

УДК 539.3

**ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ  
О ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОМ  
ДЕФОРМИРОВАНИИ И УСТОЙЧИВОСТИ  
ТРЕХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ  
С КОНТУРНЫМИ ПОДКРЕПЛЯЮЩИМИ  
СТЕРЖНЯМИ**

*И.Б. Бадриев<sup>1</sup>, М.В. Макаров<sup>1</sup>, В.Н. Паймушин<sup>1,2</sup>,  
С.А. Холмогоров<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

<sup>2</sup>Казанский национальный исследовательский технический университет  
имени А.Н. Туполева, г. Казань, 420111, Россия

**Аннотация**

Проведено численное исследование задачи о геометрически нелинейном осесимметричном деформировании трехслойной цилиндрической оболочки с трансверсально-мягким наполнителем, подкрепленной в торцевых сечениях упругими стержнями. Для описания процесса деформирования использованы выведенные ранее уравнения уточненной геометрически нелинейной теории, позволяющие как изучить докритическое поведение оболочки, так и выявить все возможные формы потери устойчивости несущих слоев. Указанные уравнения основаны на введении в рассмотрение в качестве неизвестных контактных усилий взаимодействия внешних слоев с наполнителем, а также внешних слоев и наполнителя с подкрепляющими телами во всех точках поверхностей их сопряжения. Разработаны численные методы решения сформулированных задач. Они основаны на предварительном сведении исходных задач к системе интегро-алгебраических уравнений, при решении которых используется метод конечных сумм. Предложена методика исследования докритического и закритического геометрически нелинейного поведения оболочки при ее торцевом сжатии через контурные подкрепляющие стержни, согласно которой неустойчивые положения равновесия определяются методом продолжения решения по параметру при выборе в качестве параметра работы внешних сил. Предложен способ нахождения критической нагрузки (точки бифуркации), при достижении которой оболочка теряет устойчивость. Он основан на линеаризации исходной геометрически нелинейной задачи в окрестности её нелинейного решения с последующей формулировкой задачи на собственные значения с нелинейным входением параметра. Приведены результаты численных экспериментов. Проведен анализ результатов экспериментов.

**Ключевые слова:** трехслойная цилиндрическая оболочка, трансверсально-мягкий наполнитель, контурный подкрепляющий стержень, геометрическая нелинейность, контактные напряжения, осевое сжатие, осесимметричная деформация, метод конечных сумм, докритическое и закритическое поведение, точка бифуркации, линеаризованная задача, формы потери устойчивости

**Введение**

Трехслойные пластины и оболочки являются типовыми элементами конструкций того или иного назначения [1–5], в частности в судостроении [6–9], авиационной и ракетно-космической промышленности [10–14]. Задачи механики их деформирования, как правило, формулируются без учёта их взаимодействия с контурными

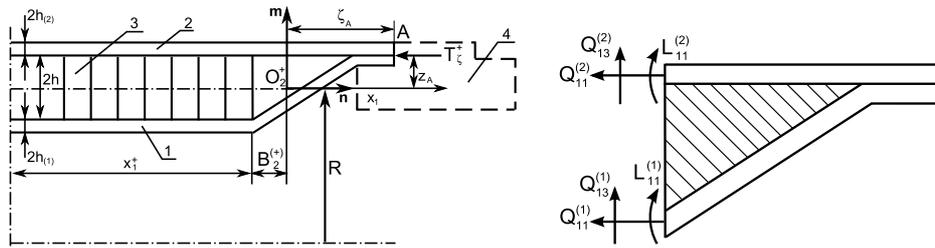


Рис. 1. а) Схема соединения трехслойной оболочки со шпангоутом; б) схема подкрепляющего стержня

подкрепляющими стержнями. Результаты их исследований можно найти в работах [15–20], обширная библиография, посвященная таким задачам, содержится, в частности в обзорной статье [21].

Отдельное направление исследований в области механики трехслойных конструкций составляют задачи устойчивости, анализ которых дан в статье [22]. Отметим, что численные методы исследования процесса геометрически и физически нелинейного деформирования, включая вопросы выявления форм потери устойчивости (ФПУ) трехслойных пластин, освещены в статьях [23–28].

Трехслойные оболочки, составленные из двух жестких несущих слоев 1, 2 и расположенного между ними заполнителя 3, относящийся к классу трансверсально-мягких, как правило, в реальных конструкциях соединяются с другими конструктивными элементами через шпангоуты 4 (рис. 1, а). Такое соединение зачастую выполняется так, что осевая сжимающая сила, приложенная к шпангоуту, в силу особенностей конструктивного исполнения трехслойной оболочки на контуре (рис. 1, б) главным образом передается на наружный несущий слой. Так как такие оболочки являются наиболее рациональными при их работе на изгиб и сжатие, одной из главных при их прочностном анализе является задача исследования возможных ФПУ.

В работах [29, 30] был проведен анализ конструктивных вариантов исполнения трехслойных элементов конструкций в виде пластин и оболочек с заполнителем, относящимся к классу трансверсально-мягких, и с внешними слоями, имеющими на внешнем контуре подкрепляющие стержни, предназначенные для обеспечения передачи нагрузки на несущие слои при взаимодействии с другими элементами конструкций. Для таких конструкций при малых деформациях и средних перемещениях была построена уточненная геометрически нелинейная теория, позволяющая описать процесс их докритического деформирования и выявить все возможные ФПУ несущих слоев и подкрепляющих элементов. Она основана на введении в рассмотрение в качестве неизвестных контактных усилий взаимодействия внешних слоев с заполнителем, а также внешних слоев и заполнителя с подкрепляющими стержнями во всех точках поверхностей их сопряжения. Для вывода основных уравнений равновесия, статических граничных условий для оболочки и подкрепляющих стержней, а также условий кинематического сопряжения внешних слоев с заполнителем, внешних слоев и заполнителя с подкрепляющими стержнями использовался предложенный ранее [31] обобщенный вариационный принцип Лагранжа. От всех известных вариантов предложенная в [29, 30] теория отличается высокой степенью точности и содержательности при введении в рассмотрение минимального количества неизвестных двумерных функций для оболочки, одномерных функций для подкрепляющих стержней и двумерных и одномерных контактных усилий взаимодействия элементов конструкции.

Согласно результатам, изложенным в [29, 30], для трехслойной оболочки, показанной на рис. 1, *а*, примыкающий к ней участок (рис. 1, *б*) при составлении расчётной схемы с большой степенью точности целесообразно рассматривать как подкрепляющий стержень, так как заштрихованный объем между двумя внешними слоями в реальных конструкциях всегда заполняется тем или иным жестким материалом. Существующие методы и известные пакеты прикладных программ для расчёта такого класса трехслойных пластин и оболочек с учётом реальных особенностей их конструктивного исполнения на контуре абсолютно не эффективны и практически не пригодны. В связи с этим настоящая работа посвящена разработке на основе уравнений, предложенных в [29, 30], численного метода решения осесимметричной геометрически нелинейной задачи о докритическом и закритическом поведении трехслойной цилиндрической оболочки, относящейся к описанному классу конструкций, и нелинейной задачи на собственные значения, возникающей при линеаризации в окрестности решения исходной нелинейной задачи о докритическом деформировании, с целью выявления и исследования возможных осесимметричных ФПУ. В среде MatLab с целью численной реализации предложенных приближенных методов разработан комплекс программ и с его помощью проведены численные эксперименты. Отметим, что аналогичные исследования были ранее проведены в работе [32], в которой на базе уравнений [29, 30] была рассмотрена геометрически нелинейная задача о продольно-поперечном изгибе по цилиндрической форме трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем, подкрепленной в торцевых сечениях абсолютно твердыми телами, разработан численный метод её решения и проведено исследование докритического напряженно-деформированного состояния (НДС).

### 1. Постановка задачи

Будем считать, что внешние слои трехслойной цилиндрической оболочки имеют толщины  $2h_{(k)}$ , а ортотропный трансверсально-мягкий наполнитель – толщину  $2h$  (рис. 1, *а*). Пусть  $\Sigma \subset R^2$ ,  $\Sigma_{(k)} \subset R^2$  – ограниченные области, занимаемые срединными плоскостями наполнителя, нижнего ( $k = 1$ ) и верхнего ( $k = 2$ ) несущих слоев (здесь и далее индекс в круглых скобках соответствует верхнему и нижнему несущим слоям и  $k = 1, 2$ );  $z \in [-h, h]$  и  $z_{(k)} \in [-h_{(k)}, h_{(k)}]$  – координаты, отсчитываемые от  $\Sigma$  и  $\Sigma_{(k)}$  соответственно в направлении единичной нормали  $\mathbf{m}$  к  $\Sigma$ , составляющий с единичными векторами  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  выбранной системы координат правосторонний триэдр (рис. 2).

В работах [29, 30] для трехслойных оболочек описанного класса на основе обобщенного вариационного принципа Лагранжа [31] была предложена уточненная геометрически нелинейная модель деформирования и получены основные уравнения равновесия оболочки, подкрепляющих стержне и условия кинематического сопряжения жестких внешних слоев с наполнителем, а также внешних слоев и наполнителя с подкрепляющими стержнями. Для трехслойной цилиндрической оболочки, для которой параметры Ляме равны  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = R$ , а главные кривизны на  $\Sigma$  есть  $k_1 = 0$  и  $k_2 = 1/R$ , описанные уравнения равновесия внешних слоев и кинематические условия их сопряжения с наполнителем будут иметь в осесимметричном случае следующий вид (здесь и далее  $\delta_{(1)} = 1$ ,  $\delta_{(2)} = -1$ ):

$$\frac{dN_1^{(k)}}{dx} + \frac{\delta_{(k)}E_3}{2h} (w^{(2)} - w^{(1)}) + X_3^{(k)} - \frac{T_{22}^{(k)}}{R} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{dT_{11}^{(k)}}{dx} + \delta_{(k)}q_1 = 0, \quad (2)$$

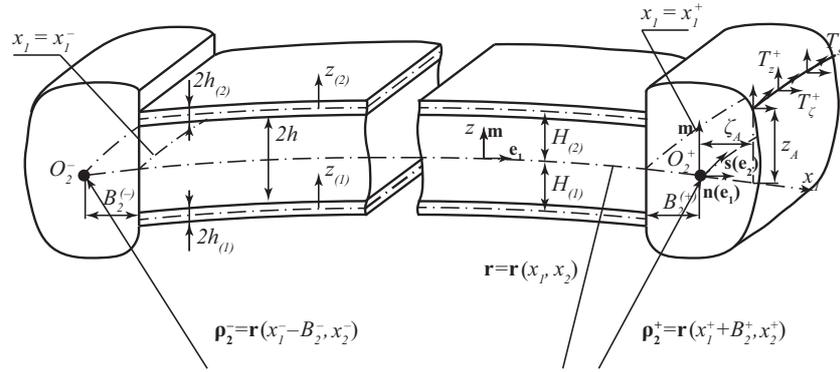


Рис. 2. Трехслойная оболочка с контурными подкрепляющими стержнями

$$\mu_1 = u^{(1)} - u^{(2)} - H_{(1)}\omega^{(1)} - H_{(2)}\omega^{(2)} + \frac{2hq_1}{G_{13}} - \frac{2h^3}{3E_3} \frac{d^2q_1}{dx^2} = 0. \quad (3)$$

В уравнениях (1)–(3) тангенциальные усилия  $T_{11}^{(k)}$ ,  $T_{22}^{(k)}$  и обобщенные перерезывающие силы  $N_1^{(k)}$  выражаются через неизвестные осевые перемещения  $u^{(k)}$ , прогибы  $w^{(k)}$  срединных поверхностей несущих слоев и касательные напряжения в заполнителе  $q_1$ , постоянные по его толщине, по формулам

$$\begin{aligned} N_1^{(k)} &= Q_1^{(k)} + H_{(k)}q_1, & Q_1^{(k)} &= \frac{dM_{11}^{(k)}}{dx} + (T_{11}^{(k)}\omega^{(k)}), & \omega^{(k)} &= \frac{dw^{(k)}}{dx}, \\ M_{11}^{(k)} &= -D_{11}^{(k)} \frac{d^2w^{(k)}}{dx^2}, & T_{11}^{(k)} &= B_{11}^{(k)} \left[ \frac{du_1^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2}(\omega^{(k)})^2 + \nu_{21}^{(k)} \frac{w^{(k)}}{R} \right], \\ T_{22}^{(k)} &= B_{22}^{(k)} \left[ \nu_{12}^{(k)} \left( \frac{du_1^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2}(\omega^{(k)})^2 \right) + \frac{w^{(k)}}{R} \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где  $R$  – радиус срединной поверхности заполнителя (см. рис. 1, а),  $B_{ii}^{(k)} = 2h_{(k)}E_i^{(k)} / (1 - \nu_{12}^{(k)}\nu_{21}^{(k)})$ ,  $i = 1, 2$ , и  $D_{11}^{(k)} = B_{11}^{(k)}h_{(k)}^2/3$  – жесткость на растяжение-сжатие и изгибная жесткость  $k$ -го слоя, имеющего толщину  $2h_{(k)}$  и выполненного из материала с модулями упругости  $E_1^{(k)}$ ,  $E_2^{(k)}$  и коэффициентами Пуассона  $\nu_{12}^{(k)}$ ,  $\nu_{21}^{(k)}$ ;  $H_{(k)} = h_{(k)} + h$ ,  $2h$  – толщина заполнителя, имеющего модуль упругости  $E_3$  в поперечном направлении и модуль поперечного сдвига  $G_{13}$ ;  $M_{11}^{(k)}$  – внутренний изгибающий момент в  $k$ -м слое;  $X_{(k)}^1$ ,  $X_{(k)}^3$  – компоненты поверхностной нагрузки, приведенной к срединной поверхности  $k$ -го слоя,  $Q_1^{(k)}$  – перерезывающие силы в  $k$ -м несущем слое без учёта касательных напряжений в заполнителе.

Если ввести в рассмотрение [29, 30] неизвестные контактные усилия взаимодействия внешних слоев и заполнителя с подкрепляющими стержнями (см. рис. 1, б, 2), то решения уравнений (1)–(4) при  $x_1 = x_1^\pm$  должны удовлетворять граничным условиям

$$M_{11}^{(k)} = L_{11}^{(k)}, \quad \frac{dM_{11}^{(k)}}{dx} + T_{11}^{(k)}\omega^{(k)} + H_{(k)}q_1 = Q_{13}^{(k)} + h\tau_1, \quad T_{11}^{(k)} = Q_{11}^{(k)}, \quad q_1 = \tau_1, \quad (5)$$

где  $Q_{11}^{(k)}$ ,  $Q_{13}^{(k)}$  и  $L_{11}^{(k)}$  – неизвестные погонные контактные усилия и изгибающие моменты,  $\tau_1$  – поверхностные контактные напряжения, формирующиеся в точках сопряжения подкрепляющего стержня с заполнителем в сечениях  $x_1 = x_1^\pm$ .

Предположим, что при нагружении оболочки осесимметричной нагрузкой в ней формируется НДС, являющееся симметричным относительно сечения  $x_1 = 0$ . Тогда в этом сечении требуется удовлетворить условиям симметрии решений уравнений (1)–(4) вида

$$\omega^{(k)} = 0, \quad N_1^{(k)} = 0, \quad u^{(k)} = 0, \quad q_1 = 0. \quad (6)$$

При действии внешней погонной нагрузки, приложенной в точке  $A$  подкрепляющего стержня (рис. 1,  $a$ ), его равновесие будет описываться следующей системой алгебраических уравнений:

$$f_u^+ = - \left( Q_{11}^{(1)} + Q_{11}^{(2)} \right) + T_\zeta^+ = 0, \quad (7)$$

$$f_w^+ = - \left( Q_{13}^{(1)} + Q_{13}^{(2)} + 2h\tau_1 + B_s \frac{W}{R^2} - K_z \frac{\varphi}{R^2} \right) + T_z^+ = 0, \quad (8)$$

$$f_\varphi^+ = - \left[ \sum_{k=1}^2 \left( L_{11}^{(k)} - \delta_{(k)} Q_{11}^{(k)} H_{(k)} \right) + \right. \\ \left. + B_2^{(+)} \left( Q_{13}^{(1)} + Q_{13}^{(2)} + 2h\tau_1 \right) + D_z \frac{\varphi}{R^2} - K_z \frac{W}{R^2} \right] + m_s^+ = 0, \quad (9)$$

где [29, 30]  $B_s = \iint_F E d\zeta dz$ ,  $K_z = \iint_F E\zeta d\zeta dz$ ,  $D_z = \iint_F E\zeta^2 d\zeta dz$  – жесткостные характеристики поперечного сечения подкрепляющего стержня,  $E$  – некоторый осредненный модуль упругости материалов подкрепляющего стержня в окружном направлении,  $T_\zeta^+$ ,  $T_z^+$  – компоненты внешней погонной нагрузки  $\mathbf{T}^+ = T_\zeta^+ \mathbf{n} + T_z^+ \mathbf{m}$ , приложенной в точке линии  $\mathbf{r}_A = \zeta_A \mathbf{n} + z_A \mathbf{m}$  (рис. 2),  $m_s^+ = T_\zeta^+ z_A - T_z^+ \zeta_A$  – погонный изгибающий момент.

Формирующиеся в подкрепляющих стержнях перемещения  $U$ ,  $W$  и угол поворота  $\varphi$  должны удовлетворять кинематическим условиям сопряжения стержней с несущими слоями

$$u^{(k)} - (U - \delta_{(k)} H_{(k)} \varphi) = 0 \quad \text{при} \quad \delta Q_{11}^{(k)} \neq 0, \quad (10)$$

$$w^{(k)} - (W + B_2^{(+)} \varphi) = 0 \quad \text{при} \quad \delta Q_{13}^{(k)} \neq 0, \quad (11)$$

$$w_{,1}^{(k)} + \varphi = 0 \quad \text{при} \quad \delta L_{11}^{(k)} \neq 0, \quad (12)$$

к которым необходимо добавить кинематическое условие

$$w^{(1)} + w^{(2)} + \frac{2h^2}{3E_3} q_{1,1} - 2(W + B_2^{(+)} \varphi) = 0, \quad (13)$$

имеющее место при  $\delta\tau_1 \neq 0$ . Здесь и далее единицы после запятой в нижнем индексе означают производные по  $x$ .

Разрешающая система уравнений об определении вектор-функции неизвестных

$$\mathbf{X} = (w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)}, q_1, Q_{11}^{(1)}, Q_{11}^{(2)}, Q_{11}^{(k)}, Q_{13}^{(1)}, L_{11}^{(1)}, L_{11}^{(2)}, \tau_1, U, W, \varphi)$$

состоит из пяти геометрически нелинейных дифференциальных уравнений равновесия цилиндра (1)–(4) с граничными условиями (5), трех линейных алгебраических уравнений равновесия подкрепляющего стержня (7)–(9) и четырех кинематических условий сопряжения (10)–(13).

## 2. Сведение краевой задачи к интегро-алгебраическому виду

С целью нахождения численного решения сформулированной краевой задачи (1)–(13) об определении функции  $\mathbf{X}$  методом конечных сумм [33–35] сведем её к системе интегро-алгебраических уравнений типа Вольтерра второго рода с дополнительными соотношениями для определения неизвестных констант интегрирования. Заметим, что в исходную дифференциальную задачу входят производные порядка  $2n$  от искомых функций, в то время как интегральные уравнения будут содержать лишь  $n$ -е производные. Такая редукция сформулированной задачи проводится путём интегрирования уравнений (1)–(4), удовлетворения условиям (5), (6) и использования соотношений

$$u^{(k)}(x) = \int_0^x \frac{du^{(k)}}{ds} ds, \quad q_1(x) = \int_0^x \frac{dq_1}{ds} ds,$$

$$\frac{dw^{(k)}}{dx} = \int_0^x \frac{d^2w^{(k)}}{ds^2} ds, \quad w^{(k)}(x) = w_a^{(k)} - \int_x^a \int_0^\xi \frac{d^2w^{(k)}}{ds^2} ds d\xi,$$

где  $w_a^{(k)} = w|_{x=x_1^+}$ . В результате относительно вектор-функции

$$X(x) = (w_{11}^{(1)}, w_{11}^{(2)}, u_{1,1}^{(1)}, u_{1,1}^{(2)}, q_{1,1}, w_a^{(1)}, w_a^{(2)}, Q_{11}^{(1)}, Q_{11}^{(2)}, Q_{13}^{(1)}, Q_{13}^{(2)}, L_{11}^{(1)}, L_{11}^{(2)}, \tau_1, U_A, \varphi),$$

$x \in [0, x_1^+] = [0, a]$ , приходим к следующей системе интегро-алгебраической уравнений:

$$\begin{aligned} & L_{11}^{(k)} - M_{11}^{(k)} + \delta_{(k)} \frac{E_3}{2h} \int_x^a \int_0^\xi \left[ w_a^{(2)} - w_a^{(1)} - \int_s^a \int_0^\eta \left( \frac{d^2w^{(2)}}{ds^2} - \frac{d^2w^{(1)}}{ds^2} \right) dy d\eta \right] ds d\xi + \\ & + \int_x^a T_{11}^{(k)} \int_0^\xi \frac{d^2w^{(k)}}{ds^2} ds d\xi + H_{(k)} \int_x^a \int_0^\xi \frac{dq_1}{ds^2} ds d\xi - \\ & - \frac{B_{22}^{(k)}}{R} \int_x^a \int_0^\xi \left\{ \nu_{12} \left[ \frac{du^{(k)}}{ds} + \frac{1}{2} \left( \int_0^s \frac{d^2w^{(2)}}{ds^2} d\eta \right)^2 \right] + \frac{1}{R} \left( w_a^{(k)} - \int_s^a \int_0^\eta \frac{d^2w^{(k)}}{ds^2} dy d\eta \right) \right\} ds d\xi = \\ & = - \int_x^a \int_0^\xi X_3^{(k)} ds d\xi, \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Q_{11}^{(k)} - B_{11}^{(k)} \left( \frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left( \int_0^x \frac{d^2w^{(k)}}{ds^2} ds \right)^2 + \frac{\nu_{21}}{R} \left( w_a^{(k)} - \int_x^a \int_0^\xi \frac{d^2w^{(k)}}{ds^2} ds d\xi \right) \right) + \\ & + \delta_{(k)} \int_x^a \int_0^\xi \frac{dq_1}{ds} ds d\xi = 0, \quad (15) \end{aligned}$$

$$\frac{2h^3}{3E_3} \frac{dq_1}{dx} + \frac{2h}{G_{13}} \int_x^a \int_0^\xi \frac{dq_1}{ds} ds d\xi + \int_x^a \int_0^\xi \sum_{k=1}^2 \left( \delta_{(k)} \frac{du^{(k)}}{ds} - H_{(k)} \frac{d^2w^{(k)}}{ds^2} \right) ds d\xi = 0, \quad (16)$$

$$\int_0^a \frac{dq_1}{dx} dx - \tau_1 = 0, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^{(k)} E_3}{2h} \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 \delta^{(k)} \left[ -w_a^{(k)} + \int_x^a \int_0^\xi \frac{d^2 w^{(k)}}{ds^2} ds d\xi \right] \right\} dx + Q_{13}^{(k)} + h\tau_1 - \\ & - \frac{B_{22}^{(k)}}{R} \int_0^a \left\{ \nu_{12} \left[ \frac{du^{(k)}}{ds} + \frac{1}{2} \left( \int_0^s \frac{d^2 w^{(k)}}{ds^2} d\eta \right)^2 \right] + \frac{1}{R} \left( w_a^{(k)} - \int_s^a \int_0^\eta \frac{d^2 w^{(k)}}{ds^2} dy d\eta \right) \right\} dx = \\ & = - \int_0^a X_3^{(k)} dx, \quad (18) \end{aligned}$$

которую необходимо дополнить алгебраическими уравнениями равновесия стержня (7)–(9) и кинематическими условиями его сопряжения с оболочкой (10)–(12), записанными в интегральном виде

$$\int_0^a \frac{du^{(k)}}{dx} dx - (U - \delta^{(k)} H^{(k)} \varphi) = 0, \quad (19)$$

$$w_a^{(k)} - (W + B_2^{(+)} \varphi) = 0, \quad (20)$$

$$\int_0^a \frac{d^2 w^{(k)}}{dx} dx + \varphi = 0. \quad (21)$$

Таким образом, для определения введенных в рассмотрение семнадцати неизвестных из  $X \in H^{\times 5} \times R^{\times 11}$  получена разрешающая система семнадцати интегро-алгебраических уравнений (14)–(21) и алгебраических уравнений (7)–(9), где  $H = L_2(0, a)$ ,  $a$  – полудлина пластины. Сформулированная краевая задача может быть записана в операторном виде

$$A(X) = F. \quad (22)$$

### 3. Аппроксимация интегральных уравнений методом коллокаций по гауссовским узлам

Для аппроксимации полученных интегральных уравнений типа Вольтерра будем использовать предложенный в [33, 34] метод коллокаций по гауссовским узлам и способ построения интегрирующих матриц. Введем в рассмотрение интегральные операторы по формулам

$$\mathcal{J}(f) = \int_0^x f(\xi) d\xi, \quad \mathcal{J}^*(f) = \int_x^a f(\xi) d\xi, \quad \mathcal{J}_3(f) = \int_0^a f(\xi) d\xi,$$

которые аппроксимируем конечномерными аналогами в виде интегрирующих матриц  $J_1, J_2, J_3$  соответственно (здесь и далее прямым шрифтом обозначены операторы, действующие в пространстве измеримых функций, готическим шрифтом – операторы, действующие в пространстве сеточных функций).

С этой целью на отрезке  $[0, a]$  введем сетку  $\omega = \{x_i, i = 1, 2, \dots, N\}$ , соответствующую квадратурной формуле Гаусса

$$J_3(f) = \sum_{i=1}^N d_i f(x_i),$$

где  $\{d_i\}$ ,  $\{x_i\}$  – соответственно веса и узлы коллокаций, связанные с корнями полинома Лежандра степени  $N$ .

Обозначим через  $f_i$  значение  $f$  в узле  $x_i$ :  $f_i = f(x_i)$  и приблизим  $f$  на отрезке  $[0, a]$  посредством интерполирующей функции  $f(x) \approx \sum_{i=1}^N f_i l_i(x)$ . В качестве базисных выберем функции Лагранжа  $\{l_i\}$  по узлам  $\{x_j\}$ . Таким образом, раскладывая функции  $l_i$  по полиномам Лежандра, строим интегрирующие матрицы  $J_1, J_2$ .

Введем в рассмотрение конечномерные операторы

$$\begin{aligned} I_1 &= (I_{1w}^{(1)}, I_{1w}^{(2)}, I_{1u}^{(1)}, I_{1u}^{(2)}, I_{1q}^{(1)}) : H_h^{\times 5} \times R^{\times 12} \rightarrow H_h^{\times 5}, \\ I_2 &= (I_{2w}^{(1)}, I_{2w}^{(2)}, I_{2u}^{(1)}, I_{2u}^{(2)}, \Theta^{\times N}) : H_h^{\times 5} \times R^{\times 12} \rightarrow H_h^{\times 5}, \\ \Gamma &= (\Gamma_\tau, \Gamma_{wa}^{(1)}, \Gamma_{wa}^{(2)}) : H_h^{\times 5} \times R^{\times 12} \rightarrow R^{\times 3}, \\ Q &= (Q_{11}^{(1)}, Q_{11}^{(2)}, Q_{13}^{(1)}, Q_{13}^{(2)}, L_{11}^{(1)}, L_{11}^{(2)}) : H_h^{\times 5} \times R^{\times 12} \rightarrow R^{\times 6}, \\ T &= (M_s, T_z, T_\zeta) : H_h^{\times 5} \times R^{\times 12} \rightarrow R^{\times 2} \end{aligned}$$

по формулам

$$\begin{aligned} I_{1w}^{(k)} X(x) &= L_{11}^{(k)} + D_{11}^{(k)} w_{,11}^{(k)} + H_{(k)} J_2 J_1 q_{1,1} + \\ &+ \delta_{(k)} J_2 J_1 \frac{E_3}{2h} \left[ w_a^{(2)} - w_a^{(1)} - J_2 J_1 \left( w_{,11}^{(2)} - w_{,11}^{(1)} \right) \right] - \\ &- \frac{B_{22}^{(k)}}{R} J_2 J_1 \left[ \nu_{12} u_{,1}^{(k)} + \frac{1}{R} \left( w_a^{(k)} - J_2 J_1 w_{,11}^{(k)} \right) \right]; \end{aligned}$$

$$I_{2w}^{(k)} X(x) = J_2 T_{11}^{(k)} J_1 w_{,11}^{(k)} - \frac{B_{22}^{(k)} \nu_{12}}{2R} J_2 J_1 \left( J_1 w_{,11}^{(k)} \right)^2;$$

$$I_{1u}^{(k)} X(x) = Q_{11}^{(k)} - B_{11}^{(k)} \left[ u_{,1}^{(k)} + \frac{\nu_{21}}{R} \left( w_a^{(k)} - J_2 J_1 w_{,11}^{(k)} \right) \right] + \delta_{(k)} J_2 J_1 q_{1,1};$$

$$I_{2u}^{(k)} X(x) = -\frac{B_{11}^{(k)}}{2} \left( J_1 w_{,1}^{(k)} \right)^2;$$

$$I_{1q} X(x) = \left( \frac{2h^3}{3E_3} + \frac{2h}{G_{13}} J_2 J_1 \right) q_{1,1} + J_2 J_1 \left( u_{,1}^{(1)} - u_{,1}^{(2)} - H_{(1)} w_{,11}^{(1)} - H_{(2)} w_{,11}^{(2)} \right);$$

$$\Gamma_\tau X(x) = J_3 q_{1,1} - \tau_1;$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{1wa}^{(k)} X(x) &= \frac{\delta_{(k)}}{2h} J_3 \left\{ E_3 \left[ w_a^{(2)} - w_a^{(1)} - J_2 J_1 \left( w_{,11}^{(2)} - w_{,11}^{(1)} \right) \right] \right\} + \\ &+ Q_{13}^{(k)} + h\tau_1 - \frac{B_{22}^{(k)}}{R} J_3 \left[ \nu_{12} u_{,1}^{(k)} + \frac{1}{R} \left( w_a^{(k)} - J_2 J_1 w_{,11}^{(k)} \right) \right]; \end{aligned}$$

$$\Gamma_{2wa}^{(k)} X(x) = -\frac{B_{22}^{(k)}}{2R} J_3 \left( J_1 w_{,11}^{(k)} \right)^2;$$

$$\begin{aligned}
Q_{11}^{(k)} X(x) &= J_3 u_{,1}^{(k)} - (U - \delta_{(k)} H_{(k)} \varphi); \\
Q_{13}^{(k)} X(x) &= w_a^{(k)} - (W + B_2^{(+)} \varphi); \\
L_{11}^{(k)} X(x) &= J_3 w_{,11}^{(k)} + \varphi; \\
M_s X(x) &= \sum_{k=1}^2 \left( L_{11}^{(k)} - \delta_{(k)} Q_{11}^{(k)} H_{(k)} \right) + B_2^{(+)} \left( Q_{13}^{(1)} + Q_{13}^{(2)} + 2h\tau_1 \right) + \frac{D_z \varphi}{R^2} - \frac{K_z W}{R^2}; \\
T_z X(x) &= Q_{13}^{(1)} + Q_{13}^{(2)} + 2h\tau_1 + \frac{B_s W}{R^2} - \frac{K_z \varphi}{R^2}; \\
T_\zeta X(x) &= Q_{11}^{(1)} + Q_{11}^{(2)}.
\end{aligned}$$

Тогда сформулированная геометрически нелинейная конечномерная задача может быть представлена в матричной форме

$$A_1 X + A_2(X) = F, \quad (23)$$

где  $A_1 = (I_1, \Gamma, Q, T) : H_h^{\times 5} \times R^{\times 12} \rightarrow H_h^{\times 5} \times R^{\times 12}$  – линейный оператор,  $A_2 = (I_2, \Theta^{\times 12}) : H_h^{\times 5} \times R^{\times 12} \rightarrow H_h^{\times 5} \times R^{\times 12}$  – нелинейный оператор; в общем случае правая часть  $F(T_\zeta^+, T_z^+, m_s^+, X_3^{(k)})$  принадлежит  $H^{\times 5} \times R^{\times 12}$ . Для задачи об осевом сжатии цилиндрической оболочки с эксцентриситетом для соответствующего компонента внешней погонной нагрузки и погонного момента, приложенных к подкрепляющему стержню, и для поперечной распределенной нагрузки на цилиндр положим  $T_z^* = m_s^+ = X_3^{(k)} = 0$ , тогда  $F = (\Theta^{\times (5N+1)}, T_\zeta^+)$ .

Таким образом, для функций, входящих в систему дифференциальных уравнений (1)–(3) со старшей производной порядка  $2n$ , построена конечномерная схема (23) относительно  $n$ -й производной решения краевой задачи. После решения конечномерной задачи (23) решение исходной краевой задачи восстанавливается численным интегрированием при помощи полученных ранее интегрирующих матриц.

#### 4. Итерационный метод и численные эксперименты

Для решения геометрически нелинейной проекционной схемы (23) будем использовать следующий двухслойный итерационный процесс с опусканием нелинейности на нижний слой [36–39] с предобуславливателем, являющимся линейной частью оператора разностной схемы

$$A_1 \frac{X^{(n+1)} - X^{(n)}}{\tau} + (A_1 + A_2) X^{(n)} = F, \quad (24)$$

где  $X^{(0)}$  – заданное начальное приближение,  $\tau > 0$  – итерационный параметр.

*Докритическое НДС конструкции.* Для численной реализации итерационного метода (24) решения задачи (23) об осевом сжатии оболочки силой  $T_\zeta^+$ , приложенной к подкрепляющему стержню с эксцентриситетом, разработан комплекс программ в среде Matlab. На его основе проводились численные расчёты при следующих значениях геометрических и упругих параметров оболочки и подкрепляющего стержня (см. рис. 1):

$$\begin{aligned}
x_1^+ &= a = 50 \text{ см}, \quad 2h_{(1)} = 2h_{(2)} = 0.1 \text{ см}, \quad h = 1 \text{ см}, \quad G_{13} = 25 \text{ МПа}, \\
E_1^{(k)} &= 103 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad E_2^{(k)} = 40 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad E_3 = 50 \text{ МПа}, \quad E = 20 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \\
\nu_{12}^{(k)} &= \nu_{21}^{(k)} = 0.04, \quad k = 1, 2, \quad R = 52.5 \text{ см}, \quad z_A = \zeta_A = B_2^{(+)} = h + h_1.
\end{aligned}$$

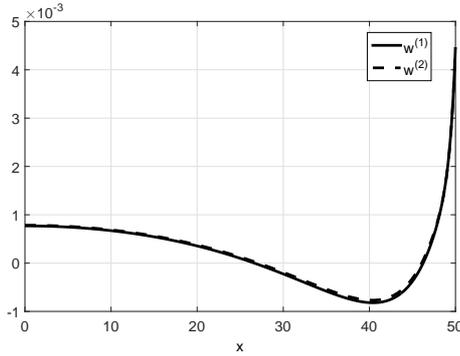


Рис. 3. Прогибы точек срединных поверхностей несущих слоев  $w^{(k)}$ , см

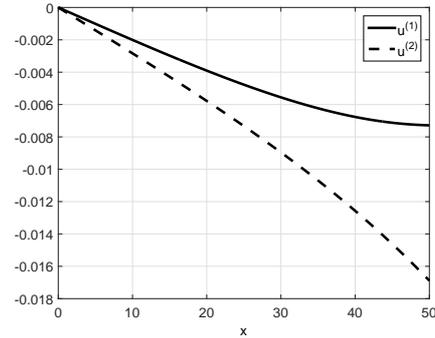


Рис. 4. Осевые перемещения точек срединных поверхностей несущих слоев  $u^{(k)}$ , см

При выбранных значениях осредненного модуля  $E$  и геометрических параметров подкрепляющего стержня для жесткостных параметров  $B_s$ ,  $K_z$ ,  $D_z$  приняты значения  $B_s = 1.9708 \cdot 10^7$  Н,  $K_z = -61300$  Н·м,  $D_z = 727.6401$  Н·м<sup>2</sup>. Число точек сетки  $N = 256$ , что обеспечивает приемлемую точность при использовании предложенного численного метода по всем параметрам НДС конструкции. Вычисления согласно (24) проводились до тех пор, пока норма невязки  $\|F - (A_1 + A_2) X^{(n)}\|$  и разницы между итерациями  $\|X^{(n+1)} - X^{(n)}\|$  оставались больше заданной точности  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-8}$ . В качестве нормы вектора  $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)$  выбиралась величина  $\|g\| = \max\{|g_1|, |g_2|, \dots, |g_m|\}$ . Итерационный параметр подбирался эмпирически.

При заданном значении осевой сжимающей погонной нагрузки  $T_\zeta^+ = -50$  кН/м в подкрепляющем стержне, а также в сечении его сопряжения с несущими слоями и заполнителем формируются параметры НДС, имеющие следующие значения:

$$Q_{11}^{(1)} = -1.371 \text{ кН/м}, \quad Q_{11}^{(2)} = -48.629 \text{ кН/м}, \quad Q_{13}^{(1)} = -0.53221 \text{ кН/м},$$

$$Q_{13}^{(2)} = -0.65079 \text{ кН/м}, \quad L_{11}^{(1)} = -4.8743 \text{ Н}, \quad L_{11}^{(2)} = -4.6653 \text{ Н},$$

$$U = -0.01209 \text{ см}, \quad W = 0.0092828 \text{ см}, \quad \varphi = -0.0045715, \quad \tau_1 = -0.0375 \text{ МПа}.$$

Результаты расчётов параметров НДС оболочки приведены на рис. 3–10.

На рис. 3 показаны графики изменения по длине оболочки прогибов точек срединных поверхностей несущих слоев. Видно, что они практически совпадают в силу малости деформаций поперечного обжатия заполнителя в докритическом состоянии конструкции. В окрестности соединения внешних слоев с подкрепляющим стержнем наблюдается сильная изменчивость функций прогибов, в силу условия  $\varphi \neq 0$  являющаяся следствием деформации выворачивания подкрепляющего стержня. Заметим, что прогиб верхнего несущего слоя в сечении  $x_1 = a$  есть  $w^{(k)}|_{x=x_1^+} = W + B_2^{(+)}$  см, в то время как прогиб точки  $O_2^+$  подкрепляющего стержня принимает значение  $W = 0.0010075$  см.

На рис. 4 изображены осевые перемещения точек срединных поверхностей несущих слоев. Заметим, что в верхнем несущем слое их значения значительно больше, чем у нижнего слоя. Такая разница обусловлена передачей внешней сжимающей нагрузки главным образом на верхний несущий слой оболочки ( $Q_{11}^{(1)} = -1.371$  кН/м,  $Q_{11}^{(2)} = -48.629$  кН/м в сечении  $x_1 = a$ ) в силу особенностей конструктивного исполнения оболочки и действия на неё внешней силы с эксцентриситетом и поворотом поперечного сечения подкрепляющего стержня против часовой стрелки на величину  $|\varphi|$ . Из рис. 5 следует, что оболочка в целом находится в моментном состоянии (см. рис. 6) ввиду действия на неё сжимающей

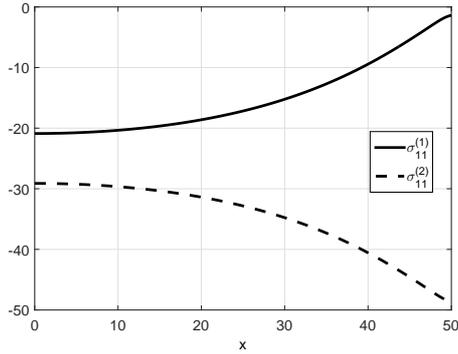


Рис. 5. Осьевые мембранные нормальные напряжения в несущих слоях  $\sigma_{11}^{(k)} = T_{11}^{(k)} / (2h^{(k)})$ , МПа

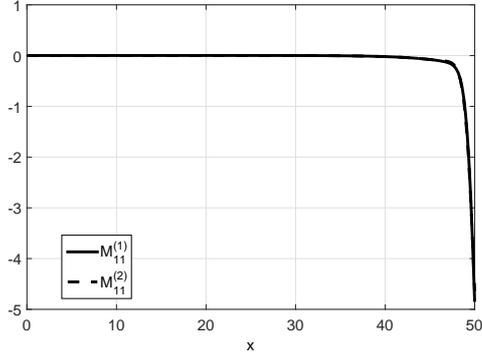


Рис. 6. Изгибающие моменты в несущих слоях  $M_{11}^{(k)}$ , Н

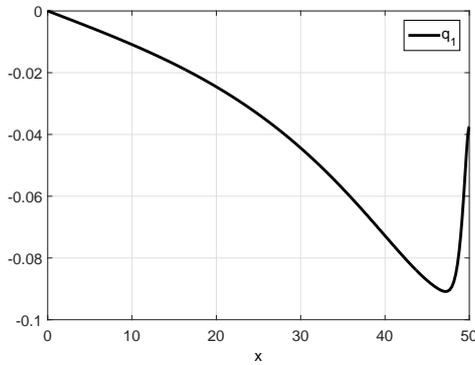


Рис. 7. Поперечные касательные напряжения в заполнителе  $q_1$ , МПа

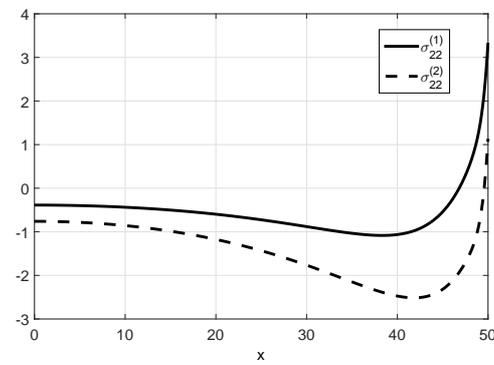


Рис. 8. Окружные мембранные напряжения в несущих слоях  $\sigma_{22}^{(k)} = T_{22}^{(k)} / (2h^{(k)})$ , МПа

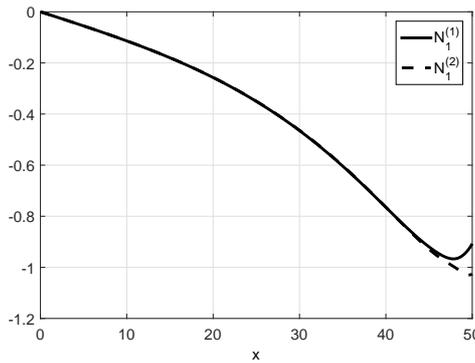


Рис. 9. Обобщенные перерезывающие силы  $N_1^{(k)}$ , кН/м

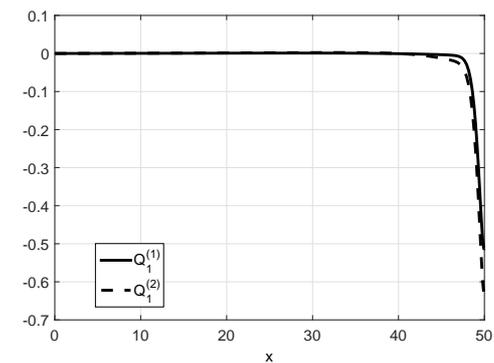


Рис. 10. Перерезывающие силы в несущих слоях  $Q_1^{(k)}$ , кН/м

нагрузки с эксцентриситетом, причем формирующееся в нижнем слое мембранное нормальное напряжение  $\sigma_{11}^{(1)}$  в сечении  $x_1 = a$  практически равно нулю, а значение  $T_{11}^{(2)} + 2h_{(2)}\sigma_{11}^{(2)}$  в данном сечении – сжимающей нагрузке  $T_{\zeta}^{(+)} = -50$  кН/м.

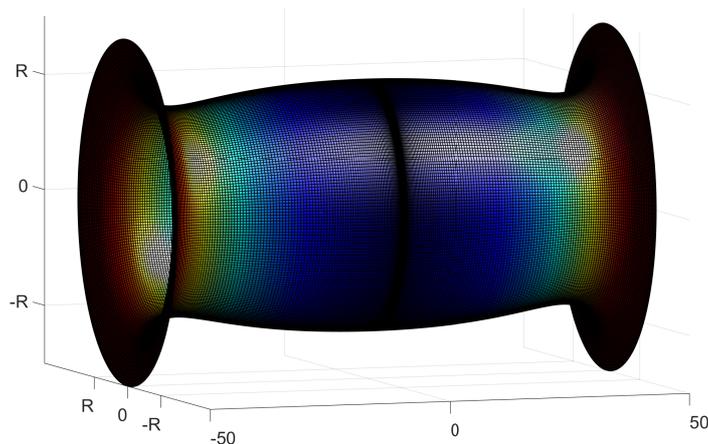


Рис. 11. Деформированное состояние срединной поверхности верхнего несущего слоя при  $E = E_2^{(k)} = 20 \cdot 10^3$  МПа

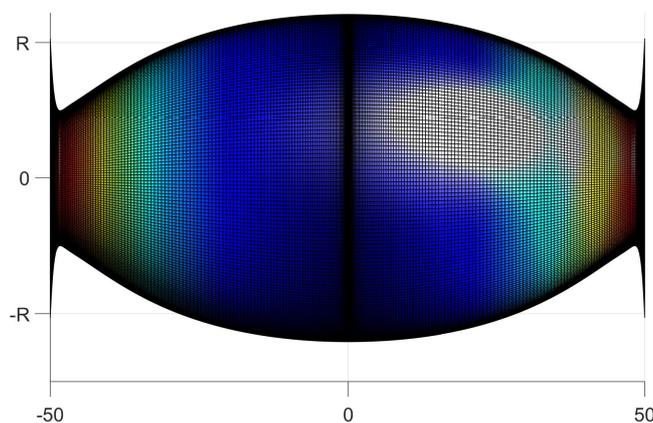


Рис. 12. Деформированное состояние срединной поверхности верхнего несущего слоя при  $E = E_2^{(k)} = 80 \cdot 10^3$  МПа

На рис. 7 показано изменение касательных напряжений в заполнителе. Видно, что в рассматриваемом случае нагружения и в силу особенностей конструктивного исполнения оболочки на её контуре они имеют большие градиенты в окрестности сечения  $x_1 = a$  (в точках поверхности сопряжения заполнителя с подкрепляющим стержнем они должны принимать нулевое значение в случае отсутствия адгезионного соединения), где достигают максимального по модулю значения.

На рис. 8 показаны функции мембранных окружных напряжений в несущих слоях. Видно, что в окрестности сечения  $x_1 = a$  они являются положительными из-за значительных положительных радиальных перемещений точек осевой линии подкрепляющего стержня. По мере удаления от данного сечения эти напряжения переходят в сжимающие вследствие деформации выворачивания подкрепляющего стержня (см. рис. 8). В силу таких особенностей деформирования, судя по результатам, приведенным на рис. 9, 10, максимальное участие внешних слоев в восприятии поперечных касательных напряжений наблюдается лишь в окрестности сечения  $x_1 = a$ .

С целью иллюстрации на рис. 11 изображен деформированный цилиндр в соответствии с найденными прогибами точек срединной поверхности верхнего несущего

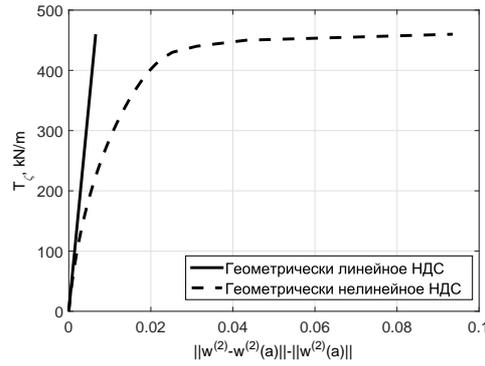


Рис. 13. Зависимость погонной нагрузки  $T_{\zeta}^{(+)}$  от максимального по модулю значения прогиба  $w^{(2)}$  верхнего слоя

слоя, где цвет характеризует значение мембранных нормальных напряжений в этом слое. Видно, что края цилиндра растягиваются в радиальном направлении. Это связано с тем, что модуль упругости в окружном направлении подкрепляющего стержня в два раза меньше, чем несущих слоев оболочки ( $E = E_2^{(k)} = 20 \cdot 10^3$  МПа).

На рис. 12 изображено деформированное состояние срединной поверхности верхнего несущего слоя при  $E = E_2^{(k)} = 60 \cdot 10^3$  МПа. Видно, что увеличение модуля упругости подкрепляющего стержня в окружном направлении в четыре раза приводит к значительному уменьшению деформации его выворачивания и, как следствие, к уменьшению окружных деформаций внешних слоев оболочки.

*НДС конструкции в окрестности бифуркационного значения внешней нагрузки.* На основе изложенного алгоритма путём табулирования по параметру внешней нагрузки  $T_{\zeta}^{(+)}$  отслеживался закон изменения внешней нагрузки в зависимости от максимального значения прогиба верхнего несущего слоя в окрестности места возможной потери устойчивости. Установленный закон в виде зависимости значения нагрузки  $T_{\zeta}^{(+)}$  от максимального по модулю значения прогиба  $w^{(2)}$  верхнего слоя приведен на рис. 13. В окрестности некоторого бифуркационного значения нагрузки  $T_{\zeta}^{(+)}$  итерационный процесс (24) перестаёт сходиться. Результаты расчётов, получаемые до такого значения внешней нагрузки, дают информацию только о возможных устойчивых положениях равновесия. Другими словами, решая поставленную геометрически нелинейную задачу (23) с помощью итерационного метода (24), при табулировании по параметру погонной нагрузки  $T_{\zeta}^{(+)}$  мы можем найти только докритические положения равновесия. Эксперименты показали, что итерационный процесс перестал сходиться при  $T_{\zeta}^{(+)} = -460$  кН/м и формировании следующих параметров НДС в сечении  $x_1 = a$ :

$$Q_{11}^{(1)} = -8.4973 \text{ кН/м}, \quad Q_{11}^{(2)} = -451.5027 \text{ кН/м}, \quad Q_{13}^{(1)} = 3.4434 \text{ кН/м},$$

$$Q_{13}^{(2)} = -29.3836 \text{ кН/м}, \quad L_{11}^{(1)} = 2.0716 \text{ Н}, \quad L_{11}^{(2)} = 38.732 \text{ Н},$$

$$U = -0.11963 \text{ см}, \quad W = 0.10614 \text{ см}, \quad \varphi = -0.049425, \quad \tau_1 = 0.18416 \text{ МПа}.$$

Законы изменения параметров НДС оболочки, найденные при указанном выше значении внешней нагрузки, приведены на рис. 14–17.

Сравнивая результаты, приведенные на рис. 3, 5, 7, 8, с результатами, приведенными на рис. 14–17, можно видеть как количественные, так и качественные изменения параметров НДС рассматриваемой конструкции по мере приближения значения внешней нагрузки к бифуркационному.

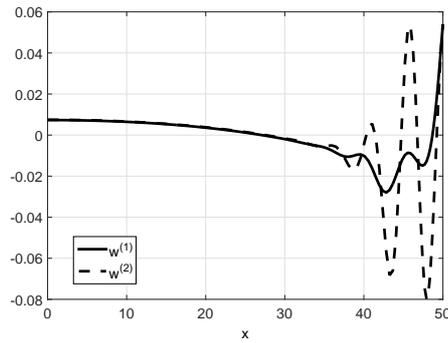


Рис. 14. Прогобы точек срединных поверхностей несущих слоев  $w^{(k)}$ , см

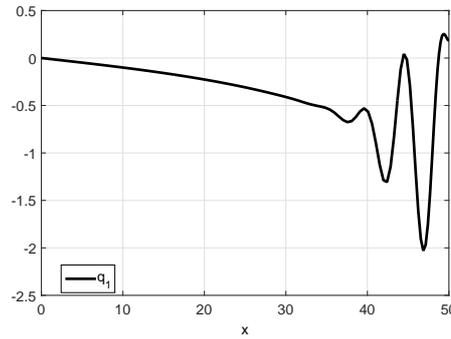


Рис. 15. Поперечные касательные напряжения в заполнителе  $q_1$ , МПа

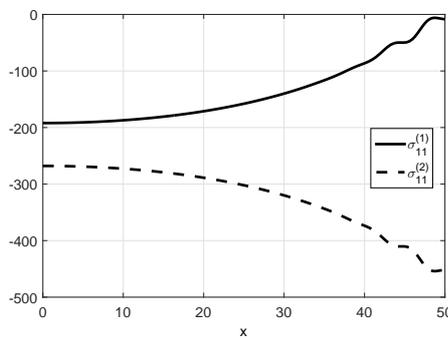


Рис. 16. Осевые мембранные нормальные напряжения в несущих слоях  $\sigma_{11}^{(k)} = T_{11}^{(k)} / (2h^{(k)})$ , МПа

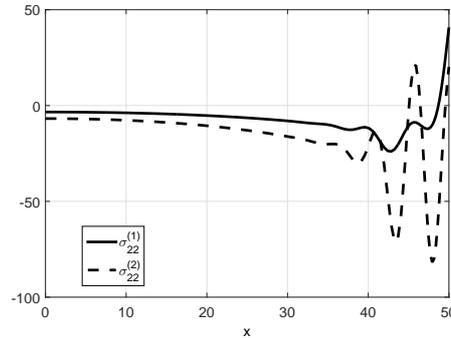


Рис. 17. Окружные мембранные напряжения в несущих слоях  $\sigma_{22}^{(k)} = T_{22}^{(k)} / (2h^{(k)})$ , МПа

## 5. Линеаризация задачи в окрестности её нелинейного решения и постановка задачи на собственные значения

Главной целью настоящей работы является нахождение точки бифуркации задачи (22), определение соответствующего ей критического значения внешней нагрузки и форм потери устойчивости конструкции. В предлагаемом методе численного решения рассматриваемой задачи (22) точка бифуркации определяется как точка ветвления её решений. Один из наиболее употребительных способов решения указанной задачи поиска точки бифуркации состоит в линеаризации задачи в окрестности решения линейной задачи. В настоящей же работе предлагается проводить линеаризацию задачи (22) в окрестностях её нелинейных решений.

Основная идея определения точки бифуркации на основе решений однородных линеаризованных уравнений состоит в следующем. Предположим, что одна какая-то форма равновесия системы известна и нужно найти точку бифуркации этой формы равновесия. Для этого, не интересуясь поведением системы вдали от известной формы равновесия

$$\mathbf{X} = (w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)}, q_1, Q_{11}^{(1)}, Q_{11}^{(2)}, Q_{11}^{(k)}, Q_{13}^{(1)}, L_{11}^{(1)}, L_{11}^{(2)}, \tau_1, U, W, \varphi),$$

достаточно найти условия существования другой формы  $\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}$ , отличной от исходной, но бесконечно к ней близкой

$$A(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}) = F, \quad (25)$$

Другими словами, точка, в окрестности которой существуют две формы равновесия  $\mathbf{X}$  и  $\delta\mathbf{X}$  (то есть  $A(\mathbf{X}) = A(\delta\mathbf{X}) = F$ ), и является точкой бифуркации, где

$$\delta\mathbf{X} = (\delta w^{(1)}, \delta w^{(2)}, \delta u^{(1)}, \delta u^{(2)}, \delta q_1, \delta Q_{11}^{(1)}, \delta Q_{11}^{(2)}, \delta Q_{11}^{(k)}, \delta Q_{13}^{(1)}, \delta L_{11}^{(1)}, \delta L_{11}^{(2)}, \delta \tau_1, \delta U, \delta W, \delta \varphi)$$

есть малое приращение решения.

Сформулированная задача эквивалентна задаче о нахождении такой точки  $\mathbf{X}$ , что дифференциал Фреше (см. [40])  $D(\mathbf{X})\delta\mathbf{X}$  оператора  $A(\mathbf{X})$  в точке  $\mathbf{X}$  будет равен нулю:  $D(\mathbf{X})\delta\mathbf{X} = 0$ . Покажем, что это действительно так, и получим вид линейного по  $\delta\mathbf{X}$  оператора  $D(\mathbf{X})$ .

Имеем, что при фиксированном  $\mathbf{X}$  и всех  $\delta\mathbf{X}$

$$A(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}) - A(\mathbf{X}) = D(\mathbf{X})\delta\mathbf{X} + R(\mathbf{X}, \delta\mathbf{X}), \quad (26)$$

где  $D(\mathbf{X})$  – линейный непрерывный по  $\delta\mathbf{X}$  оператор,  $\lim_{\|\delta\mathbf{X}\| \rightarrow 0} R(\mathbf{X}, \delta\mathbf{X})/\|\delta\mathbf{X}\| = 0$ ,  $D(\mathbf{X})\delta\mathbf{X}$  – дифференциал Фреше оператора  $A$  в точке  $\delta\mathbf{X}$ , а  $R(\mathbf{X}, \delta\mathbf{X})$  – остаточный член этого дифференциала.

Следует также отметить, что задача о нахождении точки бифуркации, которая получается в результате выполнения соотношений (22) и (25) для одной и той же правой части, будет иметь вид

$$A(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}) - A(\mathbf{X}) = 0, \quad (27)$$

В силу равенства (26) и соотношения  $R(\mathbf{X}, \delta\mathbf{X}) \rightarrow 0$  задача (26) запишется в виде

$$D(\mathbf{X})\delta\mathbf{X} = 0. \quad (28)$$

Вместе с тем оператор  $A$  представим в виде  $A = A_1 + A_2$ , где  $A_1$  – линейный,  $A_2$  – нелинейный операторы. Тогда задача (26) после простых преобразований будет иметь вид  $A_1(\delta\mathbf{X}) + A_2(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}) - A_2(\mathbf{X}) = 0$ , где  $A_2(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}) - A_2(\mathbf{X})$  является дифференциалом Фреше оператора  $A_2$  в точке  $\mathbf{X}$ . Обозначим его через  $D_2(\mathbf{X})\delta\mathbf{X}$ . Тогда задача (28) может быть сформулирована в виде  $A_1(\delta\mathbf{X}) + D_2(\mathbf{X})\delta\mathbf{X} = 0$  или

$$D(\mathbf{X})\delta\mathbf{X} = (A_1 + D_2(\mathbf{X}))\delta\mathbf{X} = 0, \quad (29)$$

где  $D(\mathbf{X})$ ,  $D_2(\mathbf{X})$  – линейные непрерывные по  $\delta\mathbf{X}$  и нелинейные по  $\mathbf{X}$  операторы. Применительно к сформулированной задаче (1)–(3), (5)–(13) задача (29) будет описываться следующими дифференциальными уравнениями:

$$(\delta N_1^{(k)})_{,1} + (3 - 2k)c_3 \left( \delta w^{(2)} - \delta w^{(1)} \right) = 0, \quad (30)$$

$$(\delta T_{11}^{(k)})_{,1} + (3 - 2k)c_3 \delta q_1 = 0, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \delta u^{(1)} - \delta u^{(2)} - H_1^{(k)}(\delta w^{(1)})_{,1} - H_2^{(k)}(\delta w^{(2)})_{,1} + \\ + 2hG_{13}^{-1}\delta q_1 - 2h(3G_{13})^{-1}(\delta q_1)_{,11} = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \delta N_1^{(k)} = -D_{11}^{(k)}(\delta w^{(k)})_{,111} + B_{(k)} \left( w_{,1}^{(k)}(\delta u^{(k)})_{,1} + u_{,1}^{(k)}(\delta w^{(k)})_{,1} + \right. \\ \left. + 1.5(w_{,1}^{(k)})^2(\delta w^{(k)})_{,1} + 2w_{,1}^{(k)}(\delta w^{(k)})_{,1} \right) + H_{(k)}\delta q_1 = 0, \end{aligned}$$

$$\delta T_{11}^{(k)} = B_{(k)} \left( (\delta u^{(k)})_{,1} + w_{,1}^{(k)} (\delta w^{(k)})_{,1} \right),$$

для которых при  $x = x_1^\pm$  формулируются граничные условия

$$\delta M_{11}^{(k)} = \delta L_{11}^{(k)}, \quad \delta q_1 - \delta \tau_1, \quad \delta T_{11}^{(k)} = \delta Q_{11}^{(k)}, \quad \delta N_1^{(k)} = \delta Q_{11}^{(k)} + h \delta \tau_1, \quad (33)$$

а при  $x = 0$  – условия

$$\delta \omega^{(k)} = 0, \quad \delta N_1^{(k)} = 0, \quad \delta u^{(k)} = 0, \quad \delta q_1 = 0. \quad (34)$$

Поскольку уравнения равновесия подкрепляющего стержня (7)–(9) и кинематические условия его сопряжения с несущими слоями (10)–(13) являются линейными алгебраическими уравнениями, их вид в задаче (29) останется прежним относительно вектор-функции неизвестных  $\delta \mathbf{X}$  и они не будут зависеть от  $\mathbf{X}$ . Задача (29), порожденная системой уравнений (30)–(34), (7)–(13) относительно  $\delta \mathbf{X}$ , является однородной задачей с тривиальным решением. Поэтому она может быть сведена к эквивалентной спектральной задаче, а способ её решения будет основан на решении задачи на собственные значения. Для этого рассмотрим вспомогательную задачу

$$D \left( \lambda \frac{\mathbf{X}}{T_\zeta^+} \right) \delta \mathbf{X} = 0, \quad (35)$$

которая получается в результате умножения в уравнении (29)  $\mathbf{X}$  на  $\lambda/T_\zeta^+$ . Здесь  $\lambda$  – число, характеризующее точку бифуркации в окрестности известной формы равновесия

$$\mathbf{X} = (w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)}, q_1, Q_{11}^{(1)}, Q_{11}^{(2)}, Q_{11}^{(k)}, Q_{13}^{(1)}, L_{11}^{(1)}, L_{11}^{(2)}, \tau_1, U, W, \varphi),$$

$T_\zeta^+$  – погонная нагрузка, соответствующая состоянию равновесия  $\mathbf{X}$ . Заметим, что задача (29), сформулированная в виде (35), является задачей на собственные значения относительно пары  $\lambda, \delta \mathbf{X}$ .

Итак, путём последовательного нагружения и решения геометрически нелинейной задачи (22), сформулированной в виде  $A(\mathbf{X}) = F(T_\zeta^+)$ , табулируя по нагрузке  $T_\zeta^+$ , находим множество форм равновесия  $\{\mathbf{X}_T\} \ni \mathbf{X}$ . Решая при этом для каждой формы равновесия  $\mathbf{X}$  (то есть на каждом шаге нагружения) задачу на собственные значения (35), необходимо следить за поведением и изменением минимального положительного собственного числа  $\lambda$ . В сформулированной таким образом задаче на собственные значения (35) условие существования другого состояния равновесия будет выполнено лишь в том случае, когда  $\lambda$  становится равным параметру нагружения  $T_\zeta^+$ :  $\lambda = T_\zeta^+$ , так как именно в этом случае выполняется равенство  $A(\mathbf{X} + \delta \mathbf{X}) = F(T_\zeta^+) = F(T_\zeta^+)$ , а найденное значение  $\lambda$  будет соответствовать точке бифуркации. Выполнение условия  $\lambda = T_\zeta^+$  при решении задачи (35) эквивалентно решению задачи (29), а найденное значение  $\lambda$  является значением критической нагрузки, которое характеризует точку пересечения двух решений  $\mathbf{X}$  и  $\delta \mathbf{X}$ .

Представим левую часть задачи (35) в виде

$$D \left( \lambda \frac{\mathbf{X}}{T_\zeta^+} \right) \delta \mathbf{X} = \left( A_1 + \lambda \Lambda_1 \left( \frac{\mathbf{X}}{T_\zeta^+} \right) \right) + \lambda^2 \Lambda_2 \left( \frac{\mathbf{X}}{T_\zeta^+} \right) \delta \mathbf{X},$$

где  $A_1$  – линейная часть оператора  $A$  задачи (22). Тогда задача (35) сводится к следующей квадратичной задаче на собственные значения для отыскания точки бифуркации:

$$\left( A_1 + \lambda \Lambda_1 \left( \frac{\mathbf{X}}{T_\zeta^+} \right) \right) + \lambda^2 \Lambda_2 \left( \frac{\mathbf{X}}{T_\zeta^+} \right) \delta \mathbf{X} = 0, \quad (36)$$

Для операторов  $\Lambda_1(\mathbf{X}/T_\zeta^+)$  и  $\Lambda_2(\mathbf{X}/T_\zeta^+)$  в соответствии с (30)–(34) с помощью используемого метода конечных сумм и вышеизложенного способа аппроксимации интегральных операторов строятся их конечномерные аналоги

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= (K, O_{10,5n+12}) : H_h^{\times 5} \times R^{\times 12} \rightarrow H_h^{\times 5} \times R^{\times 12}, \\ \Lambda_2 &= (L, O_{10,5n+12}) : H_h^{\times 5} \times R^{\times 12} \rightarrow H_h^{\times 5} \times R^{\times 12},\end{aligned}$$

в которых

$$K\left(\frac{\mathbf{X}}{T_\zeta^+}\right)\delta\mathbf{X} = \begin{pmatrix} K_w^{(1)}\delta\mathbf{X} \\ K_w^{(2)}\delta\mathbf{X} \\ K_u^{(1)}\delta\mathbf{X} \\ K_u^{(2)}\delta\mathbf{X} \\ O_{n,5n+12}\delta\mathbf{X} \\ K_{wa}^{(1)}\delta\mathbf{X} \\ K_{wa}^{(2)}\delta\mathbf{X} \end{pmatrix}, \quad L\left(\frac{\mathbf{X}}{T_\zeta^+}\right)\delta\mathbf{X} = \begin{pmatrix} L_w^{(1)}\delta\mathbf{X} \\ L_w^{(2)}\delta\mathbf{X} \\ O_{3n+2,5n+12}\delta\mathbf{X} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}K_w^{(k)}(\tilde{X})\delta\mathbf{X} &= J_2 B_{11}^{(k)}(\tilde{u}_{,1}^{(k)} + \nu_{21} R^{-1} \tilde{w}^{(k)}) J_1(\delta\tilde{w}^{(k)})_{,1} + J_2 B_{11}^{(k)}((\delta u^{(k)})_{,1} + \\ &+ \nu_{21} R^{-1}(\delta w_a^{(k)} - J_2 J_1(\delta w^{(k)})_{,11})) \tilde{w}_{,1}^{(k)} - B_{22}^{(k)} \nu_{12} R^{-1} J_2 J_1 \tilde{w}_{,1}^{(k)} J_1(\delta w^{(k)})_{,11},\end{aligned}$$

$$K_u^{(k)}(\tilde{X})\delta\mathbf{X} = -B_{11}^{(k)} \tilde{w}_{,1}^{(k)} J_1(\delta\tilde{w}^{(k)})_{,11},$$

$$K_{wa}^{(k)}(\tilde{X})\delta\mathbf{X} = -B_{22}^{(k)} \nu_{12} R^{-1} J_3 \tilde{w}_{,1}^{(k)} J_1 w_{,11}^{(k)},$$

$$L_w^{(k)}(\tilde{X})\delta\mathbf{X} = J_2 B_{11}^{(k)} 1.5(\tilde{w}_{,1}^{(k)})^2 J_1(\delta w^{(k)})_{,11}, \quad \tilde{X} = (\tilde{w}^{(1)}, \tilde{w}^{(2)}, \tilde{u}^{(1)}, \tilde{u}^{(2)}, \tilde{q}_1),$$

$$\tilde{w}^{(k)} = w^{(k)}/T_\zeta^+, \quad \tilde{u}^{(k)} = u^{(k)}/T_\zeta^+, \quad \tilde{q}_1 = q_1/T_\zeta^+.$$

## 6. Метод продолжения по параметру – работе внешних сил

В настоящей работе центральное место занимает разработка метода определения полей напряжений, деформаций и перемещений в окрестности бифуркационного значения нагрузки в докритическом и закритическом положениях равновесия. Как было отмечено выше, при проведении расчётов путём табулирования по нагрузке  $T_\zeta^+$  итерационный процесс (24) в окрестности некоторого значения  $T_\zeta^+$ , по косвенным причинам являющимся бифуркационным (рис. 13), перестаёт сходиться, поскольку, табулируя по указанному параметру нагружения, мы не можем выйти на ветвь решения, где приращение функции этого параметра меняет знак. Поэтому для поиска неустойчивых положений равновесия и исследования поведения оболочки в таких положениях предлагается алгоритм, основанный на глобально инкрементальной теории Лагранжа. Он является одним из вариантов реализации инкрементального алгоритма процесса продолжения решения по параметру нагрузки [41, 42], в соответствии с которым процесс деформирования представляется в виде реализации последовательности равновесных состояний при соответствующих уровнях нагружения. При том значении нагрузки, при котором итерационный процесс (24) перестаёт сходиться, в качестве нового параметра нагружения предлагается выбрать либо работу внешних сил  $A_T$  в силу её строгого возрастания, либо параметр кинематического нагружения  $U^*$ . Вследствие этого требуется формулировка новых геометрически нелинейных задач относительно

уже функций приращений искомых неизвестных исходя из (1)–(3), (5)–(13). В случае, когда параметром продолжения является  $A_T$ , к системе дифференциальных уравнений (1)–(3), (5)–(13) добавляется дополнительное уравнение

$$A_T = T_\zeta^+ U \quad (37)$$

относительно нового дополнительного неизвестного  $T_\zeta^+$ .

Таким образом, геометрически нелинейная задача о равновесии трехслойной цилиндрической оболочки, в которой параметром нагружения выбрана работа внешних сил  $A_T$ , относительно вектор-функции неизвестных

$$(T_\zeta^+, w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)}, q_1, Q_{11}^{(1)}, Q_{11}^{(2)}, Q_{13}^{(1)}, Q_{13}^{(2)}, L_{11}^{(1)}, L_{11}^{(2)}, \tau_1, U, W, \varphi)$$

формулируется на основе дифференциальных уравнений равновесия оболочки (1)–(3) с краевыми условиями (5), (6), уравнений равновесия подкрепляющего стержня (7)–(9), кинематических условий сопряжения оболочки с подкрепляющим стержнем (10)–(13) и дополнительного уравнения (37), представляющего собой выражение для работы внешних сил. Заметим, что при её решении табулирование возможно как по работе внешних сил  $A_T$ , так и по параметру кинематического нагружения  $U^*$ .

Для реализации описанной схемы метода продолжения по параметру для устойчивого равновесного положения конструкции в её докритическом состоянии, найденного путём решения задачи (23) с помощью итерационного процесса (24), на последнем шаге нагружения зафиксируем найденное решение

$$\mathbf{X} = (T_\zeta^+, w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)}, q_1, Q_{11}^{(1)}, Q_{11}^{(2)}, Q_{13}^{(1)}, Q_{13}^{(2)}, L_{11}^{(1)}, L_{11}^{(2)}, \tau_1, U, W, \varphi). \quad (38)$$

Введем далее в рассмотрение оператор  $C : H^{\times 5} \times R^{\times 13} \rightarrow R$  по формуле  $C(\mathbf{X}) = T_\zeta^+ U$ , где  $T_\zeta^+$  – новая неизвестная скалярная величина. Тогда сформулированную геометрически нелинейную задачу (1)–(3), (5)–(13), (37) представим в следующем операторном виде:

$$B(\mathbf{X}) = B_1(\mathbf{X}) + B_2(\mathbf{X}) = F, \quad (39)$$

где  $B_1(A_1, \Theta) : H^{\times 5} \times R^{\times 13} \rightarrow H^{\times 5} \times R^{\times 13}$  – линейный оператор,  $B_2(A_2, C) : H^{\times 5} \times R^{\times 13} \rightarrow H^{\times 5} \times R^{\times 13}$  – нелинейный оператор; вектор-функция правых частей  $F$  зависит только от скалярной величины работы внешних сил  $A_T$ .

Вектор-функцию неизвестных в неустойчивых положениях равновесия для некоторого значения работы внешних сил, равного  $\tilde{A}_T = A_T + \Delta A_T$ , обозначим как

$$\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{T}_\zeta^+, \tilde{w}^{(1)}, \tilde{w}^{(2)}, \tilde{u}^{(1)}, \tilde{u}^{(2)}, \tilde{q}_1, \tilde{Q}_{11}^{(1)}, \tilde{Q}_{11}^{(2)}, \tilde{Q}_{13}^{(1)}, \tilde{Q}_{13}^{(2)}, \tilde{L}_{11}^{(1)}, \tilde{L}_{11}^{(2)}, \tilde{\tau}_1, \tilde{U}, \tilde{W}, \tilde{\varphi}), \quad (40)$$

где тильда над элементом  $p$  означает добавление приращения:  $\tilde{p} = p + \Delta p$ . Тогда наряду с уравнением равновесия (39) относительно  $\mathbf{X}$  можно записать еще одно уравнение относительно положения равновесия  $\tilde{\mathbf{X}}$

$$B(\tilde{\mathbf{X}}) = B_1(\tilde{\mathbf{X}}) + B_2(\tilde{\mathbf{X}})B_1(\mathbf{X}) + B_1(\Delta \mathbf{X}) + B_2(\mathbf{X}) + B_2(\Delta \mathbf{X}) = F + \Delta F. \quad (41)$$

Вычитая из уравнения (41) уравнение (39), получим следующую геометрически нелинейную задачу относительно вектор-функции приращений

$$B_1(\Delta \mathbf{X}) + B_2(\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}) - B_2(\mathbf{X}) = \Delta F. \quad (42)$$

Имеем, что  $B_1(\Delta \mathbf{X}) + B_2(\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}) - B_2(\mathbf{X}) = D_A(\mathbf{X})\Delta \mathbf{X} + R(\mathbf{X}, \Delta \mathbf{X})$ , где  $D_A(\mathbf{X})\Delta \mathbf{X}$  – линейный по  $\Delta \mathbf{X}$  и нелинейный по  $\mathbf{X}$  оператор,  $R(\mathbf{X}, \Delta \mathbf{X})$  – нелинейный оператор.

Получим явный вид этих операторов. Подставив (40) в уравнения (1)–(3), приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & -D_{11}^{(k)} \left( \frac{d^4 w^{(k)}}{dx^4} + \frac{d^4 \Delta w^{(k)}}{dx^4} \right) + H_{(k)} \left( \frac{dq_1}{dx} + \frac{d\Delta q_1}{dx} \right) + (3-2k)c_3((w^{(2)} - w^{(1)}) + \\ & \quad + (\Delta w^{(2)} - \Delta w^{(1)})) + X_3^{(k)} + \Delta X_3^{(k)} + \frac{d}{dx} \left\{ B_{11}^{(k)} \left[ \frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{d\Delta u^{(k)}}{dx} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{dw^{(k)}}{dx} + \frac{d\Delta w^{(k)}}{dx} \right)^2 + \frac{\nu_{21}^{(k)}(w^{(k)} + \Delta w^{(k)})}{R} \right] \left( \frac{dw^{(k)}}{dx} + \frac{d\Delta w^{(k)}}{dx} \right) \right\} - \\ & \quad - \frac{B_{22}^{(k)}}{R} \left\{ \nu_{12}^{(k)} \left[ \frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{d\Delta u^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw^{(k)}}{dx} + \frac{d\Delta w^{(k)}}{dx} \right)^2 \right] + \frac{w^{(k)} + \Delta w^{(k)}}{R} \right\} = 0, \\ & \frac{d}{dx} \left\{ B_{11}^{(k)} \left[ \frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{d\Delta u^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw^{(k)}}{dx} + \frac{d\Delta w^{(k)}}{dx} \right)^2 \right] \right\} + \\ & \quad + X_1^{(k)} \Delta X_1^{(k)} + (3-2k)(q_1 + \Delta q_1) = 0, \\ & (u^{(1)} - u^{(2)}) + (\Delta u^{(1)} - \Delta u^{(2)}) - \sum_{k=1}^2 H_{(k)} \left( \frac{dw^{(k)}}{dx} + \frac{d\Delta w^{(k)}}{dx} \right) + \\ & \quad + \frac{2h}{G_{13}}(q_1 + \Delta q_1) - \frac{2h^3}{3E_3} \left( \frac{d^2 q_1}{dx^2} + \frac{d^2 \Delta q_1}{dx^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

и выражению  $(T_\zeta^+ + \Delta T_\zeta^+)(U + \Delta U) = A_T + \Delta A_T$  для работы внешних сил.

После простых преобразований и при учёте уравнений (1)–(3), которым удовлетворяют функции (38), приходим к геометрически нелинейной задаче (42), описывающейся системой пяти обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{d\Delta N_1^{(k)}}{dx} + \Delta X_3^{(k)} + \\ & \quad + \frac{d}{dx} \left\{ B_{11}^{(k)} \left[ \frac{d\Delta u^{(k)}}{dx} + \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{d\Delta w^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\Delta w^{(k)}}{dx} \right)^2 + \frac{\nu_{21}^{(k)} \Delta w^{(k)}}{R} \right] \frac{dw^{(k)}}{dx} + \right. \\ & \quad \left. + B_{11}^{(k)} \left[ \frac{dw^{(k)}}{dx} + \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{d\Delta w^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 + \frac{\nu_{21}^{(k)} \Delta w^{(k)}}{R} \right] \frac{d\Delta w^{(k)}}{dx} \right\} + \\ & \quad + c_3 \delta_{(k)} (\Delta w^{(2)} - \Delta w^{(1)}) - \frac{B_{22}^{(k)}}{R} \left\{ \nu_{12}^{(k)} \left[ \frac{d\Delta u^{(k)}}{dx} + \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{d\Delta w^{(k)}}{dx} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left( \int_0^\xi \frac{d^2 \Delta w^{(k)}}{dx^2} ds \right)^2 \right] + \frac{1}{R} \left( \Delta w_a^{(k)} - \int_s^a \int_0^\eta \frac{d^2 \Delta w^{(k)}}{dx^2} dy d\eta \right) \right\} = 0, \quad (43) \end{aligned}$$

$$\frac{d\Delta T_{11}^{(k)}}{dx} + \Delta X_1^{(k)} + (3-2k)\Delta q_1 + \frac{d}{dx} \left( B_{11}^{(k)} \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{d\Delta w^{(k)}}{dx} \right) = 0, \quad (44)$$

$$(\Delta u^{(1)} - \Delta u^{(2)}) - \sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{d\Delta w^{(k)}}{dx} + \frac{2h}{G_{13}} \Delta q_1 - \frac{2h^3}{3E_3} \frac{d^2 \Delta q_1}{dx^2} = 0 \quad (45)$$

и алгебраическим уравнением

$$\Delta T_{\zeta}^{+}(U + \Delta U) + T_{\zeta}^{+} \Delta U = \Delta A_T \quad (46)$$

относительно вектор-функции приращений

$$\Delta \mathbf{X} = (\Delta T_{\zeta}^{+}, \Delta w^{(1)}, \Delta w^{(2)}, \Delta u^{(1)}, \Delta u^{(1)}, \Delta q_1, \Delta Q_{11}^{(1)}, \Delta Q_{11}^{(2)}, \\ \Delta Q_{13}^{(1)}, \Delta Q_{13}^{(2)}, \Delta L_{11}^{(1)}, \Delta L_{11}^{(2)}, \Delta \tau_1, \Delta U, \Delta W, \Delta \varphi),$$

зависящей от решения  $\mathbf{X}$ . Здесь  $\Delta T_{\zeta}^{+}$  – новая неизвестная величина, а  $\Delta A_T$  – входной параметр задачи. Подставив (40) в граничные условия (5) и (6), для системы уравнений (43)–(45) получим граничные условия при  $x = x_1^{\pm}$

$$\Delta N_1^{(k)} + B_{11}^{(k)} \left[ \frac{d\Delta u^{(k)}}{dx} + \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{d\Delta w^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\Delta w^{(k)}}{dx} \right)^2 + \frac{\nu_{21}^{(k)} \Delta w^{(k)}}{R} \right] \frac{dw^{(k)}}{dx} + \\ + B_{11}^{(k)} \left[ \frac{dw^{(k)}}{dx} + \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{d\Delta w^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 + \frac{\nu_{21}^{(k)} w^{(k)}}{R} \right] \frac{d\Delta w^{(k)}}{dx} = \Delta Q_{13} + h \Delta \tau_1, \quad (47) \\ \Delta M_{11}^{(k)} = \Delta L_{11}^{(k)}, \quad \Delta q_1 = \Delta \tau_1, \quad \Delta T_{11}^{(k)} + B_{11}^{(k)} \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{d\Delta w^{(k)}}{dx} = \Delta Q_{11}^{(k)}$$

и при  $x = 0$

$$\Delta N_1^{(k)} + B_{11}^{(k)} \left[ \frac{d\Delta u^{(k)}}{dx} + \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{d\Delta w^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\Delta w^{(k)}}{dx} \right)^2 + \frac{\nu_{21}^{(k)} \Delta w^{(k)}}{R} \right] \frac{dw^{(k)}}{dx} + \\ + B_{11}^{(k)} \left[ \frac{dw^{(k)}}{dx} + \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{d\Delta w^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 + \frac{\nu_{21}^{(k)} w^{(k)}}{R} \right] \frac{d\Delta w^{(k)}}{dx} = 0, \quad (48) \\ \Delta \omega^{(k)} = 0, \quad \Delta u^{(k)} = 0, \quad \Delta q_1 = 0.$$

К составленной системе уравнений (43)–(46) необходимо добавить уравнения равновесия подкрепляющего стержня (7)–(9) и кинематические условия сопряжения подкрепляющего стержня с несущими слоями (10)–(13). Поскольку они являются линейными, вид этих уравнений относительно вектор-функции перемещений  $\Delta \mathbf{X}$  задачи (42) останется прежним и не будет зависеть от  $\mathbf{X}$ .

Для приближенного решения сформулированной задачи (42) об определении вектор-функции приращений  $\Delta \mathbf{X}$  так же, как в разд. 1, использовался метод конечных сумм. В соответствии с этим методом дифференциальные уравнения равновесия оболочки (43)–(45) путём последовательного удовлетворения граничным условиям (47), (48) сведены к системе интегро-алгебраических уравнений

$$\Delta L_{11}^{(k)} + D_{11}^{(k)} \frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2} + \delta_{(k)} \frac{E_3}{2h} \int_x^a \int_0^{\xi} \left[ \Delta w_a^{(2)} - \Delta w_a^{(1)} - \int_s^a \int_0^{\eta} \left( \frac{d^2 \Delta w^{(2)}}{dx^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{d^2 \Delta w^{(1)}}{dx^2} \right) dy d\eta + H_{(k)} \frac{d\Delta q_1}{dx} \right] ds d\xi + \int_x^a \left[ \left( \Delta T_{11}^{(k)} + B_{11}^{(k)} \frac{dw^{(k)}}{dx} \int_0^{\xi} \frac{d^2 \Delta w^{(k)}}{dx^2} ds \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{dw^{(k)}}{dx} + \left( T_{11}^{(k)} + B_{11}^{(k)} \frac{dw^{(k)}}{dx} \int_0^{\xi} \frac{d^2 \Delta w^{(k)}}{dx^2} ds \right) \int_0^{\xi} \frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2} ds + \Delta T_{11}^{(k)} \int_0^{\xi} \frac{d^2 \Delta w^{(k)}}{dx^2} ds \right] d\xi - \\ \left. - \frac{1}{R} \int_x^a \int_0^{\xi} \left( \Delta T_{22}^{(k)} + B_{22}^{(k)} \nu_{12}^{(k)} \frac{dw^{(k)}}{dx} \int_0^s \frac{d^2 \Delta w^{(k)}}{dx^2} d\eta \right) ds d\xi = - \int_x^a \int_0^{\xi} \Delta X_3^{(k)} ds d\xi, \quad (49)$$

$$\Delta Q_{11}^{(k)} - \left( \Delta T_{11}^{(k)} + B_{11}^{(k)} \frac{dw^{(k)}}{dx} \int_0^\xi \frac{d^2 \Delta w^{(k)}}{dx^2} ds \right) + \delta_{(k)} \int_x^a \int_0^\xi \frac{d^2 q_1}{dx^2} ds d\xi = 0, \quad (50)$$

$$\frac{2h^3}{3E_3} \frac{d\Delta q_1}{dx} + \frac{2h}{G_{13}} \int_x^a \int_0^\xi \frac{d^2 q_1}{dx^2} ds \xi + \int_x^a \int_0^\xi \sum_{k=1}^2 \left( \delta_{(k)} \frac{d\Delta u^{(k)}}{dx} - H_{(k)} \frac{d^2 \Delta w^{(k)}}{dx^2} \right) ds d\xi = 0, \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \delta_{(k)} \frac{E_3}{2h} \int_x^a \left( \Delta w_a^{(2)} - \Delta w_a^{(1)} - \int_x^a \int_0^\xi \left( \frac{d^2 \Delta w^{(2)}}{dx^2} - \frac{d^2 \Delta w^{(1)}}{dx^2} \right) ds \xi \right) d\xi + Q_{13}^{(k)} + h\tau_1 - \\ - \frac{1}{R} \int_0^a \left( \Delta T_{22}^{(k)} + B_{22}^{(k)} \nu_{12}^{(k)} \frac{dw^{(k)}}{dx} \int_0^x \frac{d^2 \Delta w^{(k)}}{dx^2} d\xi \right) dx = - \int_0^a \Delta X_3^{(k)} dx, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\int_0^a \frac{dq_1}{dx} dx - \tau_1 = 0, \quad (53)$$

$$\int_0^a \frac{d\Delta u^{(k)}}{dx} dx - (\Delta U - \delta_{(k)} H_{(k)} \Delta \varphi) = 0, \quad (54)$$

$$\Delta w_a^{(k)} - (\Delta W + B_2^{(+)} \Delta \varphi) = 0, \quad (55)$$

$$\int_0^a \frac{d^2 \Delta w^{(k)}}{dx^2} dx + \Delta \varphi = 0, \quad (56)$$

$$\Delta f_u^+ = -(\Delta Q_{11}^{(1)} + \Delta Q_{11}^{(2)}) + \Delta T_\zeta^+ = 0, \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \Delta f_\varphi^+ = - \left[ \Delta L_{11}^{(1)} + \Delta L_{11}^{(2)} - \Delta Q_{11}^{(1)} H_{(1)} + \Delta Q_{11}^{(2)} H_{(2)} + \right. \\ \left. + B_2^{(+)} (\Delta Q_{13}^{(1)} + \Delta Q_{13}^{(2)} + 2h\Delta\tau_1) \right] + \Delta T_\zeta^+ z_A = 0, \end{aligned} \quad (58)$$

$$\Delta T_\zeta^+ (U + \Delta U) + \Delta T_\zeta^+ \Delta U = \Delta A_T, \quad (59)$$

где

$$\Delta T_{11}^{(k)} = B_{11}^{(k)} \left[ \frac{d\Delta u^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left( \int_0^\xi \frac{d^2 \Delta w^{(k)}}{dx^2} ds \right)^2 + \frac{\nu_{21}^{(k)}}{R} \left( \Delta w_a^{(k)} - \int_s^a \int_0^\eta \frac{d^2 q_1}{dx^2} dy d\eta \right) \right],$$

$$\Delta T_{22}^{(k)} = B_{22}^{(k)} \left[ \nu_{12}^{(k)} \left( \frac{d\Delta u^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left( \int_0^\xi \frac{d^2 \Delta w^{(k)}}{dx^2} ds \right)^2 \right) + \frac{1}{R} \left( \Delta w_a^{(k)} - \int_s^a \int_0^\eta \frac{d^2 q_1}{dx^2} dy d\eta \right) \right].$$

Решая сформулированную задачу (49)–(59), определим вектор-функцию приращений  $\Delta \mathbf{X}$ . Это позволяет в неустойчивых положениях равновесия оболочки определить решение  $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}$ , а следовательно, и все параметры закритического НДС.

Заметим, что применительно к сформулированной задаче явный вид введенных ранее в (42) операторов будет следующим:

$$D_A(\mathbf{X})\Delta U = \begin{pmatrix} D_A(\mathbf{X})\Delta \mathbf{X} \\ C_A(\mathbf{X})\Delta \mathbf{X} \end{pmatrix} : H^{\times 5} \times R^{\times 13} \rightarrow H^{\times 5} \times R^{\times 13},$$

$$C_A(\mathbf{X})\Delta \mathbf{X} = \Delta T_\zeta^+ U + T_\zeta^+ \Delta U,$$

$$R(\mathbf{X}, \Delta \mathbf{X}) = \left[ \begin{pmatrix} A_2(\Delta \mathbf{X}) \\ \Theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_w^{(1)}(\mathbf{X}, \Delta \mathbf{X}) \\ R_w^{(2)}(\mathbf{X}, \Delta \mathbf{X}) \\ \Theta^{\times 3n+11} \\ R_A(\mathbf{X}, \Delta \mathbf{X}) \end{pmatrix} \right] : H^{\times 5} \times R^{\times 13} \rightarrow H^{\times 5} \times R^{\times 13},$$

$$R_w^{(k)}(\mathbf{X}, \Delta \mathbf{X}) = J_2 B_{(k)} \frac{3}{2} \frac{dw^{(k)}}{dx} \left( J_1 \frac{d^2 \Delta w^{(k)}}{dx^2} \right)^2, \quad R_A(\mathbf{X}, \Delta \mathbf{X}) = T_\zeta^+ \Delta U.$$

Формулы для операторов  $D_A(\mathbf{X})\Delta \mathbf{X}$  и  $A_2(\Delta \mathbf{X})$  приведены в разд. 2 и 5.

В конечномерной операторной постановке сформулированная задача есть

$$D_A(X)\Delta X + R(X, \Delta X) = \Delta F, \quad (60)$$

где

$$\Delta X = (\Delta T_\zeta^+, \Delta w_{,11}^{(1)}, \Delta w_{,1}^{(2)}, \Delta u_{,1}^{(1)}, \Delta u_{,1}^{(1)}, \Delta q_{1,1}, \Delta Q_{11}^{(1)}, \Delta Q_{11}^{(2)}, \\ \Delta Q_{13}^{(1)}, \Delta Q_{13}^{(2)}, \Delta L_{11}^{(1)}, \Delta L_{11}^{(2)}, \Delta \tau_1, \Delta U, \Delta W, \Delta \varphi)$$

является конечномерным аналогом вектор-функции неизвестных,  $X$  – решением задачи (23) о докритическом положении равновесия оболочки. Заметим, что вектор-функция правых частей  $\Delta F$  зависит только от скалярной величины – приращения работы внешних сил  $\Delta A_T$ .

Поскольку оператор  $R(X, \Delta X)$  является нелинейным относительно искомой неизвестной  $\Delta X$ , для решения задачи (60) предложен итерационный процесс

$$D_A(X) \frac{\Delta X^{(j+1)} - \Delta X^{(j)}}{\tau} + D_A(X)\Delta X^{(n)} + R(X, \Delta X^{(n)}) = \Delta F,$$

аналогичный (24).

Таким образом, табулируя сначала по нагрузке  $T_\zeta^+$ , приложенной в осевом направлении к подкрепляющему стержню, а затем по приращению работы внешних сил  $\Delta A_T$ , можно установить закон изменения внешней нагрузки  $T_\zeta^+$  в зависимости от максимального значения прогиба верхнего несущего слоя  $w^{(2)}$ , показанной на рис. 18.

Реализованный метод продолжения решения по параметру позволяет проследить, как ведет себя оболочка в закритическом состоянии. На рис. 18–23 приведены результаты таких исследований для оболочки с указанными ранее параметрами. Их анализ показывает, что значение  $T_\zeta^* = 463.22$  кН/м является критическим, так как дальнейшее увеличение прогибов происходит при уменьшающемся значении  $T_\zeta^+$  (см. рис. 18). При таком значении действующей нагрузки наиболее интенсивное волнообразование наблюдается у верхнего несущего слоя в области крепления подкрепляющего стержня с оболочкой (рис. 19). С целью иллюстрации на рис. 20–23 для одного и того же значения нагрузки  $T_\zeta^+ = 450$  кН/м приведены графики

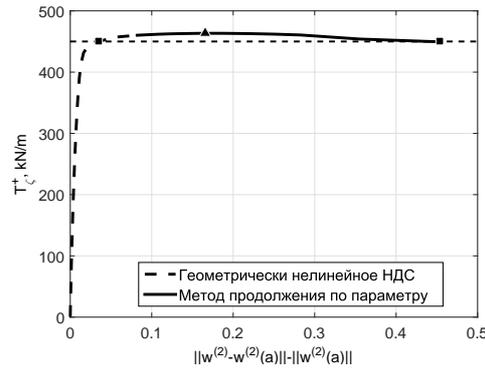


Рис. 18. Зависимость погонной нагрузки  $T_{\zeta}^+$  от максимального по модулю значения прогиба  $w^{(2)}$  верхнего слоя

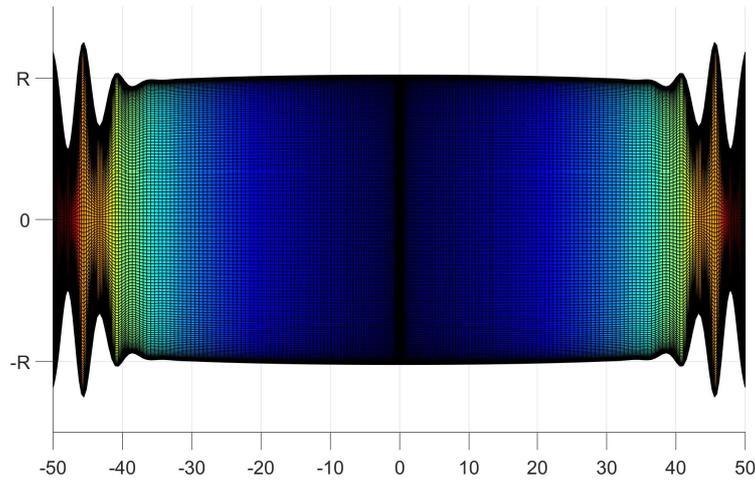


Рис. 19. Деформированное состояние срединной поверхности верхнего несущего слоя в точке бифуркации

изменения прогиба верхнего слоя  $w^{(2)}$ , формирующихся в нем мембранных напряжений  $\sigma_{11}^{(1)}$ ,  $\sigma_{22}^{(2)}$  и поперечного касательного напряжения в заполнителе  $q_1$  по длине оболочки в её докритическом (штриховая линия) и закритическом (сплошная линия) состояниях.

*Анализ результатов численного решения линеаризованной задачи.* В соответствии с изложенными выше алгоритмами, реализованными в среде Matlab, решая задачи (23), (60) при различных значениях нагрузки  $T_{\zeta}^+$ , мы находим такое её значение, когда определяемое путём решения задачи (36) собственное число становится равным значению торцевой нагрузки (то есть  $\lambda = T_{\zeta}^+$ ). В такой постановке задачи были найдены точка бифуркации и соответствующее значение нагрузки  $\lambda = T_{\zeta}^* = 463.34$  кН/м (рис. 24). Был проведен анализ поведения минимального собственного значения  $\lambda$  задачи (36) при различных значениях нагрузки  $T_{\zeta}^+$ , результаты которого приведены на рис. 24 в виде соответствующей зависимости. Видно, что решение линеаризованной задачи о возмущенном состоянии оболочки, определяемое в окрестности решения линейной задачи о докритическом НДС, приводит к собственным значениям  $\lambda > T_{\zeta}^*$ .

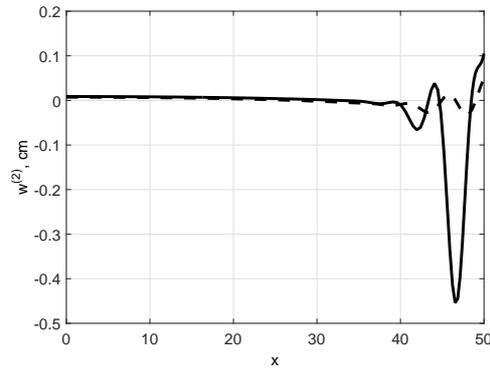


Рис. 20. Прогобы срединной поверхности верхнего несущего слоя  $w^{(2)}$ , см

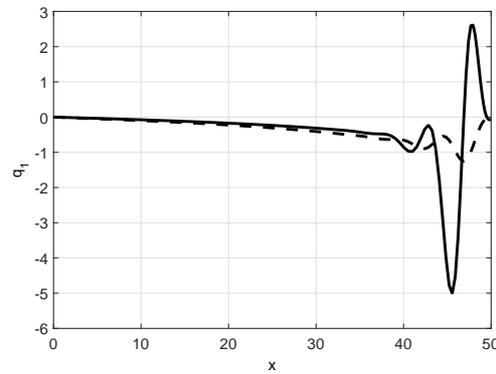


Рис. 21. Поперечные касательные напряжения в заполнителе  $q_1$ , МПа

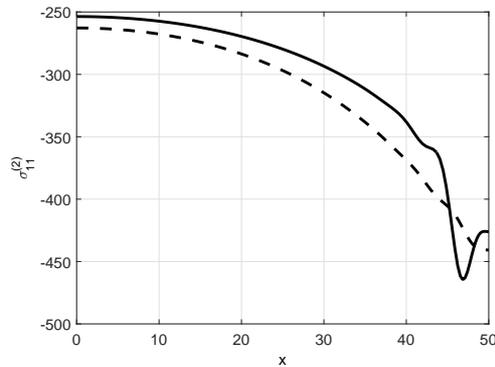


Рис. 22. Мембранные осевые напряжения в верхнем несущем слое  $\sigma_{11}^{(2)} = T_{11}^{(2)}/(2h^{(2)})$ , МПа

С целью иллюстрации на рис. 25–28 изображены графики изменения компонент собственного вектора  $\delta X$ , соответствующих собственному значению  $\lambda = 463.34$  задачи (36), по длине оболочки.

Видно, что в условиях торцевого нагружения подкрепляющего стержня реализуется ФПУ с выпучиванием оболочки в зоне сопряжения подкрепляющего стержня с оболочкой. На рис. 25 приведены собственные функции прогибов несущего

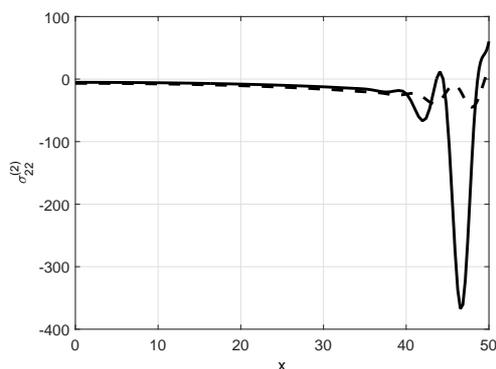


Рис. 23. Мембранные окружные напряжения в верхнем несущем слое  $\sigma_{22}^{(2)} = T_{22}^{(2)} / (2h^{(2)})$ , МПа

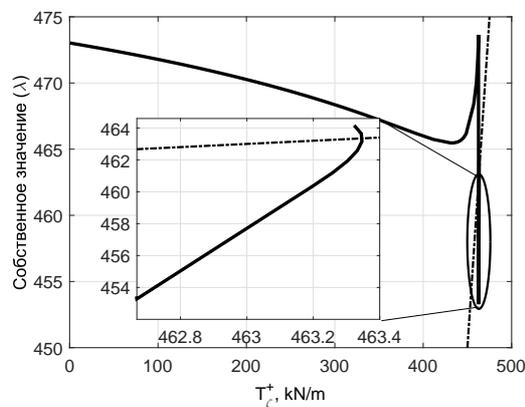


Рис. 24. Зависимость собственного числа  $\lambda$  от значения нагрузки  $T_c^+$

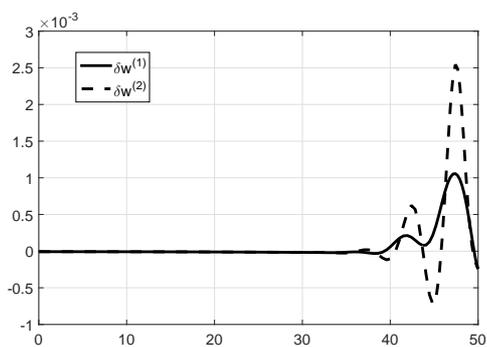


Рис. 25. Приращения прогибов точек срединных поверхностей внешних слоев при переходе в возмущенное состояние

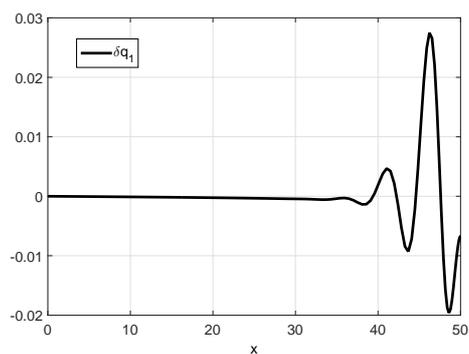


Рис. 26. Приращения касательных напряжений в наполнителе при переходе в возмущенное состояние

щих слоёв, на котором видно, что в граничной области происходит волнообразование прогибов, причём ввиду действия на оболочку сжимающей нагрузки с эксцентриситетом наиболее интенсивное волнообразование наблюдается у верхнего несущего

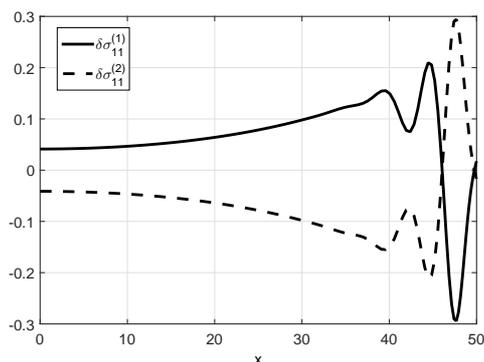


Рис. 27. Приращения осевых мембранных напряжений в несущих слоях при переходе в возмущенное состояние

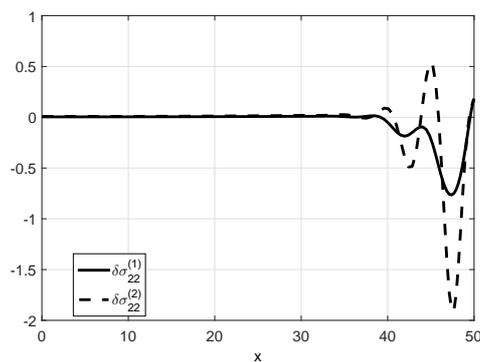


Рис. 28. Приращения окружных мембранных напряжений в несущих слоях при переходе в возмущенное состояние

шего слоя в области крепления подкрепляющего стержня с оболочкой. На рис. 26–28 изображены собственные функции касательных напряжений в заполнителе, осевых и окружных мембранных напряжений в несущих слоях соответственно, которые в результате потери устойчивости также имеют большие градиенты изменений в области сопряжения с подкрепляющим стержнем.

**Благодарности.** Результаты исследований получены за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10299, разработка численных методов) и частично гранта РФФИ (проект № 16-08-00316, постановка задач и вывод основных уравнений) в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России № 9.5762.2017/ВУ (проект № 9.1395.2017/ПЧ, проведение численных экспериментов и анализ их результатов).

#### Литература

1. Александров А.Я., Брюккер Л.Э., Куршин Л.М., Прусаков А.П. Расчет трехслойных панелей. – М.: Оборонгиз, 1960. – 270 с.
2. Reddy J.N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. – Boca Raton: CRC Press, 2004. – 831 p.
3. Badriev I.B., Paimushin V.N. Refined Models of Contact Interaction of a Thin Plate with Positioned on Both Sides Deformable Foundations // Lobachevskii J. Math. – 2017. – V. 38, No 5. – P. 779–793. – doi: 10.1134/S1995080217050055.
4. Birman V., Vo N. Wrinkling in sandwich structures with a functionally graded core // J. Appl. Mech.. – 2017. – V. 84, No 2. – Art. 021002, P. 1–8. – doi: 10.1115/1.4034990.
5. Zenkert D. An Introduction to Sandwich Construction. – London: Chameleon Press Ltd., 1995. – 277 p.
6. Crupi V., Epasto G., Guglielmino E. Comparison of aluminium sandwiches for lightweight ship structures: Honeycomb vs. foam // Marine Structures. – 2013. – V. 30. – P. 74–96. – doi: 10.1016/j.marstruc.2012.11.002.
7. Vasiliev V.V., Morozov E.V. Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements. – Elsevier, 2013. – 832 p.
8. Sutherland L., Soares G. Impact behavior of typical marine composite laminates // Composites: Part B. – 2006. – V. 37, No 2–3. – P. 89–100. – doi: 10.1016/j.compositesb.2005.09.001.

9. *Johnson H.E., Louca L.A., Mouring S., Fallah A.S.* Modelling impact damage in marine composite panels // *Int. J. Impact Eng.* – 2009. – V. 36, No 1. – P. 25–39. – doi: 10.1016/j.ijimpeng.2008.01.013.
10. *Васильев В.В., Добряков А.А., Дудченко А. А.* Основы проектирования и изготовления конструкций летательных аппаратов из композиционных материалов. – М.: МАИ, 1985. – 218 с.
11. *Takeda N., Minakuchi S., Okabe Y.* Smart composite sandwich structures for future aerospace application damage detection and suppression: A review // *J. Solid Mechanics and Materials Engineering.* – 2007. – V. 1. No 1. – P. 3–17. – doi: 10.1299/jmmp.1.3.
12. *Minjing L., Zhanjun W.* Application of composite honeycomb sandwich structure in aircraft // *Sci. Technol. Rev.* – 2016. – V. 34, No 8. – P. 21–25. (in Chinese)
13. *Seibert H.F.* Composite materials for aerospace applications // *Bull. Materials Sci.* – 1999. – V. 22, No 3. – P. 657–664. – doi: 10.1007/BF02749982.
14. *Crump D.A., Dulieu-Barton J.M., Savage J.* The Manufacturing Procedure for Aerospace Secondary Sandwich Structure Panels // *J. Sandwich Structures Materials.* – 2010. – V. 12, No 4. – P. 421–447. – doi: 10.1177/1099636209104531.
15. *Григолюк Э.И., Чулков П.П.* Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. – М.: Машиностроение, 1973. – 168 с.
16. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
17. *Григолюк Э.И., Коган Ф.А.* Современное состояние теории многослойных оболочек // *Прикл. механика.* – 1972. – Т. 8, № 6. – С. 5–17.
18. *Паймушин В.Н.* Нелинейная теория среднего изгиба трехслойных оболочек с дефектами в виде участков непрочлея // *Прикл. механика.* – 1987. – № 11. – С. 32–38.
19. *Иванов В.А., Паймушин В.Н.* Уточненная теория устойчивости трехслойных конструкций (нелинейные уравнения докритического равновесия оболочек с трансверсально-мягким заполнителем) // *Изв. вузов. Матем.* – 1994. – № 11. – С. 29–42.
20. *Paimushin V.N., Bobrov S.N.* Refined geometric nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core of medium thickness for investigation of mixed buckling forms // *Mechanics of Composite Materials.* – 2000. – V. 36, No 1. – P. 59–66.
21. *Noor A.K., Burton W.S., Bert Ch.W.* Computational models for sandwich panels and shells // *Appl. Mech. Rev.* – 1996. – V. 49, No 3. – P. 155–199. – doi: 10.1115/1.3101923.
22. *Паймушин В.Н.* Теория устойчивости трехслойных пластин и оболочек (этапы развития, современное состояние и направления дальнейших исследований) // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* – 2001. – № 2. – С. 148–162.
23. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Numerical Investigation of physically nonlinear problem of sandwich plate bending // *Procedia Eng.* – 2016. – V. 150. – P. 1050–1055. – doi: 10.1016/j.proeng.2016.07.213.
24. *Badriev I.B., Banderov V.V., Makarov M.V.* Mathematical Simulation of the problem of the pre-critical sandwich plate bending in geometrically nonlinear one dimensional formulation // *IOP Conf. Ser.: Materials Science and Engineering.* – 2017. – V. 208. – Art. 012002, P. 1–7. – doi: 10.1088/1757-899X/208/1/012002.
25. *Badriev I.B., Garipova G.Z., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Numerical solution of the issue about geometrically nonlinear behavior of sandwich plate with transversal soft filler // *Res. J. Appl. Sci.* – 2015. – V. 10, No 8. – P. 428–435. – doi: 10.3923/rjas.2015.428.435.

26. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Solvability of physically and geometrically nonlinear problem of the theory of sandwich plates with transversally-soft core // *Russ. Math.* – 2015. – V. 59, No 10. – P. 57–60. – doi: 10.3103/S1066369X15100072.
27. *Бадриев И.Б., Гарипова Г.З., Макаров М.В., Паймушин В.Н., Хабибуллин Р.Ф.* О решении физически нелинейных задач о равновесии трехслойных пластин с трансверсально-мягким наполнителем // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* – 2015. – Т. 157, кн. 1. – С. 15–24.
28. *Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н.* Численное исследование физически нелинейной задачи о продольном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем // *Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика.* – 2017. – № 1. – С. 39–51. – doi: 10.15593/perm.mech/2017.1.03.
29. *Paimushin V.N.* theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour // *Mechanics of Composite Materials.* – 2017. – V. 53, No 1. – P. 1–16. – doi: 10.1007/s11029-017-9636-1.
30. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Contact statement of mechanical problems of reinforced on a contour sandwich plates with transversally-soft core // *Russ. Math.* – 2017. – V. 61, No 1. – P. 69–75. – doi: 10.3103/S1066369X1701008X.
31. *Паймушин В.Н.* К вариационным методам решения пространственных задач сопряжения деформируемых тел // *Докл. АН СССР.* – 1983. – Т. 273, № 5. – С. 1083–1086.
32. *Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н.* Продольно-поперечный изгиб по цилиндрической форме трехслойной пластины, подкрепленной в торцевых сечениях абсолютно твердыми телами // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* – 2017. – Т. 159, кн. 2. – С. 174–190.
33. *Даутов Р.З., Паймушин В.Н.* О методе интегрирующих матриц решения краевых задач для обыкновенных уравнений четвертого порядка // *Изв. вузов. Матем.* – 1996. – № 10. – С. 13–25.
34. *Даутов Р.З., Карчевский М.М., Паймушин В.Н.* К методу интегрирующих матриц для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // *Изв. вузов. Матем.* – 2003. – № 7. – С. 18–26.
35. *Вахитов М.Б.* Интегрирующие матрицы аппарат численного решения дифференциальных уравнений строительной механики // *Изв. вузов. Авиац. техника.* – 1966. – № 3. – С. 50–61.
36. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Longitudinal and transverse bending by a cylindrical shape of the sandwich plate stiffened in the end sections by rigid bodies // *IOP Conf. Ser. Materials Science and Engineering.* – 2016. – V. 158. – Art. 012011, P. 1–9. – doi: 10.1088/1757-899X/158/1/012011.
37. *Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н.* Геометрически нелинейная задача о продольно-поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* – 2016. – Т. 158, кн. 4. – С. 453–468.
38. *Карчевский М.М.* Итерационные схемы для уравнений с монотонными операторами // *Изв. вузов. Матем.* – 1971. – № 5. – С. 32–37.
39. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Mathematical Simulation of Nonlinear Problem of Three-point Composite Sample Bending Test // *Procedia Eng.* – 2016. – V. 150. – P. 1056–1062. doi: 10.1016/j.proeng.2016.07.214.
40. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М: Наука, 1972. – 416 с.

41. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. – М.: Наука, 1988. – 231 с.
42. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 222 с.

Поступила в редакцию  
11.04.17

---

**Бадриев Ильдар Бурханович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики

Казанский (Приволжский) федеральный университет  
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия  
E-mail: [ildar.badriev1@mail.ru](mailto:ildar.badriev1@mail.ru)

**Макаров Максим Викторович**, ассистент кафедры анализа данных и исследования операций

Казанский (Приволжский) федеральный университет  
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия  
E-mail: [makarovmaksim@mail.ru](mailto:makarovmaksim@mail.ru)

**Паймушин Виталий Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прочности конструкций; главный научный сотрудник

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева  
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия  
Казанский (Приволжский) федеральный университет  
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия  
E-mail: [vpajmushin@mail.ru](mailto:vpajmushin@mail.ru)

**Холмогоров Сергей Андреевич**, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева  
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия  
E-mail: [hkazan@yandex.ru](mailto:hkazan@yandex.ru)

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.  
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI  
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2017, vol. 159, no. 4, pp. 395–428

## The Axisymmetric Problems of Geometrically Nonlinear Deformation and Stability of a Sandwich Cylindrical Shell with Contour Reinforcing Beams

*I.B. Badriev<sup>a\*</sup>, M.V. Makarov<sup>a\*\*</sup>, V.N. Paimushin<sup>a,b\*\*\*</sup>, S.A. Kholmogorov<sup>b\*\*\*\*</sup>*

<sup>a</sup>*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*

<sup>b</sup>*Tupolev Kazan National Research Technical University, Kazan, 420111 Russia*

E-mail: *\*ildar.badriev1@mail.ru, \*\*makarovmaksim@mail.ru, \*\*\*vpajmushin@mail.ru,*

*\*\*\*\*hkazan@yandex.ru*

Received April 11, 2017

### Abstract

A numerical investigation of the problem of geometrically nonlinear axisymmetric deformation of a sandwich cylindrical shell with a transversally soft core reinforced in the end sections by elastic rods has been carried out. To describe the process of deformation, we have used the previously derived equations of the refined geometrically nonlinear theory that allow to both study the subcritical behavior of the shell and to reveal all possible buckling forms of the carrier layers. These equations are based on the introduction, as unknown variables, of the contact forces of the interaction of the outer layers with the core, as well as of the outer layers and the filler with the reinforcing bodies at all points on the surfaces of their conjugation. Numerical methods for solving the formulated problems have been developed. They are based on the preliminary reduction of the original problems to a system of integro-algebraic equations, for the solving of which the finite sum method is used. A method has been proposed for investigating the subcritical and supercritical geometrically nonlinear behavior of a shell with its end compression through contour reinforcing rods, according to which unstable equilibrium positions are determined by the method of continuation of the solution with respect to the parameter when the external forces are selected as a parameter. A method has been proposed for finding the critical load (the bifurcation point) at which the shell buckling occurs. This method is based on the linearization of the initial geometrically nonlinear problem in the neighborhood of its nonlinear solution, followed by the formulation of the eigenvalue problem with a nonlinear presence of the parameter. The results of the numerical experiments have been discussed. The results of the experiments have been analyzed.

**Keywords:** sandwich cylindrical shell, transversally soft filler, contour reinforcing beam, geometric nonlinearity, contact stresses, axial compression, axisymmetric deformation, finite sum method, subcritical and supercritical behavior, bifurcation point, linearized problem, buckling forms

**Acknowledgments.** The study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 16-11-10299) and in part by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-08-00316) in the framework of the state task of the Ministry of Education of the Russian Federation (task no. 9.5762.2017/VU, project no. 9.1395.2017/PCh).

## Figure Captions

Fig. 1. *a)* The scheme of connection of a sandwich shell with a frame; *b)* the scheme of the reinforcing beam.

Fig. 2. Sandwich plate shell with contour reinforcing beams.

Fig. 3. Deflections of the middle surfaces of the carrier layers  $w^{(k)}$ , cm.

Fig. 4. Axial displacements of the middle surfaces of the carrier layers  $u_1^{(k)}$ , cm.

Fig. 5. Axial membrane normal stresses in the carrier layers  $\sigma_{11}^{(k)} = T_{11}^{(k)}/(2h^{(k)})$ , MPa.

Fig. 6. Bending moments in the carrier layers  $M_{11}^{(k)}$ , N

Fig. 7. Transverse tangential stresses in the core  $q_1$ , MPa.

Fig. 8. Circumferential membrane stresses in the carrier layers  $\sigma_{22}^{(k)} = T_{22}^{(k)}/(2h^{(k)})$ , MPa.

Fig. 9. Generalized shear forces of the carrier layers  $N_1^{(k)}$ , kN/m.

Fig. 10. Shear forces of the carrier layers  $Q_1^{(k)}$ , kN/m.

Fig. 11. The deformed state of the middle surface of the upper carrier layer at  $E = E_2^{(k)} = 20 \cdot 10^3$  MPa.

Fig. 12. The deformed state of the middle surface of the upper carrier layer at  $E = E_2^{(k)} = 80 \cdot 10^3$  MPa.

Fig. 13. The dependence of the running load  $T_\zeta^{(+)}$  on the maximum modulus of the deflection  $w^{(2)}$  of the upper layer.

Fig. 14. Deflections of the middle surfaces of the carrier layers  $w^{(k)}$ , cm.

Fig. 15. Transverse tangential stresses in the core  $q_1$ , MPa.

Fig. 16. Axial membrane normal stresses in the carrier layers  $\sigma_{11}^{(k)} = T_{11}^{(k)}/(2h^{(k)})$ , MPa.

Fig. 17. Circumferential membrane stresses in the carrier layers  $\sigma_{22}^{(k)} = T_{22}^{(k)}/(2h^{(k)})$ , MPa.

Fig. 18. The dependence of the running load  $T_\zeta^{(+)}$  on the maximum modulus of the deflection  $w^{(2)}$  of the upper layer.

Fig. 19. The deformed state of the middle surface of the upper carrier layer at the bifurcation point

Fig. 20. Deflections of the middle surface of the upper carrier layer  $w^{(2)}$ , cm.

Fig. 21. Transverse tangential stresses in the core  $q_1$ , MPa.

Fig. 22. Membrane axial stresses in the upper carrier layer  $\sigma_{11}^{(2)} = T_{11}^{(2)}/(2h^{(2)})$ , MPa.

Fig. 23. Circumferential membrane stresses in the upper carrier layer  $\sigma_{22}^{(2)} = T_{22}^{(2)}/(2h^{(2)})$ , MPa.

Fig. 24. Dependence of the eigenvalue  $\lambda$  on the load value  $T_\zeta^+$ .

Fig. 25. Increments in the deflections of the points of the middle surfaces of the outer layers at the transition to the disturbed state.

Fig. 26. Increments of the tangential stresses in the core at the transition to the disturbed state.

Fig. 27. Increments in axial membrane stresses in the carrier layers at the transition to the disturbed state.

Fig. 28. Increments of circumferential membrane stresses in the carrier layers at the transition to the disturbed state.

## References

1. Aleksandrov A.Ya., Bryukker L.E., Kurshin L.M., Prusakov A.P. Calculation of Sandwich Panels. Moscow, Oborongiz, 1960. 270 p. (In Russian)
2. Reddy J.N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. Boca Raton, CRC Press, 2004. 831 p.
3. Badriev I.B., Paimushin V.N. Refined models of contact interaction of a thin plate with positioned on both sides deformable foundations. *Lobachevskii J. Math.*, 2017, vol. 38, no. 5, pp. 779–793. doi: 10.1134/S1995080217050055.
4. Birman V., Vo N. Wrinkling in sandwich structures with a functionally graded core. *J. Appl. Mech.*, 2017, vol. 84, no. 2, art. 021002, pp. 1–8. doi:10.1115/1.4034990.
5. Zenkert D. An Introduction to Sandwich Construction. London, Chameleon Press Ltd., 1995. 277 p.
6. Crupi V., Epasto G., Guglielmino E. Comparison of aluminium sandwiches for lightweight ship structures: Honeycomb Vs. foam. *Mar. Struct.*, 2013, vol. 30, pp. 74–96. doi: 10.1016/j.marstruc.2012.11.002.
7. Vasiliev V.V., Morozov E.V. Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements. Elsevier, 2013. 832 p.
8. Sutherland L., Soares G. Impact behavior of typical marine composite laminates. *Composites, Part B*, 2006, vol. 37, nos. 2–3, pp. 89–100. doi: 10.1016/j.compositesb.2005.09.001.
9. Johnson H.E., Louca L.A., Mouring S., Fallah A.S. Modelling impact damage in marine composite panels. *Int. J. Impact Eng.*, 2009, vol. 36, no. 1, pp. 25–39. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2008.01.013.
10. Vasil'ev V.V., Dobryakov A.A., Dudchenko A.A. Fundamentals of the Planning and Production of Aircraft Structures Made of Composite Materials. Moscow, MAI, 1985. 218 p. (In Russian)
11. Takeda N., Minakuchi S., Okabe Y. Smart composite sandwich structures for future aerospace application damage detection and suppression: A review. *J. Solid Mech. Mater. Eng.*, 2007, vol. 1, no. 1, pp. 3–17. doi: 10.1299/jmmp.1.3.
12. Minjing L., Zhanjun W. Application of composite honeycomb sandwich structure in aircraft. *Sci. Technol. Rev.*, 2016, vol. 34, no. 8, pp. 21–25.
13. Seibert H.F. Composite materials for aerospace applications. *Bull. Mater. Sci.*, 1999, vol. 22, no. 3, pp. 657–664. doi: 10.1007/BF02749982.
14. Crump D.A., Dulieu-Barton J.M., Savage J. The manufacturing procedure for aerospace secondary sandwich structure panels. *J. Sandwich Struct. Mater.*, 2010, vol. 12, no. 4, pp. 421–447. doi: 10.1177/1099636209104531.
15. Grigolyuk E.I., Chulkov P.P. Stability and Vibrations of Sandwich Shells. Moscow, Mashinostroenie, 1973. 168 p. (In Russian)
16. Bolotin V.V., Novichkov Y.N. Mechanics of Multilayered Structures. Moscow, Mashinostroenie, 1980. 375 p. (In Russian)
17. Grigolyuk E.I., Kogan F.A. Present State of the Theory of Multilayered Shells. *Prikl. Mekh.*, 1972, vol. 8, no. 6, pp. 5–17. (In Russian)
18. Paimushin V.N. Nonlinear theory of the central bending of three-layer shells with defects in the form of sections of bonding failure. *Sov. Appl. Mech.*, 1987, vol. 23, no. 11, pp. 1038–1043. doi: 10.1007/BF00887186.
19. Ivanov V.A., Paimushin V.N. An improved theory of the stability of three-layer structures (non-linear equations for the subcritical equilibrium of shells with a transversely soft filler). *Russ. Math.*, 1994, vol. 38, no. 11, pp. 26–39.

20. Paimushin V.N., Bobrov S.N. Refined geometric nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core of medium thickness for investigation of mixed buckling forms. *Mech. Compos. Mater.*, 2000, vol. 36, no. 1, pp. 59–66. doi: 10.1007/BF02681778.
21. Noor A. K., Burton W.S., Bert Ch.W. Computational models for sandwich panels and shells. *Appl. Mech. Rev.*, 1996, vol. 49, no. 3, pp. 155–199. doi: 10.1115/1.3101923.
22. Paimushin V.N. The theory of stability of sandwich plates and shells (stages of development, current state and directions of further research). *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 2001, no. 2, pp. 148–162. (In Russian)
23. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Numerical investigation of physically nonlinear problem of sandwich plate bending. *Procedia Eng.*, 2016, vol. 150, pp. 1050–1055. doi: 10.1016/j.proeng.2016.07.213.
24. Badriev I.B., Banderov V.V., Makarov M.V. Mathematical simulation of the problem of the pre-critical sandwich plate bending in geometrically nonlinear one dimensional formulation. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2017, vol. 208, art. 012002, pp. 1–7. doi: 10.1088/1757-899X/208/1/012002.
25. Badriev I.B., Garipova G.Z., Makarov M.V., Paimushin V.N. Numerical solution of the issue about geometrically nonlinear behavior of sandwich plate with transversal soft filler. *Res. J. Appl. Sci.*, 2015, vol. 10, no. 8, pp. 428–435. doi: 10.3923/rjasci.2015.428.435.
26. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Solvability of physically and geometrically nonlinear problem of the theory of sandwich plates with transversally-soft core. *Russ. Math.*, 2015, vol. 59, no. 10, pp. 57–60. doi: 10.3103/S1066369X15100072.
27. Badriev I.B., Garipova G.Z., Makarov M.V., Paimushin V.N., Khabibullin R.F. Solving physically nonlinear equilibrium problems for sandwich plates with a transversally soft core. *Lobachevskii J. Math.*, 2015, vol. 36, no. 4, pp. 474–481. doi: 10.1134/S1995080215040216.
28. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Numerical investigation of a physically nonlinear problem of longitudinal bending of sandwich plate with transversal-soft core. *PNRPU Mech. Bull.*, 2017, no. 1, pp. 39–51, doi: 10.15593/perm.mech/2017.1.03.
29. Paimushin V.N. Theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour. *Mech. Compos. Mater.*, 2017, vol. 53, no. 1, pp. 1–16. doi: 10.1007/s11029-017-9636-1.
30. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Contact statement of mechanical problems of reinforced on a contour sandwich plates with transversally-soft core. *Russ. Math.*, 2017, vol. 61, no. 1, pp. 69–75. doi: 10.3103/S1066369X1701008X.
31. Paimushin V.N. Variational methods for solving non-linear spatial problems of the joining of deformable bodies. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1983, vol. 273, no. 5, pp. 1083–1086. (In Russian)
32. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Longitudinal and transverse bending on the cylindrical shape of a sandwich plate reinforced with absolutely rigid bodies in the front sections. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 2, pp. 174–190. (In Russian)
33. Dautov R.Z., Paimushin V.N. On the method of integrating matrices for the solution of boundary value problems for fourth-order ordinary equations. *Russ. Math.*, 1996, vol. 40, no. 10, pp. 11–13.
34. Dautov R.Z., Karchevskii M.M., Paimushin V.N. On the method of integrating matrices for systems of ordinary differential equations. *Russ. Math.*, 2003, vol. 47, no. 7, pp. 16–24.

35. Vakhitov M.B. Integrating matrices as a means of numerical solution of differential equations in structural dynamics. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Aviats. Tekh.*, 1966, no. 3, pp. 50–61. (In Russian)
36. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Longitudinal and transverse bending by a cylindrical shape of the sandwich plate stiffened in the end sections by rigid bodies. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2016, vol. 158, art. 012011, pp. 1–9. doi: 10.1088/1757-899X/158/1/012011.
37. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Geometrically nonlinear problem of longitudinal and transverse bending of a sandwich plate with transversally soft core. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 4, pp. 453–468. (In Russian)
38. Karchevskii M.M. Iteration schemes for equations with monotone operators. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.*, 1971, no. 5, pp. 32–37. (In Russian)
39. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Mathematical simulation of nonlinear problem of three-point composite sample bending test. *Procedia Eng.*, 2016, vol. 150, pp. 1056–1062. doi: 10.1016/j.proeng.2016.07.214.
40. Vainberg M.M. Variational Method and Monotone Operators Method. Moscow, Nauka, 1972. 416 p. (In Russian)
41. Grigolyuk E.I., Shalashilin V.I. Problems of Nonlinear Deformation: Parameter Continuation Method in Nonlinear Problems of Solid Mechanics. Moscow, Nauka, 1988. 231 p. (In Russian)
42. Shalashilin V.I., Kuznetsov E.B. Parametric Continuation and Optimal Parametrization in Applied Mathematics and Mechanics. Dordrecht, Boston, London, Kluwer Acad. Publ., 2003. 236 p.

---

*Для цитирования:* Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н., Холмогоров С.А. Осесимметричные задачи о геометрически нелинейном деформировании и устойчивости трехслойной цилиндрической оболочки с контурными подкрепляющими стержнями // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 4. – С. 395–428.

**For citation:** Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. The axisymmetric problems of geometrically nonlinear deformation and stability of a sandwich cylindrical shell with contour reinforcing beams. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 4, pp. 395–428. (In Russian)