УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2019, Т. 161, кн. 1 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 66–74 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 532.546 doi: 10.26907/2541-7746.2019.1.66-74

ФИЛЬТРАЦИОННАЯ КОНСОЛИДАЦИЯ ПРИ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГОГО ТЕЛА ПОД НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ

Ф.М. Кадыров, А.В. Костерин, Э.В. Скворцов

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Рассматривается процесс фильтрационной консолидации упругого насыщенного тела под действием мгновенно приложенной к его поверхности нормальной нагрузки. К известной схеме пространственной консолидации добавляется равенство, полученное с использованием условий совместности деформаций. Показано, что сумма эффективных нормальных напряжений удовлетворяет уравнению теплопроводности и при известных граничных условиях может быть найдена как решение соответствующей краевой задачи. Вводится связанная с давлением вспомогательная функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа. Граничное условие для неё определяется граничным условием для указанной выше суммы. Предложенная схема исследования консолидации упругого тела иллюстрируется на примере равномерного нормального нагружения поверхности упругого пористого шара. В аналитическом виде найдены давление жидкости, полные и эффективные нормальные напряжения скелета, смещения точек шара и его поверхности в процессе консолидации. Показано, что давление жидкости в каждой фиксированной точке внутри шара падает с ростом времени.

Ключевые слова: консолидация, упругое тело, нагрузка, давление

Введение

Становление и развитие теории фильтрационной консолидации связано с работами [1–4] и др. Общая математическая модель консолидации и аналитические методы ее исследования были предложены в [5–7]. Анализ уравнений механики насыщенных пористых сред с позиций механики сплошных сред проведен в [8, 9]. По исследуемой тематике выполнены многочисленные работы, в частности описанные в [10, 11]. Достаточно полная библиография приведена в [12, 13]. В [14] в предположении, что выполняется гипотеза Терцаги [1], согласно которой полное напряженное состояние в системе жидкость – порода не зависит от времени, исследована консолидация упругого полупространства под осесимметричной нагрузкой. В работе [15] предложена математическая модель консолидации в условиях плоской деформации упругого полупространства под действием произвольной вертикальной нагрузки на его поверхность без использования вышеупомянутой гипотезы, но с привлечением уравнения совместности. Модель позволила получить аналитические представления для давления жидкости и полных нормальных напряжений упругого пористого скелета.

В настоящей работе подход, примененный в [15], реализован для развития соответствующей математической модели консолидации упругого насыщенного пористого тела под действием произвольной нормальной нагрузки на его поверхность. В качестве примера изучена консолидация упругого насыщенного пористого шара, на поверхности которого равномерно распределена нормальная нагрузка. Найдены давление жидкости, полные напряжения скелета и смещения поверхности шара как функции радиальной координаты и времени.

1. Математическая модель консолидации упругого насыщенного тела

Рассматривается процесс фильтрационной консолидации насыщенного жидкостью упругого пористого односвязного тела, находящегося под действием мгновенно приложенной нормальной нагрузки на его поверхность. Пусть x_i, $i = 1, 2, 3$, – координаты точки тела, t – время, σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} – компоненты полных напряжений, $p = p(x_i, t)$ – давление жидкости. Полные напряжения в скелете тела представляются соотношением

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^f - p\delta_{ij}, \tag{1}$$

где σ_{ij}^f – эффективные напряжения [1, 8], δ_{ij} – символ Кронекера.

Считается, что сжимаемостью скелета и жидкости можно пренебречь и что объемные деформации скелета связаны с переупаковкой зерен.

Математическая модель консолидации включает в себя полное уравнение движения (квазиравновесия) фаз, уравнения неразрывности (баланса масс), закон фильтрации, реологическое соотношение для пористого скелета, граничные и начальные условия.

В результате выделения из полного уравнения движения фаз его статической компоненты это уравнение представляется в виде [16, 17]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^f}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0. \tag{2}$$

Условие неразрывности процесса консолидации выглядит следующим образом [17]:

$$\operatorname{div} \mathbf{q} + \frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0, \tag{3}$$

где $\mathbf{q} = m(\mathbf{v} - \partial \mathbf{u}/\partial t)$ – скорость фильтрации, $\Theta = \operatorname{div} \mathbf{u}$ – объемная деформация скелета, m – пористость скелета, $\mathbf{v}$ и $\partial \mathbf{u}/\partial t$ – среднефазовые макроскорости жидкой и твердой фазы соответственно, $\mathbf{u}$ – смещения точек скелета.

Закон фильтрации принимается линейным (закон Дарси)

$$\mathbf{q} = -\frac{k}{\mu_0} \nabla p, \tag{4}$$

где $k = \mathrm{const}$ – проницаемость скелета, μ_0 – вязкость жидкости.

Реологическое соотношение для пористого скелета (закон упругости) представляется в виде [9]

$$\sigma_{ij}^f = \lambda \Theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \tag{5}$$

где

$$\varepsilon_{ij} = (1/2)\left(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i\right)$$

есть тензор макродеформаций, λ, μ – коэффициенты Ламе упругой пористой матрицы.

В момент времени $t = 0$ к поверхности тела S прикладывается нормальная нагрузка

$$\Pi = \Pi(x_1, x_2, x_3), \quad x_i \subset S.$$

При этом полагаем, что согласно [2, 4] эффективные напряжения равны нулю, скелет абсолютно несжимаем, и вся нагрузка воспринимается жидкостью.

На поверхности S для давления принимается условие «высокопроницаемого поршня» [9]

$$p(x_1, x_2, x_3, t) = 0, \quad x_i \subset S. \tag{6}$$

Пусть

$$J = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \quad J^f = \sigma_{11}^f + \sigma_{22}^f + \sigma_{33}^f, \tag{7}$$

где J – первый инвариант напряжений [16]. Из формул (1), (7) вытекает связь

$$p = \frac{1}{3}(J^f - J). \tag{8}$$

Из соотношений (3), (5) следует, что при $t \geq 0$

$$\frac{\partial J^f}{\partial t} = \frac{Ek}{(1-2\nu)\mu_0}\,\Delta p, \tag{9}$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Известные в теории упругости условия совместности деформаций приводят к равенству [18]:

$$\Delta p = \frac{1-\nu}{1+\nu}\,\Delta J^f, \tag{10}$$

которое добавляется к уравнениям и соотношениям (1)–(6) математической модели консолидации насыщенного пористого тела.

Из (9), (10) вытекает уравнение

$$\frac{\partial J^f}{\partial t} = \varkappa \Delta J^f, \tag{11}$$

где

$$\varkappa = \frac{k}{\mu_0}\frac{1-\nu}{1-\nu-2\nu^2}\,E. \tag{12}$$

Начальное условие для функции J^f имеет вид [14]

$$J^f(x_1, x_2, x_3, 0) = 0. \tag{13}$$

На поверхности тела выполняется условие (6) и $J^f = J$. Таким образом, граничное условие для функции J^f совпадает с граничным условием для функции J.

Введем вспомогательную функцию

$$F = p - \frac{1-\nu}{1+\nu}\,J^f, \tag{14}$$

которая в соответствии с (10) удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta F = 0. \tag{15}$$

Задание граничного условия для функции J с учетом формул (6), (8), (14) определяет граничное условие для функции F.

2. Консолидация упругого насыщенного шара под равномерной нормальной нагрузкой

Описанная в разд. 1 схема исследования процесса консолидации упругого насыщенного жидкостью тела под действием нормальной нагрузки на его поверхность используется ниже для случая тела, представляющего собой шар, к поверхности которого в момент времени $t = 0$ прикладывается равномерная нагрузка Π.

Отметим, что в работе [19] получено решение задачи консолидации для шара на основании теории М. Био [5].

Введем сферические координаты r, φ, θ. В центре шара $r = 0$, радиус шара равен R.

Пренебрегая объемом пор, выпишем известное решение задачи о деформации ненасыщенного упругого шара под действием той же нагрузки [20]

$$\sigma_r(r) = \sigma_\varphi(r) = \sigma_\theta(r) = -\Pi, \tag{16}$$

$$u_r(r) = -\frac{\Pi(1-2\nu)r}{E}. \tag{17}$$

Здесь σ_r,σ_φ, σ_θ – нормальные напряжения, u_r – нормальные смещения точек скелета. Представим нормальные напряжения в виде

$$\sigma_r = \sigma_r^f - p, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\varphi^f - p, \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^f - p,$$

где σ_r^f,σ_φ^f, σ_θ^f – эффективные напряжения в скелете шара.

Сумма эффективных нормальных напряжений $J^f = \sigma_r^f + \sigma_\varphi^f + \sigma_\theta^f$ есть первый инвариант напряжений, он связан с объемной деформацией скелета $\Theta = \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_\theta$ соотношением

$$J^f = \frac{E}{1-2\nu}\,\Theta. \tag{18}$$

При этом известно [21], что

$$\Theta = \frac{1}{r^2}\,\frac{d}{dr}(r^2 u_r). \tag{19}$$

Начальное условие для функции J^f (13) в данном случае имеет вид

$$J^f(r,0) = 0. \tag{20}$$

Граничное условие для J^f вытекает из условий (6), (8), (16)

$$J^f(R,t) = -3\Pi. \tag{21}$$

Краевая задача (11), (12), (20), (21) для шара имеет следующее решение [22]:

$$J^f(r,t) = -3\Pi\left[1 - \frac{2R}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi n r}{R}\exp\left(-\frac{\varkappa\pi^2 n^2 t}{R^2}\right)\right]. \tag{22}$$

Граничное условие для функции $F = F(r)$, удовлетворяющей уравнению (15), в соответствии с (6), (8), (21) имеет вид

$$F(R) = \frac{3\Pi(1-\nu)}{1+\nu}. \tag{23}$$

Краевая задача (15), (23) для шара имеет тривиальное решение

$$F(r) = \frac{3\Pi(1-\nu)}{1+\nu}. \tag{24}$$

Из (14), (22), (24) находим давление жидкости $p = p(r,t)$. Пусть

$$T = \frac{\varkappa\pi^2 t}{R^2}, \quad P(r,T) = \frac{p(r,t)}{\Pi}.$$

Тогда
$$P(r,T)=\frac{6(1-\nu)}{1+\nu}\frac{R}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi nr}{R}\exp(-Tn^2). \tag{25}$$

Согласно (25) давление в центре шара есть

$$P(0,T)=\frac{6(1-\nu)}{1+\nu}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\exp(-Tn^2),\quad T>0.$$

Из соотношений (8), (22) определяется сумма полных нормальных напряжений

$$J(r,T)=-3\Pi\left[1+\frac{4(1-2\nu)}{1+\nu}\frac{R}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi nr}{R}\exp(-Tn^2)\right]$$

и нормальные напряжения

$$\sigma_r(r,T)=\sigma_\varphi(r,T)=\sigma_\theta(r,T)=\frac{J(r,T)}{3}.$$

Далее найдем нормальное смещение $u_r=u_r(r,T)$. Из (18), (19) следует уравнение
$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2u_r)=\frac{1-2\nu}{E}J^f(r,T), \tag{26}$$
где J^f представлена формулой (22).

Функция $u_r=u_r(r,T)$, удовлетворяющая уравнению (26), (22) и условию $u_r(0,T)=0$, имеет вид

$$u_r(r,T)=-\frac{\Pi(1-2\nu)}{E}\times$$
$$\times\left(r-\frac{6R^3}{\pi^3r^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{\sin(\pi nr/R)}{n^3}-\frac{\pi r}{R}\frac{\cos(\pi nr/R)}{n^2}\right]\exp(-Tn^2)\right).$$

При этом
$$\lim_{T\to\infty}u_r(r,T)=-\frac{\Pi(1-2\nu)r}{E},$$
что согласуется с формулой (17).

Введем безразмерные величины

$$U_r(r,T)=\frac{Eu_r(r,T)}{\Pi R},\quad f(T)=1-\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\exp(-Tn^2).$$

Безразмерное смещение точек поверхности шара, на которой $r=R$, описывается формулой
$$U_r(T)=-(1-2\nu)f(T).$$

3. Результаты расчетов

На основании формул (22), (25), полученных в разд. 2, проведены численные расчеты распределения давления и суммы эффективных нормальных напряжений в шаре. На рис. 1, где $\overline{r}=r/R$, $\Sigma^f=J^f/\Pi$, представлены результаты расчетов при $\nu=0.25$.

При $t=0$ $J^f=0$, $\nu=1/2$, и из (14), (24) следует, что $P(r,0)=1$.

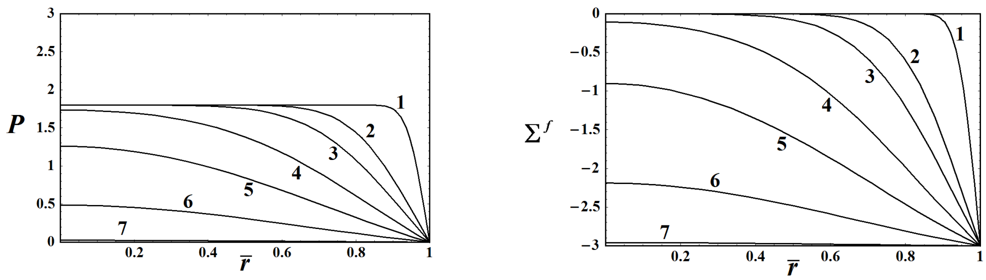

Рис. 1. Давление жидкости $P(\bar{r},T)$ и сумма эффективных нормальных напряжений $\Sigma^f(\bar{r},T)$ при $\nu = 0.25$: 1) $T = 0.01$, 2) $T = 0.1$, 3) $T = 0.2$, 4) $T = 0.5$, 5) $T = 1$, 6) $T = 2$, 7) $T = 5$

С началом процесса фильтрации (условно при $t = 0+0$) величина J^f близка к нулю, и давление мгновенно повышается до уровня, рассчитываемого по формуле (24) с отвечающим упругой среде коэффициентом Пуассона.

В соответствии с (25) с ростом времени давление жидкости падает, стремясь к нулю, при этом нагрузка постепенно передается на скелет. Следует отметить, что в решении, полученном в работе [19] на основании модели М. Био, давление жидкости в центре шара с течением времени сначала растет, затем падает.

Заключение

Показано, что исследование процесса консолидации упругого насыщенного жидкостью тела под действием мгновенно приложенной к его поверхности нормальной нагрузки сводится к решению уравнений теплопроводности и Лапласа при соответствующих начальном и граничных условиях. При равномерном нагружении поверхности шара найдены зависящие от времени давление жидкости, полные нормальные напряжения и смещение поверхности шара.

Литература

1. *Терцаги К.* Теория механики грунтов. – М.: Госстройиздат, 1961. – 507 с.
2. *Герсеванов Н.М.* Основы динамики грунтовой массы. – М.; Л.: Госстройиздат, 1937. – 241 с.
3. *Флорин В.А.* Теория уплотнения земляных масс. – М.: Госстройиздат, 1948. – 284 с.
4. *Флорин В.А.* Основы механики грунтов. Т. 1. – М.; Л.: Госстройиздат, 1959. – 357 с.
5. *Biot M.A.* General theory of three-dimensional consolidation // J. Appl. Phys. – 1941. – V. 12, No 2. – P. 155–164. – doi: 10.1063/1.1712886.
6. *Biot M.A.* Consolidation settlement under rectangular load distribution // J. Appl. Phys. – 1941. – V. 12, No 5. – P. 426–430. – doi: 10.1063/1.1712921.
7. *Biot M.A.* General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous materials // J. Appl. Mech. – 1956. – V. 23, No 1. – P. 91–96.
8. *Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г. А.* Механика насыщенных пористых сред. – М.: Недра, 1970. – 335 с.
9. *Николаевский В.Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. – М.: Недра, 1984. – 232 с.
10. *Bear J., Corapcioglu M.Y.* Fundamentals of transport phenomena in porous media. – Dordrecht: Martinus Nijhoff Publ., 1984. – 1003 p.

11. *Coussy O.* Mechanics and physics of porous solids. – London: John Wiley and Sons, 2010. – 300 p.
12. *Shiffman R.L.* A bibliography of consolidation // Bear J., Corapcioglu M.Y. Fundamentals of transport phenomena in porous media. – Dordrecht: Martinus Nijhoff Publ., 1984. – P. 617–669.
13. *Selvadurai A.P.S.* The analytical method in geomechanics // Appl. Mech. Rev. – 2007. – V. 60. – P. 87–106. – doi: 10.1115/1.2730845.
14. *Костерин А.В., Скворцов Э.В.* Фильтрационная консолидация упругого полупространства под осесимметричной нагрузкой // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2014. – № 5. – С. 74–80.
15. *Костерин А.В., Скворцов Э.В.* Фильтрационная консолидация при плоской деформации упругого полупространства // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2018. – № 2. – С. 99–104. – doi: 10.7868/S0568528118020093.
16. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
17. *Егоров А.Г., Костерин А.В., Скворцов Э.В.* Консолидация и акустические волны в насыщенных пористых средах. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. – 102 с.
18. *Detornay E., Cheng A.H.-D.* Fundamentals of poroelasticity // Hudson J.A. Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects. V. 2 – Oxford, UK: Pergamon Press, 1993. – P. 113–171.
19. *Cryer C.W.* A comparison of the three-dimensional consolidation theories of Biot and Terzaghi // Q. J. Mech. Appl. Math. – 1963. – V. 16, No. 4. – P. 401–412. – doi: 10.1093/qjmam/16.4.401.
20. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. – М.: Госиздат техн.-теор. лит., 1955. – 491 с.
21. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
22. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

Поступила в редакцию
13.10.18

Кадыров Фархад Маратович, соискатель кафедры аэрогидромеханики
Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *Farhad1987@mail.ru*

Костерин Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры аэрогидромеханики
Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *Alexander.Kosterin@kpfu.ru*

Скворцов Эдуард Викторович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики
Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *Eduard.Scvortsov@mail.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)**

2019, vol. 161, no. 1, pp. 66–74

doi: 10.26907/2541-7746.2019.1.66-74

Seepage Consolidation during Elastic Body Deformation under Normal Load

*F.M. Kadyrov**, *A.V. Kosterin***, *E.V. Skvortsov****

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia

E-mail: **Farhad1987@mail.ru*, ***Alexander.Kosterin@kpfu.ru*, ****Eduard.Scvortsov@mail.ru*

Received October 13, 2018

Abstract

The process of seepage consolidation of an elastic saturated body under the normal load that is instantly applied to its surface has been considered. An equality obtained using the conditions of compatibility of deformations has been added to the well-known spatial consolidation scheme. It has been shown that the sum of effective normal stresses satisfies the heat equation and can be found as a solution to the corresponding boundary value problem. A pressure-related auxiliary function that satisfies the Laplace equation has been introduced. The boundary condition for it is determined by the boundary condition for the above sum. The proposed scheme for studying the consolidation of an elastic body has been illustrated by the example of uniform normal loading on the surface of an elastic porous sphere. In the analytical form, the pressure of the fluid, the total and effective normal stresses of the skeleton, the displacement of points of the sphere and its surface in the process of consolidation have been found. It has been demonstrated that the pressure of the fluid at each fixed point inside the sphere decreases with increasing time.

Keywords: consolidation, elastic body, load, pressure

Figure Captions

Fig. 1. The fluid pressure $P(\overline{r}, T)$ and the sum of effective and normal stresses $\Sigma^f(\overline{r}, T)$ at $\nu = 0.25$: 1) $T = 0.01$, 2) $T = 0.1$, 3) $T = 0.2$, 4) $T = 0.5$, 5) $T = 1$, 6) $T = 2$, 7) $T = 5$.

References

1. Tertsagi K. *Teoriya mekhaniki gruntov* [Soil Mechanics Theory]. Moscow, Gosstroiizdat, 1961. 507 p. (In Russian)
2. Gersevanov N.M. *Osnovy dinamiki gruntovoi massy* [Principles of Soil Dynamics]. Moscow, Leningrad, Gosstroiizdat, 1937. 241 p. (In Russian)
3. Florin V.A. *Teoriya uplotneniya zemlyanykh mass* [Theory of Soil Consolidation]. Moscow, Gosstroiizdat, 1948. 248 p. (In Russian)
4. Florin V.A. *Osnovy mekhaniki gruntov* [Principles of Soil Mechanics]. Vol. 1. Moscow, Leningrad, Gosstroiizdat, 1959. 357 p. (In Russian)
5. Biot M.A. General theory of three-dimensional consolidation. *J. Appl. Phys.*, 1941, vol. 12, no. 2, pp. 155–164. doi: 10.1063/1.1712886.

6. Biot M.A. Consolidation settlement under rectangular load distribution. *J. Appl. Phys.*, 1941, vol. 12, no. 5, pp. 426–430. doi: 10.1063/1.1712921.
7. Biot M.A. General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous materials. *J. Appl. Mech.*, 1956, vol. 23, no. 1, pp. 91–96.
8. Nikolaevskii V.N., Basniev K.S., Gorbunov A.T., Zotov G.A. *Mekhanika nasyshchennykh poristykh sred* [The Mechanics of Saturated Porous Media]. Moscow, Nedra, 1970. 335 p. (In Russian)
9. Nikolaevskii V.N. *Mekhanika poristykh i treshchinovatykh sred* [Mechanics of Porous and Fissured Media]. Moscow, Nedra, 1984. 232 p. (In Russian)
10. Bear J., Corapcioglu M.Y. *Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media*. Dordrecht, Martinus Nijhoff Publ., 1984. 1003 p.
11. Coussy O. *Mechanics and Physics of Porous Solids*. London, John Wiley and Sons, 2010. 300 p.
12. Shiffman R.L. A bibliography of consolidation. In: Bear J., Corapcioglu M.Y. *Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media*. Dordrecht, Martinus Nijhoff Publ., 1984, pp. 617–669.
13. Selvadurai A.P.S. The analytical method in geomechanics. *Appl. Mech. Rev.*, 2007, vol. 60, pp. 87–106. doi: 10.1115/1.2730845.
14. Kosterin A.V., Skvortsov E.V. Seepage consolidation of elastic half-space under an axisymmetric load. *Fluid Dyn.*, 2014, vol. 49, no. 5, pp. 627–633. doi: 10.1134/S0015462814050093.
15. Kosterin A.V., Skvortsov E.V. Seepage consolidation under plane deformation of elastic half-space. *Fluid Dyn.*, 2018, vol. 53, no. 2, pp. 270–276. doi: 10.1134/S0015462818020106.
16. Timoshenko S.P., Goodier J.N. *Theory of Elasticity*. New York, McGraw-Hill, 1951. 506 p.
17. Egorov A.G., Kosterin A.V., Skvortsov E.V., *Konsolidatsiya i akusticheskie volny v nasyshchennykh poristykh sredakh* [Consolidation and Acoustic Waves in Saturated Porous Media]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1990. 102 p. (In Russian)
18. Detornay E., Cheng A.H.-D. Fundamentals of poroelasticity. In: Hudson J.A. *Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects*. Vol. 2. Oxford, Pergamon Press, 1993, pp. 113–171.
19. Cryer C.W. A comparison of the three-dimensional consolidation theories of Biot and Terzaghi. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 1963, vol. 16, no. 4, pp. 401–412. doi: 10.1093/qjmam/16.4.401.
20. Lure A.I. *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti* [Spatial Problems of the Theory of Elasticity]. Moscow, Gosizdat. Tekh.-Teor. Lit., 1955. 491 p. (In Russian)
21. Novatskii V. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elastisity]. Moscow, Mir, 1975. 872 p. (In Russian)
22. Polyanin A.D. *Spravochnik po lineinym uravneniyam matematicheskoi fiziki* [Handbook of Linear Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Fizmatlit, 2001. 576 p. (In Russian)

***Для цитирования*:** *Кадыров Ф.М., Костерин А.В., Скворцов Э.В.* Фильтрационная консолидация при деформации упругого тела под нормальной нагрузкой // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2019. – Т. 161, кн. 1. – С. 66–74. – doi: 10.26907/2541-7746.2019.1.66-74.

***For citation*:** Kadyrov F.M., Kosterin A.V., Skvortsov E.V. Seepage consolidation during elastic body deformation under normal load. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 161, no. 1, pp. 66–74. doi: 10.26907/2541-7746.2019.1.66-74. (In Russian)