

УДК 539.189.1

**ОБОБЩЕННОЕ ДИНАМИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ  
И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЮОНА С ЯДРОМ***А.А. Васильев, Р.Х. Гайнутдинов,  
А.А. Мутыгуллина, М.А. Хамадеев***Аннотация**

В данной работе исследовано взаимодействие мюона с ядром с помощью обобщенного динамического уравнения. С учетом распределения заряда в ядре и КЭД-поправок проведены расчеты энергетических уровней мюонного атома и матричных элементов оператора Грина, соответствующих дискретной части энергетического спектра.

**Введение**

В настоящее время большое значение уделяется исследованию свойств мюонов и мюонных атомов. Это обусловлено тем, что мюонные атомы играют важную роль при определении электромагнитной структуры атомных ядер [1], а также при проверке квантовой электродинамики. Уникальные возможности, которые открывает использование мюонов для таких исследований, обусловлены большой массой мюона. Например, при исследовании структуры ядра важным является то, что благодаря большой массе мюон может проникать внутрь ядра. В этом случае информация о структуре ядра получается из анализа лэмбовского сдвига в мюонных атомах. Зная решения уравнения Дирака, лэмбовский сдвиг энергетических уровней можно рассматривать как поправку к энергии состояния мюонного атома. Подбирая плотность распределения заряда в ядре и сравнивая теоретически и экспериментально полученные значения энергии, можно таким образом изучить электромагнитную структуру атомных ядер. В мюонных атомах наиболее существенными являются поправки, связанные с поляризацией электронного вакуума, то есть с процессами рождения и уничтожения электрон-позитронных пар (см. [1, 2]). Обычно поправка к кулоновскому взаимодействию между заряженными частицами, обусловленная поляризацией вакуума, описывается с помощью потенциала Юлинга [2]. Использование такого потенциала предполагает, что эффектами нелокальности во времени процесса, при котором рождаются, а затем уничтожаются электрон-позитронные пары, можно пренебречь. Это приближение хорошо работает в случае обычных электронных атомов и легких мюонных. Однако в случае тяжелых мюонных атомов эффекты нелокальности могут быть очень существенными. Эти же эффекты могут играть важную роль в процессах мюонного катализа реакции ядерного синтеза. Это, в первую очередь, касается исследований, связанных с принципиально новыми способами осуществления реакции ядерного синтеза, которые стали возможными благодаря достигнутому в последнее время успехам в области лазерной физики. Например, когерентная осцилляция мюонных молекул  $dd\mu$  в суперинтенсивных лазерных полях может стимулировать контролируемые ядерные реакции синтеза [3]. При интенсивности лазерного поля, необходимой для осуществления таких реакций, мюоны, входящие в состав молекулы  $dd\mu$ , приобретают энергию порядка 1 МэВ, что сопоставимо с пороговой

энергией процесса рождения электрон-позитронной пары. Это означает, что в таких процессах эффекты поляризации вакуума могут играть очень важную роль. Нелокальность во времени эффективного взаимодействия мюона с ядром может быть последовательно учтена с помощью формализма обобщенной квантовой динамики (ОКД) [4]. Это было продемонстрировано в работах [5, 6]. В работе [7] был построен оператор эффективного взаимодействия мюона с ядром, позволяющий учитывать нелокальность во времени этого взаимодействия. В настоящей работе этот оператор используется для вычисления матричных элементов оператора Грина, соответствующих дискретной части спектра мюона в поле ядра, и для определения лэмбовского сдвига энергетических уровней мюонных атомов с учетом распределения заряда в ядре.

### 1. Формализм ОКД

Приведем основные положения формализма обобщенной квантовой динамики, развитого в работе [4]. Было показано [4], что уравнение Шредингера не является самым общим динамическим уравнением, и было выведено более общее уравнение движения как следствие основополагающих физических принципов. Как постулат в ОКД используется то, что вероятность события есть модуль квадрата комплексного числа, называемого амплитудой вероятности; общая амплитуда вероятности упорядоченной по времени последовательности событий есть произведение отдельных амплитуд вероятности для каждого события; амплитуда вероятности события, которое может произойти несколькими различными способами, есть сумма амплитуд вероятности для каждого из этих способов. В работе [4] было показано, что в качестве альтернатив события можно использовать процессы с определенными временами начала и конца взаимодействия в системе. В формализме ОКД амплитуда вероятности того, что при измерении в момент времени  $t$  система будет обнаружена в состоянии  $|\psi_2\rangle$ , если при измерении в момент времени  $t_0$  она находилась в состоянии  $|\psi_1\rangle$ , представляется в следующей форме [4]:

$$\langle\psi_2|U(t, t_0)|\psi_1\rangle = \langle\psi_2|\psi_1\rangle + \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \langle\psi_2|\tilde{S}(t_2, t_1)|\psi_1\rangle. \quad (1)$$

Здесь  $U(t, t_0)$  – оператор эволюции системы,  $\langle\psi_2|\psi_1\rangle$  – амплитуда вероятности того, что в системе не было взаимодействия,  $\langle\psi_2|\tilde{S}(t_2, t_1)|\psi_1\rangle$  – амплитуда вероятности того, что если в момент времени  $t_1$  состояние системы было  $|\psi_1\rangle$ , то взаимодействие в системе начнется в момент времени  $t_1$ , закончится в момент времени  $t_2$ , и в тот же момент система окажется в состоянии  $|\psi_2\rangle$ .

В ОКД было выведено обобщенное динамическое уравнение [4]:

$$\frac{d\langle\psi_2|T(z)|\psi_1\rangle}{dz} = - \sum_n \frac{\langle\psi_2|T(z)|n\rangle\langle n|T(z)|\psi_1\rangle}{(z - E_n)^2}, \quad (2)$$

где

$$T(z) = i \int_0^\infty d\tau e^{iz\tau} \tilde{T}(\tau), \quad (3)$$

$$\tilde{T}(\tau) = e^{-iH_0 t_2} \tilde{S}(t_2, t_1) e^{iH_0 t_1}, \quad (4)$$

с граничным условием

$$T(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} B(z), \quad (5)$$

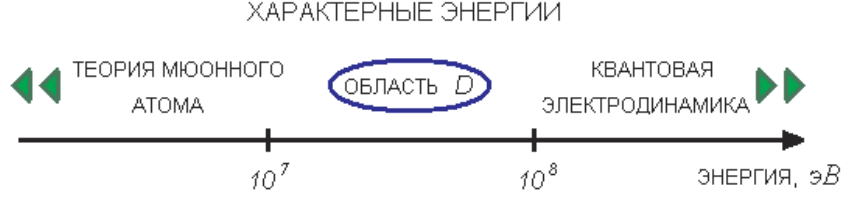


Рис. 1. Рассматриваемая область  $D$ , находящаяся между характерными энергиями теории мюонных атомов и квантовой электродинамики

где оператор  $B(z)$  есть оператор взаимодействия с бесконечно малым временем взаимодействия [4]. Несмотря на то, что в граничном условии (5)  $z$  устремляется к бесконечности, мы можем ограничиться рассмотрением области энергии, лежащей гораздо выше нашего низкоэнергетического приближения, но гораздо меньшей области энергии, соответствующей более фундаментальной высокоэнергетической теории (рис. 1). Это открывает новые возможности для построения различных эффективных теорий [5, 6]: амплитуды процессов, важных для низкоэнергетической теории, могут быть определены в рамках высокоэнергетической теории для энергий, лежащих в «пограничной» области  $D$ , а затем могут быть использованы для построения оператора взаимодействия, определяющего динамику низкоэнергетической теории. Так, в работе [7], суммируя упорядоченные во времени диаграммы квантовой электродинамики (КЭД), для энергий, лежащих в области  $D$  (рис. 1), был построен оператор взаимодействия мюона с ядром. Полученный оператор учитывает поляризацию вакуума. Обобщенное динамическое уравнение (2) с таким оператором взаимодействия позволяет определить низкоэнергетическую динамику мюона в поле ядра. Например, оно позволяет определить функцию Грина для мюона в поле ядра с учетом поляризации вакуума.

## 2. Матричные элементы оператора Грина для дискретной части спектра

Оператор Грина определяется в общем случае как

$$G(z) = i \int_0^{\infty} dt e^{izt} U_s(t, 0), \quad (6)$$

где  $U_s(t, 0) = e^{-iH_0 t} U(t, 0) e^{iH_0 t}$  – оператор эволюции в представлении Шредингера. Для нашей задачи удобно ввести такой «свободный» оператор Грина, который не будет учитывать кулоновское взаимодействие мюона с ядром [7]:

$$G_0(z) \equiv \frac{1}{z - H_0} = \sum_n \frac{|\psi_n\rangle \langle \psi_n|}{z - E_n^0}. \quad (7)$$

Здесь  $|\psi_n\rangle$  – собственные вектора гамильтониана в уравнении Дирака, то есть

$$H_0 |\psi_n\rangle = E_n^0 |\psi_n\rangle, \quad (8)$$

или в координатном представлении

$$\left( -i\vec{\alpha}\vec{\nabla} + m\beta - \frac{Z\alpha}{r} \right) \psi_n(\mathbf{r}) = E_n^0 \psi_n(\mathbf{r}). \quad (9)$$

Тогда  $|\psi_n\rangle$  будет разложением по координатному базису

$$|\psi_n\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3r \psi_n(\mathbf{r})|\mathbf{r}\rangle. \quad (10)$$

Основной вклад в лэмбовский сдвиг энергетических уровней дает взаимодействие мюонного атома с электронным вакуумом. В оператор (7) можно добавить такое взаимодействие, заменив «свободный» оператор Грина на следующий [8]:

$$G(z) = \sum_n \frac{|\psi_n\rangle\langle\psi_n|}{z - E_n^0 - C_n(z)}, \quad (11)$$

где функция  $C_n(z)$  в пропагаторе будет описывать взаимодействие с вакуумом. В уравнении (11) знак  $\sum_n$  означает суммирование по дискретной части спектра энергии и интегрирование по непрерывной. В данной работе мы будем рассматривать матричные элементы оператора (11) только для дискретной части спектра. В этом случае  $|\psi_n\rangle$  описывают состояния мюона в поле ядра. Такой оператор Грина несет информацию не только о связанных состояниях, а также описывает такие важные процессы, как тормозное излучение, сопровождаемое захватом мюона ядром, или взаимодействие мюона с атомом в сильном лазерном поле.

Оператор взаимодействия  $B(z)$  можно представить как сумму кулоновского взаимодействия и взаимодействия за счет рождения и уничтожения электрон-позитронных пар:

$$\langle\mathbf{p}_2|B(z)|\mathbf{p}_1\rangle = -\frac{Ze^2}{q^2} + \langle\mathbf{p}_2|B_{\text{pol}}(z)|\mathbf{p}_1\rangle, \quad (12)$$

где

$$\langle\mathbf{p}_2|B_{\text{pol}}(z)|\mathbf{p}_1\rangle = -\frac{Ze^2}{q^4} \left( \tilde{\Pi}_{00}(z - E_{p_1}, q) + \tilde{\Pi}_{00}(z - E_{p_2}, q) \right) \quad (13)$$

и  $q = |\mathbf{q}|$ . Здесь

$$\tilde{\Pi}_{00} = -\frac{\alpha}{\pi} q^2 \tilde{J}(z, q), \quad (14)$$

где

$$\tilde{J}(z, q) = -\frac{2m_e^2}{3} \int_1^{\infty} dx \frac{(x+1/2)\sqrt{x-1}}{x^{3/2}(4m_e^2x - z^2 + q^2 + i0)} \left( \frac{z}{\sqrt{q^2 + 4m_e^2x}} + \frac{z^2 - q^2}{4m_e^2x} \right). \quad (15)$$

Решение обобщенного динамического уравнения (2) для такого пропагатора с точностью  $Z\alpha^2$  дает

$$C_n(z) = \langle\psi_n|B_{\text{vac}}(z - E_n)|\psi_n\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} U_n(q) B_{\text{pol}}(z - E_n, q), \quad (16)$$

где

$$B_{\text{pol}}(z - E_n, q) = -\frac{16Z\alpha^2 m_e^2}{3q^2} \int_1^{\infty} \frac{dx(x+1/2)\sqrt{x-1}}{x^{3/2}(4m_e^2x - (z - E_n)^2 + q^2)} \times \left( \frac{z - E_n}{\sqrt{q^2 + 4m_e^2x}} + \frac{(z - E_n)^2 - q^2}{4m_e^2x} \right). \quad (17)$$

Расчеты реальной и мнимой частей функции  $C_n(z)$  для состояний  $2p_{3/2}$  и  $3d_{5/2}$  приведены на рис. 2. Как это следует из уравнения (11), значения  $C_n(z)$  определяют соответствующие матричные элементы оператора Грина.

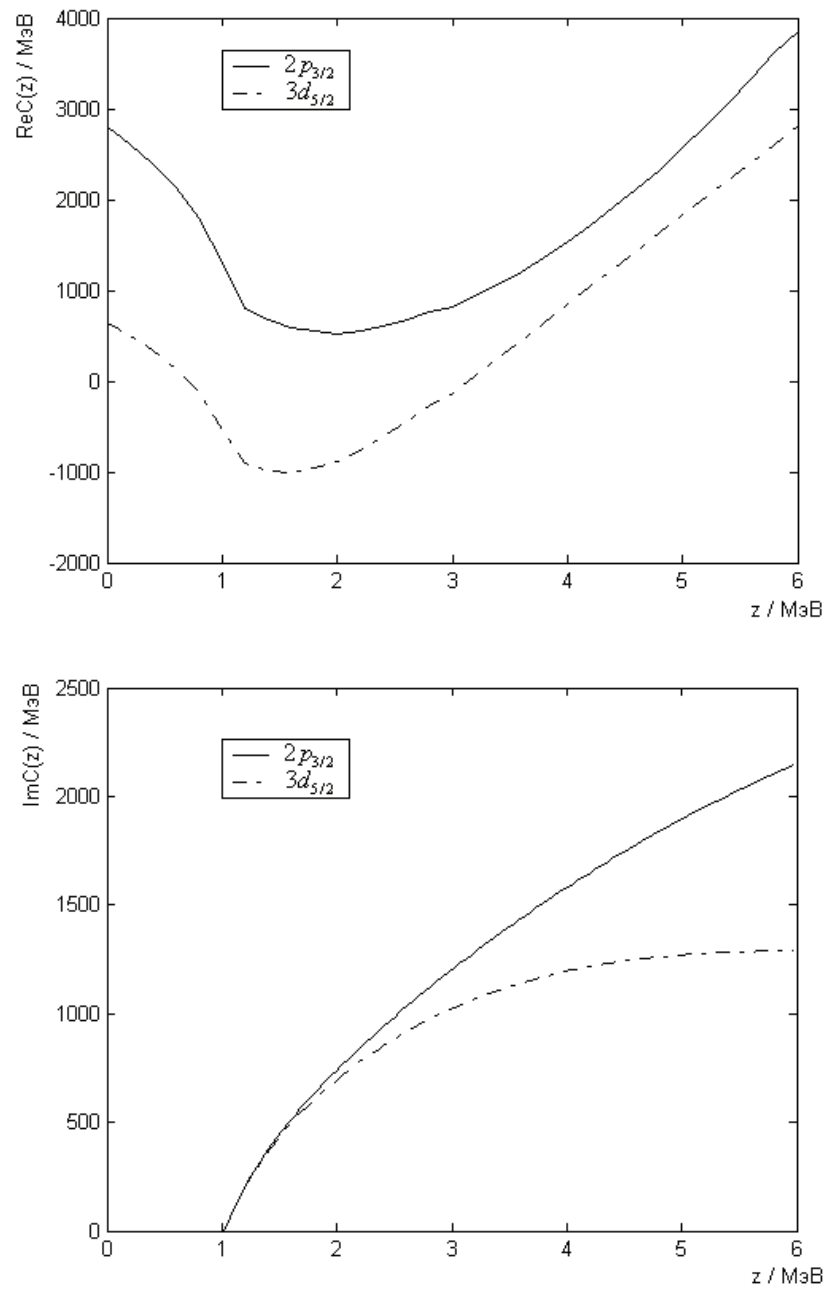


Рис. 2. Расчеты реальной и мнимой части функции  $C_n(z)$  для  $Z = 20$

### 3. Лэмбовский сдвиг с учетом распределения заряда в ядре

Энергия связанных состояний мюона и ядра будет определяться из условия полюса в операторе Грина (11):

$$z - E_n^0 - C_n(z) = 0. \quad (18)$$

Пренебрегая зависимостью  $C_n(z)$  в окрестности точки  $z = E_n^0$ , получаем лэмбовский сдвиг

$$\Delta E_n \equiv E_n - E_n^0 = C_n(E_n^0). \quad (19)$$

Для лэмбовского сдвига получаем из (16) и (17) с точностью  $Z\alpha^2$  [7]:

$$\Delta E_n = C_n(E_n^0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} U_n(q) B_{\text{pol}}(0, q), \quad (20)$$

где

$$B_{\text{pol}}(0, q) = \frac{4Z\alpha^2}{3} \int_1^{\infty} dx \frac{(x+1/2)\sqrt{x-1}}{x^{5/2}(4m_e^2x+q^2)} \quad (21)$$

и

$$U_n(q) = \psi_n^*(\mathbf{q})\psi_n(\mathbf{q}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3r e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \psi_n^*(\mathbf{r})\psi_n(\mathbf{r}). \quad (22)$$

Здесь  $\psi_n(\mathbf{r})$  есть решение уравнения Дирака, которое, переходя к радиальным волновым функциям  $f(r)$  и  $g(r)$ , можно записать в безразмерной системе единиц  $\hbar = c = m = 1$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} f(r) + (1+k) \frac{f(r)}{r} - \{(\varepsilon+1) - V(r)\} g(r) &= 0, \\ \frac{d}{dr} g(r) + (1-k) \frac{g(r)}{r} + \{(\varepsilon-1) - V(r)\} f(r) &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

В работе [9] КЭД-поправки в энергетические уровни мюонного атома вычислялись в приближении точечного ядра, то есть предполагалось, что

$$V(r) = -\frac{Z\alpha}{r}. \quad (24)$$

Но такое допущение несправедливо для больших ядер и для состояний, расположенных близко к ядру, то есть  $1s_{1/2}$  и  $2p_{1/2}$ ,  $2p_{3/2}$ . В этом случае ошибка в нахождении энергии становится существенной.

В данной работе численно решено уравнение Дирака, и в качестве потенциала использован потенциал Ферми-модели ядра. Потенциал можно записать в классическом виде [1]:

$$V(r) = -Z\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x \frac{\rho(x)}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} = -4\pi Z\alpha \left( \frac{1}{r} \int_0^r dx x^2 \rho(x) - \int_r^{\infty} dx x \rho(x) \right), \quad (25)$$

где  $\rho(x)$  – радиальная плотность распределения заряда в ядре, которая должна удовлетворять условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^3x \rho(x) = 4\pi \int_0^{\infty} dx x^2 \rho(x) = 1. \quad (26)$$

Результаты опытов по рассеянию быстрых электронов ( $E_e > 500$  МэВ) на ядрах лучше всего согласуются с предположением, что плотность электрического заряда максимальна в центре ядра и монотонно убывает к периферии согласно формуле

$$\rho(x) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(4 \ln 3 \frac{x-a}{b}\right)}, \quad (27)$$

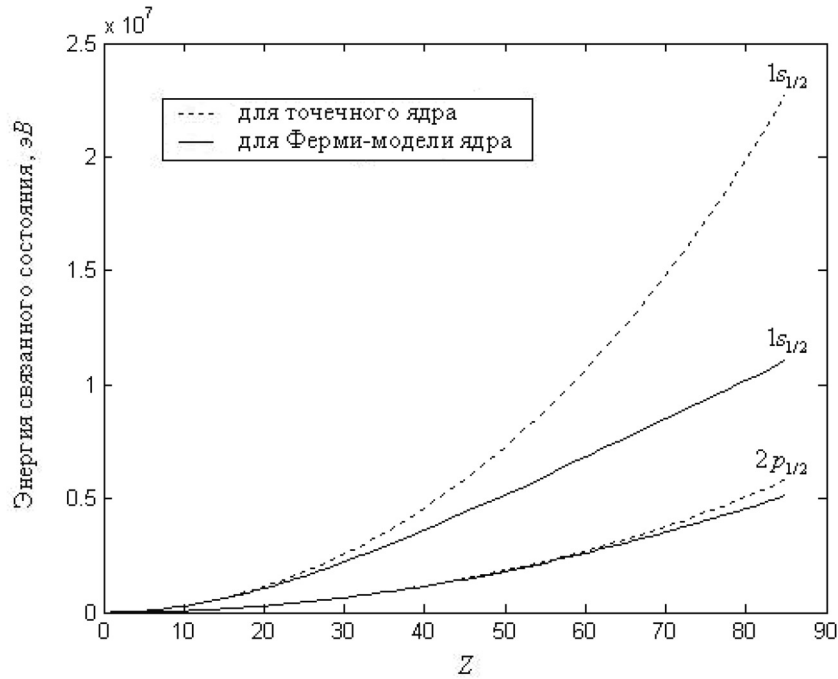


Рис. 3. Зависимость энергии связанного состояния от атомного номера для точечного ядра и для Ферми-модели ядра

где  $\rho_0$  – нормировочная постоянная,  $a$  и  $b$  – параметры ядра, определяемые экспериментально. Такое распределение  $\rho(x)$  есть распределение Ферми, а модель ядра с таким распределением заряда будет Ферми-моделью ядра. На рис. 3 представлена зависимость энергии связанного состояния от атомного номера  $Z$  для точечного ядра и для Ферми-модели ядра, где для Ферми-модели такая зависимость рассчитана численно.

### Заключение

Динамика мюона в поле ядра определяется оператором Грина (11). Функции  $C_n(z)$ , описывающие поправки, которые связаны с поляризацией вакуума, могут быть вычислены с помощью обобщенного динамического уравнения. В данной работе эти функции были вычислены для состояний  $2p_{3/2}$  и  $3d_{5/2}$  из дискретной части спектра. При расчете матричных элементов оператора Грина (11) и определяемых ими энергий связанных состояний мюонных атомов необходимо учитывать распределение зарядов в ядре. Важность учета того, что ядро не является точечным, продемонстрирована нами на примере состояний  $1s_{1/2}$  и  $2p_{1/2}$ . При этом мы использовали распределение Ферми. Как это видно на рис. 3, для  $Z = 80$  энергии состояния  $1s_{1/2}$ , вычисленные в приближении точечного ядра и с учетом распределения заряда ядра, определяемого моделью Ферми, отличаются почти в два раза. Соответственно, волновая функция  $\psi_n(\mathbf{r})$  для реального мюонного атома существенно отличается от волновой функции, вычисленной с помощью уравнения Дирака для точечного ядра. Поэтому при вычислении функций  $C_n(z)$  необходимо использовать волновые функции, являющиеся решениями уравнения Дирака, учитывающими распределения заряда в ядре.

### Summary

*A.A. Vasil'ev, R.Kh. Gainutdinov, A.A. Mutygullina, M.A. Khamadeev.* The generalized dynamics equation and the interaction of a muon with nucleus.

The interaction of the muon with the nucleons is investigated by using the generalized dynamical equation. Calculations of energy levels of the muonic atom and the matrix elements of the Green operator corresponding to the discrete part of the energy spectrum are performed by taking into account QED corrections and the nuclear charge distribution.

### Литература

1. *Boric E., Rinker G.A.* The energy levels of muonic atoms // *Rev. Mod. Phys.* – 1982. – V. 54. – P. 67–118.
2. *Watson P.J.C., Sundaresan M.K.* Discrepancy between theory and experiment in muonic X rays – a critical discussion // *Can. J. Phys.* – 1974. – V. 52. – P. 2037–2058.
3. *Chelkowski S., Bandrank A., Corkum P.* Muonic molecules in superintense laser fields // *Phys. Rev. Lett.* – 2004. – V. 93. – P. 083602.
4. *Gainutdinov R.Kh.* Nonlocal interactions and quantum dynamics // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 1999. – V. 32. – P. 5657–5677.
5. *Gainutdinov R.Kh., Mutygullina A.A., Scheid W.* Effects of nonlocality in time of interactions of an atom with its surroundings on the broadening of spectral lines of atoms // *Phys. Lett. A.* – 2002. – V. 306 – P. 1–9.
6. *Gainutdinov R.Kh., Mutygullina A.A.* Nonlocality of the NN interaction in an effective field theory // *Phys. Rev. C.* – 2002. – V. 66. – P. 014006.
7. *Gainutdinov R.Kh., Iyudin A.S., Mutygullina A.A.* Description of the polarization effects in the muonic atoms within the framework of generalized quantum dynamics // *Proc. of Spie.* – 2006. – V. 6181. – P. 618113.
8. *Гайнутдинов Р.Х.* Естественное уширение спектральных линий многозарядных ионов и проблема поверхностных расходимостей // *ЖЭТФ.* – 1995. – Т. 108. – С. 1600–1613.
9. *Гайнутдинов Р.Х., Июдин А.С., Мутыгуллина А.А.* Влияние поляризации вакуума на характер динамики мюона в поле ядра // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* – 2006. – Т. 148, Кн. 1. – С. 90–98.

Поступила в редакцию  
01.02.07

---

**Васильев Александр Александрович** – магистрант кафедры оптики и нанофотоники Казанского государственного университета.

E-mail: *sanyek\_vasil\_ev@mail.ru*

**Гайнутдинов Ренат Хамитович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры оптики и нанофотоники Казанского государственного университета.

E-mail: *Renat.Gainutdinov@ksu.ru*

**Мутыгуллина Айгуль Ахмадулловна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики Казанского государственного университета.

E-mail: *Aigul.Mutygullina@ksu.ru*

**Хамадеев Марат Актасович** – магистрант кафедры оптики и нанофотоники Казанского государственного университета.

E-mail: *zumrus@narod.ru*