

УДК 519.632.4

**МОДИФИЦИРОВАННЫЙ КВАДРАТИЧНЫЙ
СУБПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ТРЕУГОЛЬНЫЙ
КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ВТОРОГО ПОРЯДКА***А.К. Сафина, Р.З. Даутов***Аннотация**

В статье рассматривается модификация квадратичного треугольного конечного элемента. Предлагаемый семиузловой конечный элемент и квадратурная формула для него, обладающая положительными коэффициентами, позволяют получать диагональную матрицу масс в методе МКЭ с численным интегрированием. На примере задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка доказывается, что полученная схема имеет второй порядок точности в энергетической норме. Приводятся результаты численных экспериментов, подтверждающие теоретические оценки.

Введение

Для многих приложений, таких, например, как решение задач на собственные значения для дифференциальных операторов, решение нестационарных задач и др., в схеме метода конечных элементов (МКЭ) полезно иметь диагональную матрицу масс.

Чтобы добиться диагональности матрицы масс при использовании лагранжевых конечных элементов, необходимо, чтобы узлы квадратурной формулы совпадали с узлами интерполяции. Это условие нетрудно соблюсти для полных четырехугольных конечных элементов произвольного порядка точности, в то время как для треугольных конечных элементов можно удовлетворить этому условию только в случае линейных элементов. Для квадратичных элементов такой квадратуры с положительными коэффициентами не существует.

В связи с этим в настоящей работе конструируется конечный элемент, являющийся модификацией квадратичного треугольного конечного элемента, для которого указанную выше квадратурную формулу можно предложить. Однако эта квадратура оказывается недостаточно точной с точки зрения стандартной теории МКЭ с численным интегрированием. Тем не менее на примере однородной задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка мы доказываем, что предлагаемая схема имеет ожидаемый второй порядок точности в энергетической норме.

1. Постановка задачи

Пусть Ω – ограниченная связная область в R^2 с кусочно-гладкой границей Γ . Рассмотрим эллиптическую краевую задачу для уравнения второго порядка:

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) + a_0 u = f, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (2)$$

Здесь $A = A(x) = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^2$, a_{ij} , a_0 , f – заданные функции, и

$$\alpha|\xi|^2 \leq A(x)\xi \cdot \xi \leq \beta|\xi|^2 \quad \forall \xi \in R^2, \quad 0 \leq a_0(x) \leq \beta \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (3)$$

Определим билинейную форму $a(\cdot, \cdot) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow R$, а также линейный функционал $f : H_0^1(\Omega) \rightarrow R$ при помощи соотношений:

$$a(u, \eta) = \int_{\Omega} (A\nabla u \cdot \nabla \eta + a_0 u \eta) dx, \quad f(\eta) = \int_{\Omega} f \eta dx. \quad (4)$$

Отметим, что форма a является положительно определенной и ограниченной, а f – ограниченным функционалом.

Обобщенное решение задачи (1), (2) есть решение следующей задачи:

$$(P) \quad u \in H_0^1(\Omega) : \quad a(u, \eta) = f(\eta) \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega).$$

Для ее решения используем метод конечных элементов с численным интегрированием. Для этого необходимо определить две составляющие метода: а) пространство конечных элементов, аппроксимирующее пространство решений $H_0^1(\Omega)$; б) квадратурную формулу для приближенного вычисления интеграла по области Ω .

2. Компоненты схемы МКЭ с численным интегрированием

Базисный конечный элемент. Определим базисный лагранжев треугольный конечный элемент $(\hat{e}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ со следующими компонентами.

1) \hat{e} – единичный треугольник в R^2 в координатах (\hat{x}_1, \hat{x}_2) . Положение узлов интерполяции выберем так, как показано на рис. 1, где

$$a_1 = (0, 0), \quad a_2 = (1, 0), \quad a_3 = (0, 1), \\ a_4 = (1/2, 0), \quad a_5 = (1/2, 1/2), \quad a_6 = (0, 1/2), \quad a_7 = (1/3, 1/3).$$

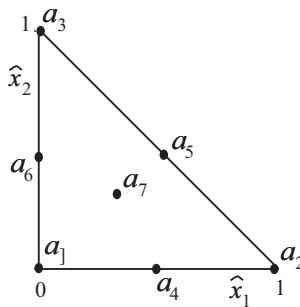
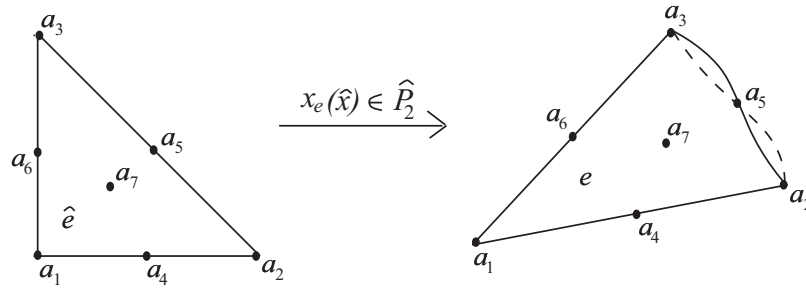


Рис. 1. Базисный конечный элемент

2) Множество узловых параметров $\hat{\Sigma} = \{\hat{p} \rightarrow \hat{p}(a_i), 1 \leq i \leq 7\}$.

3) $\hat{P} = \hat{P}_2 \oplus \{\hat{x}_1 \hat{x}_2 \hat{x}_3\}$ – пространство полиномов на \hat{e} , любой элемент \hat{p} которого представляется в виде суммы: $\hat{p} = \hat{p}_2 + c\hat{\omega}$, $c \in R$, $\hat{\omega} = \hat{x}_1 \hat{x}_2 \hat{x}_3$, $\hat{x}_3 = 1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2$, $\hat{p}_2 \in \hat{P}_2$. Здесь и далее

$$\hat{P}_m = \left\{ \hat{p} : \hat{p} = \sum_{0 \leq i+j \leq m} c_{ij} \hat{x}_1^i \hat{x}_2^j \right\}, \quad P_m = \left\{ p : p = \sum_{0 \leq i+j \leq m} c_{ij} x_1^i x_2^j \right\}.$$

Рис. 2. Определение элемента (множества) e

Базисные функции Лагранжа в \widehat{P} в соответствии с нумерацией узлов имеют следующий вид (это проверяется непосредственно):

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_1 &= 2\widehat{x}_3(\widehat{x}_3 - 1/2) + 3\widehat{\omega}, & \widehat{\varphi}_2 &= 2\widehat{x}_1(\widehat{x}_1 - 1/2) + 3\widehat{\omega}, & \widehat{\varphi}_3 &= 2\widehat{x}_2(\widehat{x}_2 - 1/2) + 3\widehat{\omega}, \\ \widehat{\varphi}_4 &= 4\widehat{x}_1\widehat{x}_3 - 12\widehat{\omega}, & \widehat{\varphi}_5 &= 4\widehat{x}_1\widehat{x}_2 - 12\widehat{\omega}, & \widehat{\varphi}_6 &= 4\widehat{x}_2\widehat{x}_3 - 12\widehat{\omega}, & \widehat{\varphi}_7 &= 27\widehat{\omega}. \end{aligned}$$

Отметим, что введенный нами элемент отличается от стандартного квадратичного 6-узловой элемент введением дополнительного узла интерполяции a_7 , узлового параметра $\widehat{p}(a_7)$ и дополнительного монома $\widehat{x}_1\widehat{x}_2\widehat{x}_3$ в \widehat{P} .

Субпараметрический конечный элемент. Пусть $(\widehat{e}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$ – треугольный базисный конечный элемент, рассмотренный выше, $h > 0$ – малый параметр. Выберем на плоскости x_1Ox_2 три точки a_1^e, a_2^e, a_3^e , считая, что треугольник \widehat{e} с вершинами в этих точках имеет диаметр, меньший, чем h . Пусть, далее, точки a_4^e и a_6^e являются серединами отрезков $a_1^ea_2^e$ и $a_1^ea_3^e$ соответственно, а узел a_5^e лежит в $O(h^2)$ -окрестности точки \widetilde{a}_5^e – середины отрезка $a_2^ea_3^e$ (см. рис. 2). Рассмотрим образ e элемента \widehat{e} при отображении

$$x = x_e(\widehat{x}) = a_1^e + B_e\widehat{x} + 4(a_5^e - \frac{a_2^e + a_3^e}{2})\widehat{x}_1\widehat{x}_2,$$

где

$$B_e = \begin{pmatrix} (a_2^e - a_1^e)_1 & (a_3^e - a_1^e)_1 \\ (a_2^e - a_1^e)_2 & (a_3^e - a_1^e)_2 \end{pmatrix}.$$

По определению границу e образуют два отрезка $a_1^ea_2^e$ и $a_1^ea_3^e$, а также дуга параболы $a_2^ea_5^ea_3^e$. Отметим, что при достаточно малом h преобразование $x = x_e(\widehat{x})$ является взаимно-однозначным и сохраняет ориентацию $a_i^e = x_e(a_i)$, $1 \leq i \leq 6$ [2, с. 122].

В качестве седьмого узла интерполяции элемента e выберем точку $a_7^e = x_e(a_7)$ и образуем семиузловой лагранжев конечный элемент (e, P_e, Σ_e) , где

$$P_e = \{p : p = \widehat{p}(x_e^{-1}(x)), \widehat{p} \in \widehat{P}\}, \quad \Sigma_e = \{p \rightarrow p(a_i^e), 1 \leq i \leq 7\}.$$

Он является субпараметрическим элементом и обычно используется как приграничный (точки a_2^e, a_3^e, a_5^e выбираются лежащими на границе Γ области Ω). Отметим, что если точки a_2^e, a_3^e, a_5^e лежат на одной прямой (часть границы Γ прямолинейна), то x_e становится аффинным, а конечный элемент (e, P_e, Σ_e) – аффинно-эквивалентным.

Пространство конечных элементов Дадим определение конечномерного пространства V_h , аппроксимирующего пространство Соболева $V = H^1(\Omega)$. Для

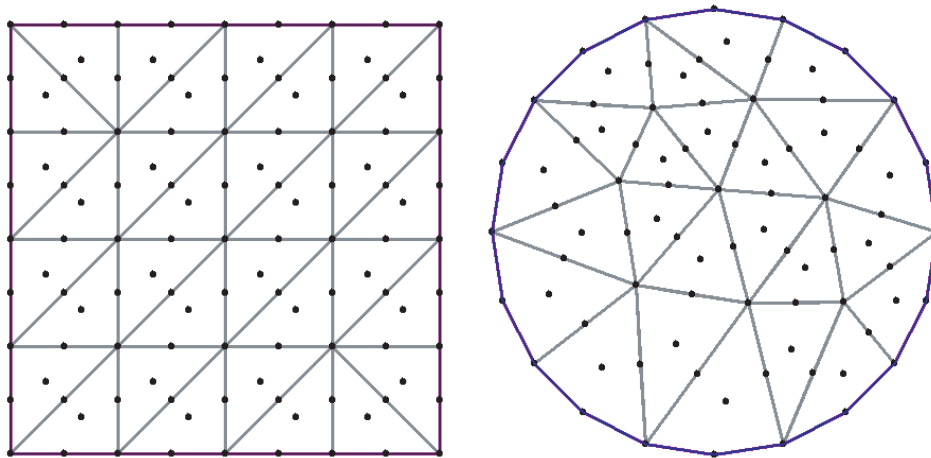


Рис. 3. Триангуляция прямоугольной области и круга с обозначенными узлами

этого разобьем область Ω на две совокупности треугольных элементов: треугольные элементы с прямолинейными сторонами (в качестве внутренних) и треугольные субпараметрические элементы с одной криволинейной границей (непосредственно прилегающие к границе области Ω ; см. рис. 3). Предполагается, что точки стыка гладких кусков границы являются вершинами некоторых конечных элементов.

Как это принято, максимальный диаметр элементов обозначим через h , множество \mathcal{T}_h всех элементов назовем триангуляцией области Ω .

Будем предполагать, что триангуляция \mathcal{T}_h является регулярной [2, с. 104, 110, 122]¹, и положим

$$\Omega_h = \bigcup_{e \in \mathcal{T}_h} e, \quad \Gamma_h = \partial\Omega_h.$$

По определению $\Omega = \Omega_h$ в случае многоугольной области, и $\text{mes}(\Omega \Delta \Omega_h) = O(h^3)$ иначе².

С каждым элементом $e \in \mathcal{T}_h$ свяжем конечный элемент (e, P_e, Σ_e) (аффинно-эквивалентный или субпараметрический), и, таким образом, получим семейство конечных элементов \mathcal{E}_h . Определим пространство конечных элементов

$$V_h = \{v_h \in C(\overline{\Omega}_h) : v_h|_e \in P_e \quad \forall e \in \mathcal{T}_h\} \subset H^1(\Omega_h),$$

а также его подпространство

$$V_h^0 = \{v_h \in V_h : v_h = 0, x \in \Gamma_h\} \subset H_0^1(\Omega_h).$$

Пусть $\omega_h = \{a_i\}_{i=1}^n$ – множество всех узлов интерполяции, лежащих в области Ω_h , $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ – базис Лагранжа в V_h^0 , то есть $\varphi_i \in V_h^0$, $\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}$, δ_{ij} – символ Кронекера. Через u_I обозначим V_h^0 – интерполянт непрерывной функции u

$$u_I(x) = \sum_{i=1}^n u(a_i)\varphi_i(x), \quad x \in \overline{\Omega}_h.$$

¹Другими словами, $l_i^e \in [c_1h, c_2h]$, $\theta_i^e \in [c_3, 2\pi - c_4]$ для любого $e \in \mathcal{T}_h$ и $i = 1, 2, 3$, где l_i^e , θ_i^e – длина i -й стороны и i -й угол элемента e соответственно, а постоянные c_k не зависят от h .

² $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ – симметричная разность множеств A и B .

Поскольку $\widehat{P} \supset \widehat{P}_2$ и $H^3(\Omega_h) \subset C(\overline{\Omega}_h)$, то для любого $u \in H^3(\Omega_h)$ справедливы оценки [2, с. 154]:

$$|u - u_I|_{0,\Omega_h} \leq ch^3 \|u\|_{3,\Omega_h}, \quad |u - u_I|_{1,\Omega_h} \leq ch^2 \|u\|_{3,\Omega_h}. \quad (5)$$

Здесь и далее через c обозначаются различные постоянные, не зависящие от h , $\|\cdot\|_{k,\Omega}$ – норма в пространстве Соболева $H^k(\Omega)$:

$$\|u\|_{k,\Omega}^2 = \sum_{j=0}^k |u|_{j,\Omega}^2, \quad k \geq 0, \quad |u|_{k,\Omega}^2 = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^2 dx.$$

Квадратурная формула. На элементе \widehat{e} определим квадратуру \widehat{S} , точную на полиномах из \widehat{P}_2 [1, с. 183]:

$$\int_{\widehat{e}} \widehat{\phi}(\widehat{x}) d\widehat{x} \approx \sum_{l=1}^7 c_l \widehat{\phi}(a_l) \equiv \widehat{S}(\widehat{\phi}).$$

Ее узлы совпадают с узлами интерполяции, а коэффициенты имеют следующие значения:

$$c_1 = c_2 = c_3 = 3/120, \quad c_4 = c_5 = c_6 = 8/120, \quad c_7 = 27/120.$$

На элементе $e \in \mathcal{T}_h$ квадратуру определим по \widehat{S} путем преобразования переменных $x = x_e(\widehat{x})$:

$$\int_e \phi(x) dx \approx \sum_{l=1}^7 c_l^e \phi(a_l^e) \equiv S_e(\phi),$$

где $c_l^e = \det(J_e) c_l$, $a_l^e = x_e(a_l)$, J_e – матрица Якоби преобразования x_e . Для вычисления интеграла по области Ω_h используем составную квадратуру

$$S_h(f) = \sum_{e \in \mathcal{T}_h} S_e(f).$$

Определим функционалы погрешности этих формул:

$$\widehat{E}(\widehat{\phi}) = \int_{\widehat{e}} \widehat{\phi}(\widehat{x}) d\widehat{x} - \widehat{S}(\widehat{\phi}), \quad E_e(\phi) = \int_e \phi(x) dx - S_e(\phi), \quad E_h(\phi) = \int_{\Omega_h} \phi(x) dx - S_h(\phi).$$

Следующая лемма дает дополнительные сведения о точности квадратуры \widehat{S} и играет далее центральную роль при исследовании точности схемы МКЭ.

Лемма 1. *Квадратура \widehat{S} точна на полиномах вида*

$$\widehat{\omega}, \quad p_1 \frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial \widehat{x}_1}, \quad p_1 \frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial \widehat{x}_2},$$

где $\widehat{\omega} = \widehat{x}_1 \widehat{x}_2 \widehat{x}_3$, $p_1 \in \widehat{P}_1$ – произвольная аффинная функция.

Доказательство. Для сокращения опустим символ “ $\widehat{}$ ” в обозначениях переменных. Пусть $\omega = x_1 x_2 (1 - x_1 - x_2)$. Нетрудно убедиться, что

$$\int_{\widehat{e}} \omega dx = S(\omega) = \frac{1}{120},$$

следовательно, $\widehat{E}(\omega) = 0$. Далее, пусть $p_1 = a + bx_1 + cx_2$. Интегрированием по частям получим

$$\int_{\widehat{e}} p_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} dx = - \int_{\widehat{e}} \omega \frac{\partial p_1}{\partial x_1} dx = -b \int_{\widehat{e}} \omega dx = -b/120.$$

Учитывая, что $\partial \omega / \partial x_1 = x_2(1 - x_2 - 2x_1)$, имеем:

$$\widehat{S} \left(x_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right) = -\frac{1}{120}, \quad \widehat{S} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right) = \widehat{S} \left(x_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right) = 0,$$

следовательно, $\widehat{S} \left(p_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right) = -b/120$. В силу симметрии также $\widehat{E} \left(p_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right) = 0$. \square

Следствие 1. Квадратура \widehat{S} точна на полиномах из \widehat{P} . Кроме того, она точна на полиномах

$$p_1 \frac{\partial \widehat{p}}{\partial \widehat{x}_1}, \quad p_1 \frac{\partial \widehat{p}}{\partial \widehat{x}_2}, \quad p_1 \in \widehat{P}_1, \widehat{p} \in \widehat{P}.$$

Доказательство. Так как $\widehat{P} = \widehat{P}_2 \oplus \{\widehat{\omega}\}$, а \widehat{S} точна на полиномах из \widehat{P}_2 и $\widehat{\omega}$, то \widehat{S} точна на \widehat{P} . Теперь достаточно учесть, что

$$p_1 \frac{\partial \widehat{p}}{\partial \widehat{x}_k} = p_2 + cp_1 \frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial \widehat{x}_k}, \quad p_2 \in \widehat{P}_2, \quad c = \text{const}.$$

\square

Замечание 1. Отметим, что \widehat{S} не точна на полиномах вида

$$\frac{\partial \widehat{p}}{\partial \widehat{x}_i} \frac{\partial \widehat{p}}{\partial \widehat{x}_j}, \quad i, j = 1, 2, \widehat{p} \in \widehat{P}.$$

Это легко проверяется при $\widehat{p} = \widehat{\omega}$.

Определим дискретные аналоги нормы $|\cdot|_{0,\Omega}$ и полунормы $|\cdot|_{1,\Omega}$ на V_h :

$$|u_h|_{0,h}^2 = S_h(u_h^2), \quad |u_h|_{1,h}^2 = S_h(|\nabla u_h|^2), \quad u_h \in V_h.$$

Существуют не зависящие от h положительные постоянные c_1 и c_2 такие, что для любого $u_h \in V_h$ справедливы оценки:

$$c_1 |u_h|_{k,\Omega_h} \leq |u_h|_{k,h} \leq c_2 |u_h|_{k,\Omega_h}, \quad k = 0, 1. \quad (6)$$

Доказательство этих оценок проводится по стандартной методике (см., например, [1, с. 186]) с учетом следующих замечаний: а) функционал $\widehat{S}^{1/2}(\widehat{u}^2)$ на \widehat{P} определяет норму; б) из условия $\widehat{S}(|\widehat{\nabla} \widehat{u}|^2) = 0$, $\widehat{u} \in \widehat{P}$, следует, что $\widehat{u} = \text{const}$. Эти утверждения легко проверяются, так как узлы квадратуры \widehat{S} образуют \widehat{P} -унисольвентное множество.

3. Схема МКЭ с численным интегрированием

Функцию $u_h \in V_h^0$ назовем приближенным решением задачи (\mathcal{P}) по методу конечных элементов с численным интегрированием, если

$$(\mathcal{P}_h) \quad a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h^0.$$

Здесь

$$a_h(u, v) = S_h(A \nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv), \quad f_h(v) = S_h(fv).$$

Следующие свойства формы a_h непосредственно вытекают из (3), (6) и неравенства Фридрикса:

$$a_h(u, u) \geq m |u|_{1, \Omega_h}^2, \quad |a_h(u, v)| \leq M |u|_{1, \Omega_h} |v|_{1, \Omega_h} \quad \forall u, v \in V_h^0. \quad (7)$$

Отметим, что положительные постоянные m, M не зависят от h .

Для оценки точности схемы (\mathcal{P}_h) нам понадобятся вспомогательные утверждения и оценки. Ниже приводятся известные результаты и получаются недостающие.

Норму в пространстве Соболева $W_p^m(\Omega)$ будем обозначать через $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$. Так, при $1 < p < \infty$ имеем

$$\|u\|_{m,p,\Omega}^p = \sum_{k=0}^m |u|_{k,p,\Omega}^p, \quad |u|_{k,p,\Omega}^p = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^p dx,$$

а при $p = \infty$ полагается

$$\|u\|_{k,\infty,\Omega} = \max_{0 \leq k \leq m} |u|_{k,\infty,\Omega}, \quad |u|_{k,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha|=k} \operatorname{es\,sup}_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|.$$

Лемма 2 [1, с. 191]. Пусть $u \in W_p^k(\Omega)$, $\varphi \in W_\infty^k(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$. Тогда $\varphi u \in W_p^k(\Omega)$ и существует постоянная c такая, что

$$|\varphi u|_{k,p,\Omega} \leq c \sum_{l=0}^k |\varphi|_{l,\infty,\Omega} |u|_{k-l,p,\Omega}.$$

Лемма 3 (Лемма Брамбла – Гильберта, [2, с. 51]). Пусть f – линейный ограниченный функционал на пространстве $H^s(\Omega)$, $\Omega \subset R^n$, обращающийся в нуль на любом полиноме степени $l \leq s-1$ по совокупности переменных, то есть $f(p_l) = 0$, если $p_l(x) = \sum_{|\alpha| \leq l} c_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$. Тогда существует такая постоянная $c = c(\Omega, l, s)$, что

$$|f(u)| \leq c (|u|_{l+1,\Omega} + |u|_{l+2,\Omega} + \dots + |u|_{s,\Omega}) \quad \forall u \in H^s(\Omega).$$

Лемма 4 [2, с. 188]. Для любого $\hat{v} \in \hat{P} \supseteq \hat{P}_2$ справедливы оценки:

$$|\hat{v}|_{k,\infty,\hat{e}} \leq c |\hat{v}|_{k,\hat{e}} \leq c |\hat{v}|_{j,\hat{e}}, \quad k \geq j, \quad j = 0, 1, 2.$$

Лемма 5 [2, с. 105, 152]. Пусть триангуляция \mathcal{T}_h регулярна, $x_e = x_e(\hat{x})$ – преобразование базисного элемента \hat{e} на $e \in \mathcal{T}_h$, J_e – его матрица Якоби, $\hat{u}(\hat{x}) = u(x_e(\hat{x}))$. Тогда при $m \geq 0$, $p \in [1, \infty]$, $k = 1, 2, 3$ справедливы оценки:

$$c_1 h^2 \leq \det(J_e(\hat{x})) \leq c_2 h^2, \quad c_1 h^{-2} \leq \det(J_e^{-1}(\hat{x})) \leq c_2 h^{-2},$$

$$\begin{aligned}
|x_e|_{k,\infty,\widehat{e}} &\leq ch^k, & |x_e^{-1}|_{k,\infty,e} &\leq ch^{-1}, \\
|\det(J_e)|_{k,\infty,\widehat{x}} &\leq ch^{2+k}, \\
|\widehat{u}|_{m,p,\widehat{e}} &\leq ch^{m-2/p}\|u\|_{m,p,e}, & |u|_{m,p,e} &\leq ch^{2/p-m}\|\widehat{u}\|_{m,p,\widehat{e}}, \quad u \in W_p^m(e), \\
|u_I|_{s,p,e} &\leq c|u|_{s,p,e}, \quad 0 \leq s \leq 3, & u &\in W_p^s(e)
\end{aligned}$$

Далее будем считать, что для любой функции u , определенной на $e \in \mathcal{T}_h$, функция \widehat{u} , определенная на \widehat{e} , есть ее прообраз при преобразовании координат, а именно будем полагать $\widehat{u}(\widehat{x}) = u(x_e(\widehat{x}))$.

Теорема 1. Пусть $e \in \mathcal{T}_h$, $v \in H^2(e)$. Тогда

$$|E_e(vp)| \leq ch^2\|v\|_{2,e}\|p\|_{1,e} \quad \forall p \in P_e.$$

Доказательство. Так как $H^2(e) \subset C(\bar{e})$, то v – непрерывная функция. Имеем:

$$E_e(vp) = \widehat{E}(\det(J_e)\widehat{v}\widehat{p}) = \widehat{E}(\widehat{\phi}\widehat{p}), \quad (8)$$

где $\widehat{\phi} = \det(J_e)\widehat{v}$, $\widehat{p} \in \widehat{P}$. Отметим, что $|\widehat{E}(\widehat{f})| \leq |\widehat{f}|_{0,\infty,\widehat{e}}$ для любой функции $\widehat{f} \in C(\widehat{e})$.

Пусть \widehat{a} – некоторый узел интерполяции на \widehat{e} . По функции $\widehat{p} \in \widehat{P}$ определим постоянную на \widehat{e} функцию $\widehat{p}_0(x) = \widehat{p}(\widehat{a})$ (\widehat{P}_0 – интерполянт функции \widehat{p}). Тогда

$$|\widehat{p}_0| \leq |\widehat{p}|_{0,\infty,\widehat{e}} \leq c|\widehat{p}|_{0,\widehat{e}}, \quad |\widehat{p} - \widehat{p}_0|_{0,\widehat{e}} \leq c|\widehat{p}|_{1,\widehat{e}}.$$

Используя представление

$$\widehat{E}(\widehat{\phi}\widehat{p}) = \widehat{E}(\widehat{\phi}\widehat{p}_0) + \widehat{E}(\widehat{\phi}(\widehat{p} - \widehat{p}_0)) \equiv E_0(\widehat{\phi}) + E_1(\widehat{\phi}),$$

оценим функционалы E_0 и E_1 . Имеем

$$|E_0(\widehat{\phi})| = |\widehat{E}(\widehat{\phi})|\widehat{p}_0| \leq c|\widehat{\phi}|_{0,\infty,\widehat{e}}|\widehat{p}|_{0,\widehat{e}} \leq c\|\widehat{\phi}\|_{2,\widehat{e}}|\widehat{p}|_{0,\widehat{e}}.$$

Последняя оценка является следствием непрерывности вложения $W_2^2(\widehat{e}) \subset C(\widehat{e})$. Так как $\widehat{E}(\widehat{P}) = 0$ (см. следствие 1), то $\widehat{E}(\widehat{P}_1) = 0$, и мы можем применить лемму Брамбла–Гильберта. Получаем:

$$|E_0(\widehat{\phi})| \leq c|\widehat{\phi}|_{2,\widehat{e}}|\widehat{p}|_{0,\widehat{e}}. \quad (9)$$

Далее, из леммы 2 следует, что

$$|\widehat{\phi}|_{2,\widehat{e}} = |\det(J_e)\widehat{v}|_{2,\widehat{e}} \leq c \sum_{j=0}^2 |\det(J_e)|_{j,\infty,\widehat{e}}|\widehat{v}|_{2-j,\widehat{e}}.$$

Используя лемму 5, отсюда получаем следующие оценки:

$$|\widehat{\phi}|_{2,\widehat{e}} \leq c \sum_{j=0}^2 h^{j+2}h^{1-j}\|v\|_{2-j,e} \leq ch^3\|v\|_{2,e},$$

$$|\widehat{p}|_{0,\widehat{e}} \leq ch^{-1}\|\widehat{p}\|_{0,\widehat{e}}.$$

Комбинируя эти оценки с (9), приходим к первой искомой оценке:

$$|E_0(\widehat{\phi})| \leq c h^2 \|v\|_{2,e} |p|_{0,e}. \quad (10)$$

Аналогично, учитывая лемму 5 и равенство $E_1(\widehat{P}_0) = 0$, получаем:

$$\begin{aligned} |E_1(\widehat{\phi})| &\leq c \|\widehat{\phi}\|_{2,\widehat{e}} |\widehat{p} - \widehat{p}_0|_{0,\widehat{e}} \leq c (\|\widehat{\phi}\|_{1,\widehat{e}} + \|\widehat{\phi}\|_{2,\widehat{e}}) |\widehat{p}|_{1,\widehat{e}} \leq \\ &\leq c \left(\sum_{j=0}^1 |\det(J_e)|_{j,\widehat{e}} |\widehat{v}|_{1-j,\widehat{e}} + \sum_{j=0}^2 |\det(J_e)|_{j,\widehat{e}} |\widehat{v}|_{2-j,\widehat{e}} \right) \|p\|_{1,e} \leq \\ &\leq c \left(\sum_{j=0}^1 h^{j+2} h^{-j} \|v\|_{1-j,e} + \sum_{j=0}^2 h^{j+2} h^{1-j} \|v\|_{2-j,e} \right) \|p\|_{1,e} \leq \\ &\leq c (h^2 \|v\|_{1,e} + c h^3 \|v\|_{2,e}) \|p\|_{1,e} \leq c h^2 \|v\|_{2,e} \|p\|_{1,e}. \end{aligned}$$

Из этой оценки и (10) имеем, что $|\widehat{E}(\widehat{\phi}\widehat{p})| \leq c h^2 \|v\|_{2,e} \|p\|_{1,e}$. Учитывая равенство (8), отсюда получаем утверждение теоремы. \square

Теорема 2. Пусть $e \in \mathcal{T}_h$, $a_{ij} \in W_\infty^2(e)$, $p, q \in P_e$. Тогда

$$\left| E_e \left(\sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \right| \leq c h^2 \sum_{i,j=1}^2 \|a_{ij}\|_{2,\infty,e} \|q\|_{3,e} \|p\|_{1,e}.$$

Доказательство. Замена переменных приводит к равенству

$$I_e \equiv E_e \left(\sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = \widehat{E} \left(\sum_{i,j=1}^2 \widehat{b}_{ij} \frac{\partial \widehat{q}}{\partial \widehat{x}_j} \frac{\partial \widehat{p}}{\partial \widehat{x}_i} \right),$$

где \widehat{b}_{ij} – сумма слагаемых вида

$$\widehat{a}(\widehat{x}) = \frac{1}{\det(J_e(\widehat{x}))} \frac{\partial x_i(\widehat{x})}{\partial \widehat{x}_k} \frac{\partial x_j(\widehat{x})}{\partial \widehat{x}_l} \widehat{a}_{kl}.$$

Следовательно, оценка I_e сводится к оценке величины $E \equiv \widehat{E} \left(\widehat{a} \frac{\partial \widehat{q}}{\partial \widehat{x}_j} \frac{\partial \widehat{p}}{\partial \widehat{x}_i} \right)$.

Обозначим $\widehat{u} = \frac{\partial \widehat{q}}{\partial \widehat{x}_j}$, $\widehat{v} = \frac{\partial \widehat{p}}{\partial \widehat{x}_i}$, $\widehat{\phi} = \widehat{a}\widehat{u}$ и рассмотрим функционал $f(\widehat{\phi}) = \widehat{E}(\widehat{\phi}\widehat{v})$. Отметим, что согласно следствию 1, $f(\widehat{P}_1) = 0$, и f ограничен в $W_\infty^2(\widehat{e})$, так как

$$|f(\widehat{\phi})| \leq |\widehat{\phi}\widehat{v}|_{0,\infty,\widehat{e}} \leq |\widehat{\phi}|_{0,\infty,\widehat{e}} |\widehat{v}|_{0,\infty,\widehat{e}} \leq c \|\widehat{\phi}\|_{2,\infty,\widehat{e}} |\widehat{v}|_{0,\widehat{e}}.$$

Следовательно, выполняются условия леммы Брамбла – Гильберта, из которой следует, что

$$|f(\widehat{\phi})| \leq c |\widehat{\phi}|_{2,\infty,\widehat{e}} |\widehat{v}|_{0,\widehat{e}}. \quad (11)$$

Применяя леммы 2 и 4, получаем

$$|\widehat{\phi}|_{2,\infty,\widehat{e}} = |\widehat{a}\widehat{u}|_{2,\infty,\widehat{e}} \leq c \sum_{j=0}^2 |\widehat{u}|_{j,\infty,\widehat{e}} |\widehat{a}|_{2-j,\infty,\widehat{e}} \leq c \sum_{j=0}^2 |\widehat{u}|_{j,\widehat{e}} |\widehat{a}|_{2-j,\infty,\widehat{e}}.$$

Используя эту оценку в (11), приходим к следующей:

$$|f(\hat{\phi})| \leq c \left(\sum_{j=0}^2 |\hat{a}|_{2-j, \infty, \hat{e}} |\hat{u}|_{j, \hat{e}} \right) |\hat{v}|_{0, \hat{e}} \leq c \left(\sum_{j=0}^2 |\hat{a}|_{2-j, \infty, \hat{e}} |\hat{q}|_{j+1, \hat{e}} \right) |\hat{p}|_{1, \hat{e}}. \quad (12)$$

Согласно лемме 5 имеем, что

$$|\hat{q}|_{j+1, \hat{e}} \leq ch^j \|q\|_{j+1, e}, \quad |\hat{p}|_{1, \hat{e}} \leq c \|p\|_{1, e}. \quad (13)$$

Далее, из леммы 2 следует, что

$$|\hat{a}|_{s, \infty, \hat{e}} \leq c \sum_{t=0}^s \left| \frac{1}{\det(J_e(\hat{x}))} \frac{\partial x_i(\hat{x})}{\partial \hat{x}_k} \frac{\partial x_j(\hat{x})}{\partial \hat{x}_l} \right|_{t, \infty, \hat{e}} |\hat{a}_{kl}|_{s-t, \infty, \hat{e}}. \quad (14)$$

Из условия регулярности и леммы 5 получаем соответственно:

$$\left| \frac{1}{\det(J_e(\hat{x}))} \frac{\partial x_i(\hat{x})}{\partial \hat{x}_k} \frac{\partial x_j(\hat{x})}{\partial \hat{x}_l} \right|_{t, \infty, \hat{e}} \leq ch^t, \\ |\hat{a}_{kl}|_{s-t, \infty, \hat{e}} \leq ch^{s-t} \|a_{kl}\|_{s-t, \infty, e}.$$

Используя две последние оценки, из (14) имеем:

$$|\hat{a}|_{s, \infty, \hat{e}} \leq ch^s \|a_{kl}\|_{s, \infty, e}. \quad (15)$$

Подставляя (13) и (15) в (12), получим искомое утверждение:

$$|E| \leq ch^2 \|a_{kl}\|_{2, \infty, e} \|q\|_{3, e} \|p\|_{1, e}.$$

□

4. Оценка точности схемы в $H^1(\Omega_h)$

Так как по построению границы Γ_h и Γ близки, то существует такое ограниченное открытое множество $\tilde{\Omega}$, что как Ω , так и Ω_h принадлежат $\tilde{\Omega}$ для всех рассматриваемых триангуляций \mathcal{T}_h . Следовательно, функцию $u \in W_2^3(\Omega)$ можно продолжить на область $\tilde{\Omega}$ с сохранением нормы, то есть существует функция $\tilde{u} \in W_2^3(\tilde{\Omega})$ такая, что $\tilde{u}(x) = u(x)$ при $x \in \Omega$ и

$$\|\tilde{u}\|_{3, \tilde{\Omega}} \leq c \|u\|_{3, \Omega}. \quad (16)$$

Положим $\tilde{V} = H^1(\Omega_h)$. По определению $V_h^0 \subset \tilde{V}$, и под погрешностью схемы естественно понимать величину $\|\tilde{u} - u_h\|_{1, \Omega_h}$.

Пусть далее \tilde{a}_{ij} , \tilde{a}_0 – продолжения коэффициентов исходного уравнения такие, что

$$\|\tilde{a}_{ij}\|_{3, \infty, \tilde{\Omega}} \leq c \|a_{ij}\|_{3, \infty, \Omega} \leq M_1 = \text{const}, \quad i, j = 1, 2, \quad (17)$$

$$\|\tilde{a}_0\|_{3, \infty, \tilde{\Omega}} \leq c \|a_0\|_{3, \infty, \Omega} \leq M_2 = \text{const}. \quad (18)$$

Положим

$$\tilde{f}(x) = -\text{div}(\tilde{A}\nabla\tilde{u}) + \tilde{a}_0\tilde{u}, \quad (19)$$

где $\tilde{A} = \tilde{A}(x) = \{\tilde{a}_{ij}\}_{i,j=1}^2$.

Умножая обе части равенства (19) на произвольную функцию $v_h \in V_h^0$, интегрируя по области Ω_h и используя формулу интегрирования по частям, получаем тождество

$$(\tilde{\mathcal{P}}) \quad \tilde{a}(\tilde{u}, v_h) = \tilde{f}(v_h) \quad \forall v_h \in V_h^0,$$

где $\tilde{a}(\tilde{u}, v_h)$, $\tilde{f}(v_h)$ определяются аналогично (4) с заменой Ω на Ω_h и заменой коэффициентов на их продолжения.

Заменяя в $(\tilde{\mathcal{P}})$ пространство \tilde{V} его подпространством V_h^0 , а интегралы по области Ω_h – составной квадратурной формулой S_{Ω_h} , приходим к схеме (\mathcal{P}_h) . Справедливость равенств

$$\begin{aligned} S_{\Omega_h}(\tilde{A}\nabla u_h \cdot \nabla v_h) &= S_{\Omega_h}(A\nabla u_h \cdot \nabla v_h), \\ S_{\Omega_h}(\tilde{a}_0 u_h v_h) &= S_{\Omega_h}(a_0 u_h v_h), \quad S_{\Omega_h}(\tilde{f} v_h) = S_{\Omega_h}(f v_h) \end{aligned}$$

обеспечивается тем, что все узлы квадратуры S_{Ω_h} лежат в $\bar{\Omega}$.

Отмеченное выше позволяет на основании неравенств (7) получить следующую оценку (см. [2, с. 206]):

$$|\tilde{u} - u_h|_{1, \Omega_h} \leq C \{ |\tilde{u} - \tilde{u}_I|_{1, \Omega_h} + E_a(\tilde{u}_I) + E_f \}, \quad (20)$$

$$E_a(\tilde{u}_I) = \sup_{w_h \in V_h^0} \frac{|\tilde{a}(\tilde{u}_I, w_h) - a_h(\tilde{u}_I, w_h)|}{|w_h|_{1, \Omega_h}}, \quad E_f = \sup_{w_h \in V_h^0} \frac{|\tilde{f}(w_h) - f_h(w_h)|}{|w_h|_{1, \Omega_h}}.$$

Таким образом, следует оценить три составляющие погрешности:

- 1) погрешность интерполяции $|\tilde{u} - \tilde{u}_I|_{1, \Omega_h}$;
- 2) погрешность квадратуры $E_a(\tilde{u}_I)$ при вычислении формы \tilde{a} ;
- 3) погрешность квадратуры E_f при вычислении формы \tilde{f} .

Оценка погрешности интерполяции обеспечивается конструкцией пространства конечных элементов. Согласно (5)

$$|\tilde{u} - \tilde{u}_I|_{1, \Omega_h} \leq ch^2 \|\tilde{u}\|_{3, \Omega_h}.$$

Учитывая, что

$$\|\tilde{u}\|_{3, \Omega_h} \leq \|\tilde{u}\|_{3, \tilde{\Omega}} \leq c \|u\|_{3, \Omega},$$

для первой составляющей оценки погрешности получаем:

$$|\tilde{u} - \tilde{u}_I|_{1, \Omega_h} \leq ch^2 \|u\|_{3, \Omega}. \quad (21)$$

При следующих условиях гладкости исходных данных:

$$u \in H^3(\Omega), \quad a_{ij}, a_0 \in W_\infty^2(\Omega), \quad i, j = 1, 2, \quad \tilde{f} \in H^2(\Omega), \quad (22)$$

далее (см. теоремы ??, ??) будут получены оценки остальных составляющих погрешности:

$$E_a(\tilde{u}_I) \leq ch^2 \|u\|_{3, \Omega}, \quad E_f \leq ch^2 \|\tilde{f}\|_{2, \tilde{\Omega}}. \quad (23)$$

Из этих оценок и оценок (20), (21) следует

Теорема 3. Пусть выполнены предположения (22), Ω – область с кусочно-гладкой границей. Тогда

$$|\tilde{u} - u_h|_{1, \Omega_h} \leq ch^2.$$

Перейдем к доказательству оценок (23).

Теорема 4. Пусть $\tilde{f} \in H^2(\tilde{\Omega})$. Тогда

$$|\tilde{f}(v_h) - f_h(v_h)| \leq ch^2 \|\tilde{f}\|_{2,\tilde{\Omega}} |v_h|_{1,\Omega_h} \quad \forall v_h \in V_h, \quad E_f \leq ch^2 \|\tilde{f}\|_{2,\tilde{\Omega}}.$$

Доказательство. Пользуясь теоремой 1, неравенством Коши–Буняковского и Фридрикса, получим

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(v_h) - f_h(v_h)| &\leq \sum_e \left| E_e(\tilde{f}v_h) \right| \leq ch^2 \sum_e \|\tilde{f}\|_{2,e} \|v_h\|_{1,e} \leq \\ &\leq ch^2 \left(\sum_e \|\tilde{f}\|_{2,e}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_e \|v_h\|_{1,e}^2 \right)^{1/2} = ch^2 \|\tilde{f}\|_{2,\tilde{\Omega}} \|v_h\|_{1,\Omega_h} \leq ch^2 \|\tilde{f}\|_{2,\tilde{\Omega}} |v_h|_{1,\Omega_h}. \end{aligned}$$

Оценка для E_f является следствием этой оценки. \square

Теорема 5. Справедливы оценки

$$|\tilde{a}(\tilde{u}_I, v_h) - a_h(\tilde{u}_I, v_h)| \leq ch^2 \|u\|_{3,\Omega} |v_h|_{1,\Omega_h} \quad \forall v_h \in V_h, \quad E_a(\tilde{u}_I) \leq ch^2 \|u\|_{3,\Omega}.$$

Здесь постоянная c зависит от величины $\sum_{i,j=1}^2 \|a_{ij}\|_{2,\infty,\Omega} + \|a_0\|_{2,\infty,\Omega}$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$|\tilde{a}(\tilde{u}_I, w_h) - a_h(\tilde{u}_I, w_h)| \leq \sum_e \left| E_e \left(\sum_{i,j=1}^2 \tilde{a}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_I}{\partial x_j} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right) \right| + \sum_e |E_e(\tilde{a}_0 \tilde{u}_I w_h)|. \quad (24)$$

Воспользуемся теоремами 1 и 2 ($\tilde{f} = \tilde{a}_0 \tilde{u}_I$). Тогда

$$\begin{aligned} \left| E_e \left(\sum_{i,j=1}^2 \tilde{a}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_I}{\partial x_j} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right) \right| &\leq ch^2 \sum_{i,j=1}^2 \|\tilde{a}_{ij}\|_{2,\infty,e} \|\tilde{u}_I\|_{3,e} \|w_h\|_{1,e} \leq \\ &\leq ch^2 \sum_{i,j=1}^2 \|\tilde{a}_{ij}\|_{2,\infty,e} \|\tilde{u}\|_{3,e} \|w_h\|_{1,e}, \end{aligned}$$

$$|E_e(\tilde{a}_0 \tilde{u}_I w_h)| \leq ch^2 \|\tilde{a}_0 \tilde{u}_I\|_{2,e} \|w_h\|_{1,e} \leq ch^2 \|\tilde{a}_0\|_{2,\infty,e} \|\tilde{u}\|_{2,e} \|w_h\|_{1,e}.$$

Суммируя эти оценки, с учетом (16), (17) и (18) из (24) получаем первое утверждение теоремы. Вторая оценка является следствием первой. \square

5. Результаты тестовых вычислений

Приведем результаты двух тестовых расчетов, различающихся выбором области Ω (единичный квадрат или круг). Целью расчетов является демонстрация как практической пригодности рассмотренной выше схемы, так и проверка точности оценки погрешности, полученной в теореме 3. В качестве исходной задачи рассматривалась задача Дирихле для уравнения Пуассона, соответствующая следующим данным:

$$a_{ij} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2; \quad a_0 = 0; \quad f = -\Delta u,$$

$$u = 12(2 - 3x)^2 \omega_1 - (12x - 10(6x - 3))^3 - 10(6y - 3)^5 - 6) \omega_2 - \omega_3/3,$$

$$\omega_1 = e^{-(6x-3)^2 - (6y-2)^2}, \quad \omega_2 = e^{-(6x-3)^2 - (6y-3)^2}, \quad \omega_3 = e^{-(6x-2)^2 - (6y-3)^2}.$$

Табл. 1

Область Ω – единичный квадрат

n_e	n	h	e_0	e_0/h^3	e_1	e_1/h^2	e_∞	e_∞/h^3
32	113	0.35	1.22	28.51	18.00	155.08	3.49	81.30
128	417	0.18	0.066	11.32	5.66	174.60	0.33	57.11
512	1601	0.09	$4.4 \cdot 10^{-3}$	6.46	1.47	189.97	0.02	35.33
2048	6273	0.044	$4.4 \cdot 10^{-4}$	5.22	0.3	196.39	$2.9 \cdot 10^{-3}$	33.82
8192	24833	0.022	$5.1 \cdot 10^{-5}$	4.78	0.096	198.46	$3.54 \cdot 10^{-4}$	33.26
32768	98817	0.011	$6.18 \cdot 10^{-6}$	4.65	0.024	199.02	$4.4 \cdot 10^{-5}$	33.18

Табл. 2

Область Ω – круг единичного радиуса

n_e	n	h	e_0	e_0/h^3	e_1	e_1/h^2	e_∞	e_∞/h^3
16	59	0.96	20.3695	23.01	76.97	83.52	40.33	45.58
64	213	0.51	2.56	19.29	25.88	99.5	5.34	40.27
256	809	0.26	0.35	19.87	8.54	126.33	1.21	69.00
1024	3153	0.13	0.01	4.73	2.34	138.46	0.06	25.96
4096	12449	0.067	$9.0 \cdot 10^{-4}$	2.99	0.61	135.89	$6.5 \cdot 10^{-3}$	21.72
16384	49473	0.034	$9.5 \cdot 10^{-5}$	2.42	0.15	129.76	$9.3 \cdot 10^{-4}$	23.70

Точное решение u достаточно сложно устроено: в единичном квадрате или круге оно имеет по три ярко выраженных максимума и минимума.

Как для единичного квадрата, так и для единичного круга триангуляция области при различных значениях параметра h производилась следующим образом: при начальном h_0 строилась грубая триангуляция \mathcal{T}_{h_0} , затем получалась триангуляция \mathcal{T}_{h_1} делением каждого треугольника на четыре части и т. д. Полученные таким образом триангуляции при некотором h представлены на рис. 3.

Результаты вычислений при различных h представлены в табл. 1, 2, где n_e – общее число элементов, n – общее число узлов. Представлены следующие меры погрешности:

$$e_0 = |u - u_h|_{0,h}, \quad e_1 = |u - u_h|_{1,h}, \quad e_\infty = |u - u_h|_{\infty,h}.$$

Из этих таблиц можно сделать вывод, что e_0 и e_∞ имеют порядок h^3 , тогда как $e_1 = O(h^2)$, что вполне соответствует результату теоремы 3.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 07-07-00183, 07-01-00499).

Summary

A.K. Safina, R.Z. Dautov. Revised quadratic subparametric triangular finite element of the second-order accuracy.

The modification of quadratic triangular finite element is presented. The considered 7-nodes element allows to obtain diagonal mass-matrix in FEM-scheme with numerical integration. We give a description of corresponding quadrature rule, which has positive coefficients. Error estimates for homogeneous Dirichlet problem for second order PDE are derived. Numerical experiment results, intended to illustrate the strength of the proved theorem, are shown.

Литература

1. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир – 1980. – 512 с.
2. *Даутов Р.З., Карчевский М.М.* Введение в теорию метода конечных элементов. Казань: Изд-во Казан. ун-та. – 2004. – 238 с.

Поступила в редакцию
24.10.07

Сафина Асия Камилевна – аспирант кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета.

E-mail: *aSafina@ksu.ru*

Даутов Рафаил Замилович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета.

E-mail: *rdautov@ksu.ru*