ответ: $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi\cdot V$.

30. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида с плоским углом α при вершине. Найдите высоту пирамиды.

Дано: $R_{шара} = R$, $\angle CDB = \alpha$,
$BC = AB = AC$.
Найти: DO.



Решение:
$DO_1 = R$ – радиус шара, $\angle CDB = \alpha$ (по условию). Так как пирамида правильная, то ее основание – равносторонний треугольник ABC. $BC = AB = AC = a$. DK – апофема пирамиды, т. е. высота боковой грани пирамиды, тогда $\angle BDK = \frac{\alpha}{2}$, $BK = \frac{a}{2}$. Из ΔBDK имеем, что $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{BK}{BD}$, т. е. $BD = \frac{BK}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Из ΔADC имеем: $CO = \frac{a}{\sqrt{3}}$ как радиус описанной около правильного треугольника окружности. Рассмотрим ΔDOC. По теореме Пифагора получаем: $DO = \sqrt{DC^2 - OC^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{3a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{12\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}}$. Из ΔOO_1C по теореме Пифагора: $OO_1 = \sqrt{O_1C^2 - OC^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}}$. А так как $R = DO - OO_1$, то

$$R = \sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{3}} - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}}.$$

$$\sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{3}} = R + \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}}.$$

$$\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{a^2}{3}=R^2+2R\sqrt{R^2-\frac{a^2}{3}}+R^2-\frac{a^2}{3}.$$

$$\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}-2R^2=2R\sqrt{R^2-\frac{a^2}{3}}.$$

$$\frac{a^4}{16\sin^4\frac{\alpha}{2}}-\frac{4R^2\cdot a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}+4R^4=4R^2\left(R^2-\frac{a^2}{3}\right).$$

$$\frac{a^4}{16\sin^4\frac{\alpha}{2}}-\frac{R^2\cdot a^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}=-\frac{4R^2\cdot a^2}{3},\quad \frac{a^2}{16\sin^4\frac{\alpha}{2}}=R^2\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{4}{3}\right).$$

$$\frac{a^2}{16\sin^4\frac{\alpha}{2}}=\frac{R^2\left(3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{3\sin^2\frac{\alpha}{2}},\ a^2=\frac{16R^2\left(3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}.\ a=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}}.$$

Следовательно, $h=DO=\dfrac{4R\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\dfrac{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}}=2R\cdot\dfrac{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}.$

Ответ: $2R\cdot\dfrac{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Определите объем прямоугольного параллелепипеда, зная его высоту H и углы α и β, которые образуют с основанием диагональ параллелепипеда и диагональ его боковой грани.

2. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, угол при основании которого равен α, основание равно a. Определите объем призмы, если ее боковая поверхность равна сумме площадей оснований.

3. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и наклонена к плоскости основания под углом β. Угол между стороной и диагональю основания равен α. Определите объем параллелепипеда.

4. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник ABC ($AB=AC$), периметр которого равен $2p$, угол при вершине A равен α. Через сторону BC нижнего основания и противоположную вершину A_1 верхнего основания проведена плоскость, составляющая с плоскостью нижнего основания угол β. Определите объем призмы.

5. Определите полную поверхность и объем правильной четырехугольной пирамиды, если дана ее апофема a и угол наклона боковой грани к плоскости основания α.

6. Правильная треугольная пирамида имеет высоту h и боковое ребро l. Найдите площадь сечения, которое параллельно основанию и отстоит от него на расстоянии a.

7. Определите объем правильной четырехугольной пирамиды, если угол между боковым ребром и плоскостью основания равен α, а площадь диагонального сечения равна S.

8. Определите полную поверхность правильной четырехугольной пирамиды, если центр основания удален от боковой грани на расстояние a, боковая грань образует с плоскостью основания угол α.

9. Боковая поверхность цилиндра, будучи развернута, представляет собой прямоугольник, в котором диагональ равна d и составляет угол α с основанием, определите объем цилиндра.

10. Дан цилиндр, в основании которого круг, вписанный в правильный n-угольник со стороной a, высота цилиндра равна диаметру круга. Найдите боковую поверхность цилиндра.

11. Боковая поверхность конуса равна S, а полная – P. Определите угол между высотой и образующей конуса.

12. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α, а сумма длин его высоты и образующей равна m. Найдите полную поверхность конуса.

13. Определите объем конуса, если в его основании хорда, равная a, стягивает дугу α, а высота конуса составляет с образующей угол β.

14. В конусе, высота которого равна H и образующая наклонена к плоскости основания под углом α, через две образующие, составляющие угол β, проведена плоскость. Найдите площадь сечения.

15. Боковая поверхность конуса равна S, а расстояние от центра основания до образующей равно m. Найдите объем конуса.

16. В усеченном конусе отношение площадей оснований равно 4. Найдите объем усеченного конуса, если образующая имеет длину l и наклонена к плоскости основания под углом α.

17. В усеченном конусе радиусы оснований равны 5 и 3, высота равна $\sqrt{3}$. Через две образующие проведено сечение плоскостью, отсекающей от окружностей дуги по 120^0. Найдите площадь сечения.

18. Объем шара равен V. Найдите объем его сектора, у которого центральный угол в осевом сечении равен α.

19. Найдите объем конуса, вписанного в правильную треугольную пирамиду с боковым ребром m и плоским углом γ при вершине.

20. В усеченный конус вписан шар радиуса r. Образующая конуса наклонена к основанию под углом α. Найдите полную поверхность усеченного конуса.

21. В конус, радиус основания которого равен R и образующие наклонены к основанию под углом β, вписана прямая треугольная призма так, что ее нижнее основание лежит на основании конуса, а вершины верхнего основания – на боковой поверхности конуса. Определите боковую поверхность призмы, если ее основанием является прямоугольный треугольник с острым углом α, а высота призмы равна радиусу сечения конуса плоскостью, проходящей через верхнее основание призмы.

22. Около правильной шестиугольной пирамиды описан конус. Найдите его объем, если ребро пирамиды равно l и плоский угол между ребрами равен α.

23. В шар радиуса R вписан усеченный конус. Основания усеченного конуса отсекают от шара два сегмента с дугами в осевом сечении, соответственно равными α и β. Найдите боковую поверхность усеченного конуса.

24. В конус вписан цилиндр, высота которого равна радиусу основания конуса. Найдите угол β между осью конуса и его образующей, зная, что полная поверхность цилиндра относится к площади основания конуса как 3:2.

25. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида с плоским углом α при вершине пирамиды. Определите высоту пирамиды.

Ответы: 1) $V = H^3 ctg\beta\sqrt{ctg^2\alpha - ctg^2\beta}$; 2) $V = \frac{a^3}{16} tg\alpha \cdot tg\frac{\alpha}{2}$; 3) $\frac{d^3}{4}\cos\beta \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta$;

4) $\frac{p^3 \sin\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot tg\beta}{2\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^3}$;

5) $S_{полн} = 8a^2\cos\alpha \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}$, $V = \frac{4}{3}a^3\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha$;

6) $S_{сечения} = \frac{3\sqrt{3}\left(l^2 - h^2\right)(h-a)^2}{4h^2}$; 7) $V = \frac{2}{3}S\sqrt{S \cdot ctg\alpha}$;

8) $S = \frac{2a^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\alpha}$; 9) $V = \frac{d^3\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha}{4\pi}$;

10) $S = \frac{3\pi a^2}{2tg^2\frac{180^0}{n}}$; 11) $\arcsin\frac{P-S}{S}$;

12) $S = \frac{\pi \cdot m^2 \sin\alpha(1+\sin\alpha)}{(1+\cos\alpha)^2}$; 13) $V = \frac{\pi \cdot a^3 ctg\beta}{24\sin^3\frac{\alpha}{2}}$;

14) $S_{сечения} = \frac{H^2\sin\beta}{2\sin^2\alpha}$; 15) $V = \frac{1}{3}S \cdot m$;

16) $V = \frac{7}{3}\pi \cdot l^3\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha$; 17) 12; 18) $V_{сектора} = V \cdot \sin^2\frac{\alpha}{4}$; 19) $V = \pi \cdot m^3 \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\gamma}{2}}$;

20) $V = \frac{2\pi \cdot r^2\left(1 + \cos\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$;

21) $S_{бок} = \frac{2R^2}{(1+ctg\beta)^2}(1 + \cos 2\beta + \sin 2\beta)$;

22) $V = \frac{4\pi \cdot l^3}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{1 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$;

23) $S_{бок} = 2\pi \cdot R^2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{4}$; 24) $\beta = arctg\frac{1}{2}$;

25) $H = \frac{4R}{3}\left(\cos\alpha + \frac{1}{2}\right)$.

Библиографический список

1. Сборник задач по математике / под ред. М.И. Сканави. – М.: Высш. шк., 1997. – 528 с.

2. *Зорин В.В., Фискович Т.Т.* Пособие по математике для поступающих в вузы. – М.: Высш. шк., 1980. – 287 с.

3. *Райхлист Р.Б.* Задачи для поступающих во втузы (с решениями и ответами). – М.: Высш. шк., 1997. – 284 с.

4. Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ» / под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион-М, 2010.

Электронное учебное издание

сетевого распространения

Ахвердиев Рустем Фахраддинович

Турилова Екатерина Александровна

Искакова Фания Гатаровна

Бикмухаметова Дильбар Наилевна

Еникеева Светлана Рашидовна

ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Подписано к использованию 18.11.2021.
Формат 60×84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 3,6
Заказ 157/11.

Издательство Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28