

УДК 532.546

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О СТАЦИОНАРНОМ ПАЛЬЦЕ В ЛОТКЕ ХЕЛЕ-ШОУ

М.М. Алимов

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Классическая постановка задачи о продвижении стационарного пальца в щелевом лотке, учитывающая действие капиллярных сил на межфазной поверхности, характеризуется сингулярностью решения в бесконечно удаленной точке, в которой лежит основание пальца. Наличие такой сингулярности затрудняет численный анализ задачи настолько, что ее корректного численного решения до сих пор не получено, хотя задача поставлена около 60 лет назад. В настоящей работе предложена новая модифицированная постановка задачи, основанная на постулате о конечности расстояния, на котором полностью формируется палец. На примере идеализированного случая пренебрежимо малых капиллярных сил показано, что в пределе, когда указанное расстояние в модифицированной задаче стремится к бесконечности, ее решение стремится к классическому решению задачи. Основным достоинством новой постановки является исключение из анализа порождающей сингулярности бесконечно удаленной точки. Это делает модифицированную постановку задачи перспективной с точки зрения ее обобщения на случай действия капиллярных сил и возможности ее корректного численного анализа.

Ключевые слова: течение Хеле-Шоу, задачи со свободной границей, точное решение, принцип минимальной скорости диссипации энергии

Введение

Задача пальцеобразования в лотке Хеле-Шоу типа канала является одной из широко известных задач прикладной математики и механики. Рассмотренная впервые в работах [1, 2] она не только породила интерес к собственно течениям Хеле-Шоу, но и способствовала, например, обособлению «проблемы выбора шаблона» в отдельный раздел теории многофазных процессов [3]. Вместе с тем основная проблема, поставленная в работах [1, 2]: почему при учете действия капиллярных сил на межфазной границе решение задачи о пальце единственно, а в случае пренебрежимо малых капиллярных сил имеется целое семейство решений, получила объяснение лишь асимптотическими методами анализа, причем это объяснение весьма сложное [4].

Что касается численного анализа проблемы, то по сути работа [2] остается единственной опубликованной попыткой его проведения. Формально считается, что это попытка удачна, поскольку предложенный авторами [2] численный метод сам отбирает единственное решение. На самом деле и численный, и асимптотический анализы, проведенные в [2], не вполне корректны, поскольку не учитывают сингулярность решения в бесконечно удаленной точке, в которой лежит основание пальца. Этот момент был почти сразу же замечен в последующих за [2] работах [5–7], но почему-то привел их авторов к выводу об ошибочности только асимптотического анализа [2] и стал отправной точкой для новых асимптотических исследований, приведших к результатам [4].

В то же время корректного численного анализа с учетом сингулярности решения в бесконечно удаленной точке так и не было проведено, хотя сам сингулярный член решения был аддитивно выделен и структура его была аналитически определена [8]. По мнению автора, это свидетельствует о значительных трудностях реализации корректного численного анализа задачи о продвижении стационарного пальца с учетом действия капиллярных сил в классической постановке. Поэтому предлагается изменить постановку задачи с целью исключить подобную сингулярность, сделав, например так, чтобы из постановки задачи вообще исчезла бесконечно удаленная точка, в которой лежит основание пальца.

Ниже приводится такая модифицированная постановка задачи в идеализированном случае пренебрежимо малых капиллярных сил и обсуждаются некоторые ее свойства, в частности, возможность предельного перехода решения задачи в модифицированной постановке к классическому решению задачи. Это – важный момент, предваряющий численный анализ задачи с учетом капиллярных сил, поскольку известные примеры успешных численных решений подобных задач, например задачи Хеле-Шоу о продвигающемся пузыре [9, 10], аддитивно включают в себя идеализированный случай.

1. Классическое решение идеализированной задачи Хеле-Шоу о продвижении симметричного пальца

Пусть лоток Хеле-Шоу типа канала первоначально заполнен вязкой жидкостью. Слева он соединен с атмосферой, а справа подключен к насосу, который начинает отбирать жидкость с определенным расходом. Через продолжительный отрезок времени, включающий отработку переходных режимов, устанавливается некоторая симметричная конфигурация Γ пальца.

На рис. 1, *a* представлен элемент симметрии течения: область $\Omega = ABC$, где точки *A* и *B* обозначают бесконечность справа и слева соответственно.

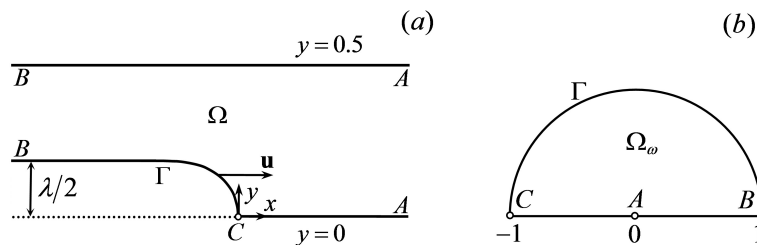


Рис. 1. Верхняя половина области течения в физической плоскости z (*a*) и во вспомогательной плоскости ω (*b*) для классической постановки задачи

За характерную длину можно выбрать ширину канала, а за характерную скорость – скорость течения жидкости на бесконечности справа. Тогда можно перейти к безразмерным переменным: канал будет иметь ширину, равную 1, скорость жидкости на бесконечности справа также будет равна 1, ширина пальца будет характеризоваться безразмерной величиной λ , а скорость его продвижения – безразмерной величиной $U = |\mathbf{u}|$ (рис. 1, *a*). Ширина пальца λ и скорость его продвижения U связаны между собой балансовым соотношением $U\lambda = 1$, причем в силу очевидного неравенства $\lambda < 1$ следует, что $U > 1$ [1].

Учитывая потенциальность течений Хеле-Шоу, можно ввести комплексный потенциал течения $W = \phi + i\psi$ [11]. Предполагая, что имеет место случай пренебрежимо малых капиллярных сил, можно выписать безразмерную постановку

идеализированной задачи для стационарного пальца в лотке Хеле-Шоу [1]

$$\begin{aligned}
 \Omega : \quad \Delta\phi &= 0; \\
 A : \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} &= 1; \\
 AB, AC : \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} &= 0; \\
 \Gamma : \quad \phi &= 0, \quad \psi = Uy.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Отметим, что межфазная граница $\Gamma \equiv BD$ свободна, поэтому на ней выписаны два граничных условия: первое – динамическое, второе – кинематическое (или условие материальности межфазной границы).

В работе [1] решение задачи (1) было построено методом разделения переменных. Вместо него воспроизведем решение [12] более эффективным методом годографа скорости. Метод годографа скорости для задач со свободной границей сводится к введению вспомогательной параметрической плоскости комплексного переменного канонического вида, скажем ω , и к восстановлению годографа скорости или комплексных потенциалов как функций ω [13]. Особенности применения этого метода к задачам Хеле-Шоу отмечены в работах [9, 14].

Выберем декартову систему координат X, Y так, что стенкам канала отвечают прямые $Y = \pm 0.5$. Она неподвижна относительно стенок канала и представляет собой абсолютную систему отсчета. Введем также относительную систему отсчета x, y , которая в определенный момент времени совпадает с X, Y , но связана, скажем, с верхушкой пальца и движется вместе с ним со скоростью U (рис. 1, *a*). Помимо физических плоскостей X, Y и x, y будем использовать комплексные плоскости $Z = X + iY$ и $z = x + iy$, которые связаны между собой простым соотношением

$$Z = z + Ut.$$

Относительное движение жидкости также потенциально, его комплексный потенциал обозначим через $W_{\text{rel}} = \phi_{\text{rel}} + i\psi_{\text{rel}}$. Комплексные потенциалы абсолютного и относительного движений связаны дифференциальным соотношением [9]

$$\frac{dW}{dz} - \frac{dW_{\text{rel}}}{dz} = U. \tag{2}$$

Поскольку скорость абсолютного течения на бесконечности справа и слева известны, соотношение (2) позволяет определить и скорости относительного течения на бесконечности справа и слева

$$\begin{aligned}
 A : \quad \frac{dW}{dz} \Big|_{x \rightarrow \infty} &= 1, \quad \frac{dW_{\text{rel}}}{dz} \Big|_{x \rightarrow \infty} = 1 - U; \\
 B : \quad \frac{dW}{dz} \Big|_{x \rightarrow -\infty} &= 0, \quad \frac{dW_{\text{rel}}}{dz} \Big|_{x \rightarrow -\infty} = -U.
 \end{aligned} \tag{3}$$

В качестве параметрической плоскости ω выберем плоскость, в которой области течения отвечает верхняя половина единичного круга (рис. 1, *b*). Решение задачи $z(\omega)$ ищется как конформное отображение $\omega \rightarrow z$, нормированное заданием соответствия трех граничных точек A, B и C , которым в плоскости ζ отвечают точки $\zeta = 0, \zeta = 1$ и $\zeta = -1$.

Сама функция $z(\omega)$ может быть представлена в аддитивном виде

$$z(\omega) = U^{-1} [W(\omega) - W_{\text{rel}}(\omega)], \tag{4}$$

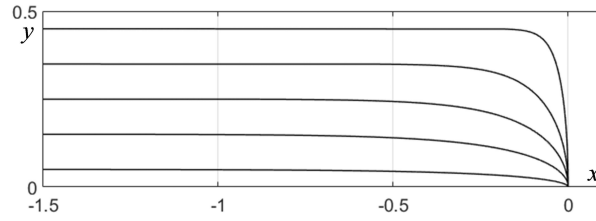


Рис. 2. Конфигурация пальцев Саффмена и Тэйлора толщиной от $\lambda = 0.1$ до $\lambda = 0.9$ с шагом 0.2

полученном интегрированием соотношения (2) с точностью до некоторой константы интегрирования.

Таким образом, задача сводится к построению двух функций – комплексных потенциалов $W(\omega)$, $W_{rel}(\omega)$. Анализируя особенности и граничные условия функций $W(\omega)$, $W_{rel}(\omega)$, можно аналитически восстановить их замкнутый вид [12]

$$W(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \ln \omega,$$

$$W_{rel}(\omega) = \frac{U-1}{2\pi} \ln \omega - \frac{U-1}{\pi} \ln(\omega-1).$$

В результате решение задачи (1) в терминах функции $z(\omega)$ имеет вид

$$z(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \ln \omega + \frac{U-1}{\pi U} \ln(\omega-1) + i \frac{2-U}{2U}, \tag{5}$$

где последнее слагаемое (константа интегрирования) добавлено, чтобы центральная линия канала AC соответствовала оси абсцисс $y = 0$ при использовании в качестве логарифма его однозначной ветви с аргументом, изменяющимся в пределах от $-\pi$ до π .

На границе Γ в плоскости ω имеем $\omega = \exp(i\sigma)$. Тогда из формулы (5) вытекает граничное соотношение

$$\Gamma: z_{\Gamma}(\sigma) = -\frac{i\sigma}{2\pi} + \frac{U-1}{\pi U} \ln[\exp(i\sigma) - 1] + i \frac{2-U}{2U}.$$

Разделяя в нем вещественную и мнимую части, получим параметрическое уравнение контура пальца Γ в физической плоскости.

Таким образом, в идеализированном случае пренебрежимо малых капиллярных сил, когда эксперимент дает единственное решение – палец толщиной 0.5, продвигающийся со скоростью $U = 2$, задача (1) дает целое семейство решений (5) с параметром семейства $U > 1$, которое называется семейством Саффмена и Тэйлора. На рис. 2 представлены примеры конфигурации пальцев из этого семейства толщиной $\lambda = U^{-1}$ от $\lambda = 0.1$ до $\lambda = 0.9$ с шагом 0.2 [1].

Заметим, что для любого пальца из семейства (5) размеры его поперечного сечения, полученного в результате проведения прямой $x = x_0 \leq 0$, монотонно меняются от минимального $\lambda = 0$ (при $x_0 = 0$) до максимального $\lambda = U^{-1}$ (при $x_0 \rightarrow -\infty$). Таким образом, для семейства пальцев Саффмена и Тэйлора глубина формирования пальца, строго говоря, будет бесконечной.

2. Модифицированная постановка идеализированной задачи Хеле-Шоу о продвижении симметричного пальца и ее решение

Предположим, что стационарный палец, продвигающийся с постоянной скоростью U , с помощью сечения $B_1B_2: x = -h$ можно разбить на две части: головную

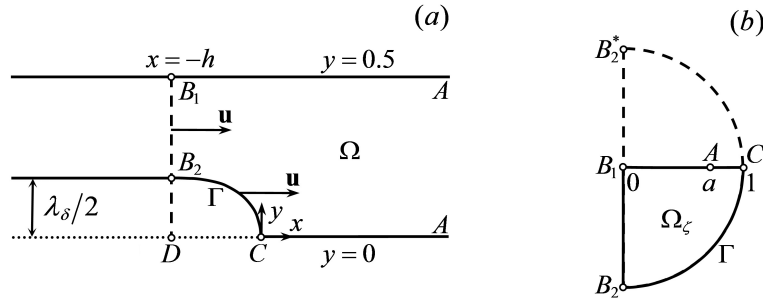


Рис. 3. Верхняя половина области течения в физической плоскости z (а) и во вспомогательной плоскости ζ (б) для модифицированной постановки задачи

часть с границей $\Gamma = B_2C$, на которой происходит собственно формирование пальца, и хвостовую часть, которая имеет неизменную толщину λ_δ (рис. 3а). При этом стационарность конфигурации $\Gamma = B_2C$ означает, что граница B_1B_2 продвигается с той же скоростью U , что и сам палец.

Величина h – глубина формирования пальца – выступает дополнительным параметром задачи. Постулировать ограниченность h можно, если в области течения $\Omega = AB_1B_2C$ угол при вершине B_2 будет прямым, а скорость течения в этой точке будет равняться нулю, то есть $\nabla\phi = 0$ в точке B_2 . Это можно обеспечить потребовав, например, выполнения на границе B_1B_2 такого же условия $\phi = 0$, что и на межфазной границе Γ .

Таким образом, предлагается следующая модифицированная постановка идеализированной задачи для стационарного пальца в лотке Хеле-Шоу:

$$\begin{aligned}
 \Omega : \quad & \Delta\phi = 0; \\
 A : \quad & \frac{\partial\phi}{\partial x} = 1; \\
 AB, AC : \quad & \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0; \\
 \Gamma : \quad & \phi = 0, \quad \psi = Uy; \\
 B_1B_2 : \quad & x = -h, \quad \phi = 0.
 \end{aligned} \tag{6}$$

От классической постановки (1) она отличается добавлением еще одной идеализации – участка границы B_1B_2 , которое получено сечением $x = -h$ и на котором ставится искусственное условие $\phi = 0$. Если выбрать аналогичное сечение $x = -h$ в классическом решении задачи (1), то в нижней его точке – аналоге точки B_2 – также будет выполняться условие $\phi = 0$, но на остальной части сечения величина ϕ будет хоть и малой, но, все-таки, положительной.

В результате на этапе качественного анализа постановки (6) можно утверждать, что для отвечающего решению задачи (6) пальца, продвигающегося со скоростью U , его толщина λ_δ будет меньше величины $\lambda = U^{-1}$:

$$\lambda_\delta < \lambda = U^{-1}. \tag{7}$$

Действительно, из второго условия на Γ задачи (6) следует, что

$$\psi_C = 0, \quad \psi_{B_2} = 0.5U\lambda_\delta. \tag{8}$$

С другой стороны, из условия несжимаемости жидкости необходимо следует, что

$$\psi_{B_1} = 0.5. \tag{9}$$

Обозначим

$$\delta = 2(\psi_{B_1} - \psi_{B_2}). \tag{10}$$

Поскольку на границе B_1B_2 уже наложено условие $\phi = 0$ (см. задачу (6)), на ней нельзя требовать дополнительного условия равенства нулю суммарного потока, то есть равенства $\delta = 0$. Более того, в силу известных качественных свойств уравнения Лапласа [15] необходимо выполняется неравенство $(\psi_{B_1} - \psi_{B_2}) > 0$, из которого при учете выражений (8)–(10) следует и неравенство (7).

Используя формулы (8)–(10), найдем связь между величинами δ и λ_δ

$$\delta = \frac{\lambda - \lambda_\delta}{\lambda} \Rightarrow \lambda_\delta = \lambda(1 - \delta). \tag{11}$$

Из нее следует, что δ – это по сути относительное изменение толщины пальца λ_δ , отвечающего модифицированной постановке (6), по сравнению с толщиной пальца λ , отвечающего классической постановке (1), при одной и той же скорости продвижения U этих пальцев.

Таким образом, форма пальца, отвечающая модифицированной постановке, претерпевает некоторое изменение по отношению к форме пальца, отвечающей классической постановке. В то же время очевидно, что такое изменение контролируется: чем большим по величине выбрать дополнительный параметр h в постановке (6), тем меньше будет такое изменение и, в частности, тем меньше будет величина δ , определяющая разницу между λ_δ и λ . Чтобы убедиться в этом, построим решение задачи в модифицированной постановке (6) тем же методом годографа скорости.

В качестве параметрической плоскости выберем плоскость ζ , в которой области течения отвечает нижний правый квадрант единичного круга (рис. 3, *b*). Решение задачи $z(\zeta)$ ищется как конформное отображение $\zeta \rightarrow z$, нормированное заданием соответствия трех граничных точек C , B_1 и B_2 , которым в плоскости ζ отвечают точки $\zeta = 1$, $\zeta = 0$ и $\zeta = -i$. Положение четвертой характерной точки области – точки A – определяется переменной $a > 0$, которая выступает вспомогательным параметром задачи.

Аналогично (4) функция $z(\zeta)$ может быть представлена в аддитивном виде

$$z(\zeta) = U^{-1} [W(\zeta) - W_{\text{rel}}(\zeta)] \tag{12}$$

с точностью до некоторой константы интегрирования. Здесь W и W_{rel} – это комплексные потенциалы абсолютного и относительного движений жидкости в области Ω , представленной на рис. 3, *a*.

Остается построить функции $W(\zeta)$ и $W_{\text{rel}}(\zeta)$ как потенциалы соответствующих течений в плоскости ζ . Аналогично классической постановке задачи (см. разд. 1) это можно сделать аналитически в замкнутом виде, если восстановить особенности обоих течений во всей плоскости ζ .

Прежде всего можно оценить скорости абсолютного и относительного движений жидкости в точке A физической плоскости. Аналогично (3) будем иметь

$$A : \left. \frac{dW}{dz} \right|_{x \rightarrow \infty} = 1, \quad \left. \frac{dW_{\text{rel}}}{dz} \right|_{x \rightarrow \infty} = 1 - U.$$

Отсюда следует, что в точке A области Ω_ζ абсолютное движение жидкости имеет сток мощности 1, а относительное – источник мощности $U - 1$ [11].

Далее, в абсолютном движении жидкости с потенциалом W участки границ AB_1 и CA являются линиями тока, а участки B_1B_2 и B_2C – эквипотенциалами. В относительном движении жидкости с потенциалом W_{rel} участки границ AB_1 , CA и B_2C являются линиями тока.

Чтобы выяснить характер граничного условия для потенциала W_{rel} на участке B_1B_2 , используем соотношение (2). Поскольку на границе B_1B_2 производная dW/dz вещественна, производная dW_{rel}/dz на B_1B_2 также будет вещественна. Следовательно, для потенциала W_{rel} участок B_1B_2 является эквипотенциалю. Таким образом, каждое из двух течений, вызванное своей особенностью в точке A области Ω_ζ , может быть симметрично продолжено на всю плоскость ζ .

В результате можно явно выписать вид функций $W(\zeta)$ и $W_{\text{rel}}(\zeta)$ [13]

$$W(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{(\zeta - a)(1 + a\zeta)}{(\zeta + a)(1 - a\zeta)}, \quad (13)$$

$$W_{\text{rel}}(\zeta) = \frac{U - 1}{2\pi} \ln \frac{(\zeta - a)(1 - a\zeta)}{(\zeta + a)(1 + a\zeta)}. \quad (14)$$

Подставляя выражения (13), (14) в формулу (12), получим аналитическое решение задачи (6) в терминах функции $z(\zeta)$

$$z(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\zeta - a}{\zeta + a} \right) + \frac{U - 2}{2\pi U} \ln \left(\frac{1 + a\zeta}{1 - a\zeta} \right) + C_0, \quad (15)$$

где C_0 – константа интегрирования, определенная из того условия, что $z = 0$ в точке C

$$C_0 = -\frac{U - 1}{\pi U} \ln \left(\frac{1 + a}{1 - a} \right). \quad (16)$$

Используя формулы (10), (13), можно найти взаимно однозначную связь между величинами δ и a

$$\delta = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}(a^{-1}) - 1 \quad \Rightarrow \quad a = \operatorname{ctg} \frac{\pi(1 + \delta)}{4}. \quad (17)$$

Отметим, что эта связь не содержит параметра U .

На границе Γ в плоскости ζ имеем $\zeta = \exp(i\sigma)$. Тогда из формулы (15) вытекает граничное соотношение

$$\Gamma: \quad z_\Gamma(\sigma) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left[\frac{\exp(i\sigma) - a}{\exp(i\sigma) + a} \right] + \frac{U - 2}{2\pi U} \ln \left[\frac{1 + a\exp(i\sigma)}{1 - a\exp(i\sigma)} \right] + C_0. \quad (18)$$

Разделяя в нем вещественную и мнимую части, получим параметрическое уравнение контура пальца Γ в физической плоскости.

В отличие от семейства решений (5) семейство решений (18) не однопараметрическое, а двухпараметрическое семейство решений с параметрами U и a . Второй параметр – параметр a – возникает в результате того, что изначально в модифицированную постановку (6) закладывалась зависимость от дополнительного параметра h .

Параметр h можно связать с параметрами U и a с помощью формулы $h = \operatorname{Re} z_\Gamma(0) - \operatorname{Re} z_\Gamma(-\pi/2)$. При учете формул (16), (18) получим соотношение

$$h(U, a) = \frac{U - 1}{\pi U} \ln \left(\frac{1 + a}{1 - a} \right).$$

С параметрами U и a можно связать также площадь головной части пальца $S = 2S_{B_2CD}$,

$$S = \frac{h\lambda\delta}{2} + \int_{B_2C} \operatorname{Im} \left\{ z \frac{\overline{dz}}{d\sigma} \right\} d\sigma. \quad (19)$$

С использованием этой формулы зависимость $S(U, a)$ можно оценить лишь приближенно ввиду наличия интеграла. Вместе с тем, используя методы контурного интегрирования [15], можно найти и точный вид зависимости $S(U, a)$. Для этого обозначим замкнутый контур $B_1B_2CB_2^*B_1$ через Λ (рис. 3, *b*). Тогда интеграл в правой части (19) при учете выражения (15) можно свести к контурному интегралу

$$S = \frac{a(U-1)}{\pi^2 U^2} \operatorname{Im} \oint_{\Lambda} \ln \left(\frac{1+a\zeta}{1-a\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta^2 - a^2},$$

который вычисляется с использованием теории вычетов [15]

$$S(U, a) = \frac{U-1}{\pi U^2} \ln \left(\frac{1+a^2}{1-a^2} \right). \quad (20)$$

3. Анализ решения задачи (6)

На рис. 4, *a* и *b* представлено сравнение решений задачи (1) и задачи (6) для $U = 2$ и $U = 4$ соответственно. Сплошным линиям на этих рисунках отвечают решения задачи (1), пунктирным линиям – решения задачи (6) при $\delta = 0.003$, штриховым линиям – решения задачи (6) при $\delta = 0.03$. Штрих-пунктирные линии отмечают глубину формирования пальца: для $\delta = 0.003$ – это $x = -h_1$, для $\delta = 0.03$ – это $x = -h_2$.

Видно, что с уменьшением δ и, соответственно, с ростом h конфигурация пальца, отвечающего решению модифицированной задачи, быстро устанавливается и становится практически неотличимой от конфигурации пальца, отвечающего классическому решению задачи при той же скорости продвижения U . Можно констатировать, что уже при величинах h порядка 1 решение модифицированной задачи (6) достаточно хорошо приближает решение классической задачи (1).

Зависимость величин h и S от U и δ представлена на рис. 5, *a* и *b* в виде кривых $h(U)$ и $S(U)$ соответственно при различных δ : линиям 1 отвечает $\delta = 0.003$, 2 – $\delta = 0.03$, 3 – $\delta = 0.1$.

Видно, что при фиксированном δ зависимости $h(U)$ являются монотонно возрастающими, а зависимости $S(U)$ имеют выраженный максимум. Докажем, что этот максимум достигается при $U = 2$. Действительно, с учетом взаимно однозначной связи (17) из формулы (20) непосредственно следует, что

$$\partial S / \partial U = 0 \quad \Rightarrow \quad U = 2. \quad (21)$$

В работе [16] было показано, что аналогичное (21) соотношение приближенно выполняется для классического решения задачи Хеле-Шоу (1), когда под S понимается площадь пальца, отсекаемого сечением $x = -h$. Это позволило, во-первых, сформулировать вариационный принцип минимальной скорости диссипации энергии в локальной форме, когда диссипативные потери оцениваются только в малой окрестности свободной границы Γ ; во-вторых, показать, что в случае пренебрежимо малых капиллярных сил этот принцип позволяет выбрать единственное решение с $U = 2$ и, соответственно, с $\lambda = 0.5$ из семейства решений Саффмена и Тэйлора в полном соответствии с результатами экспериментов [1].

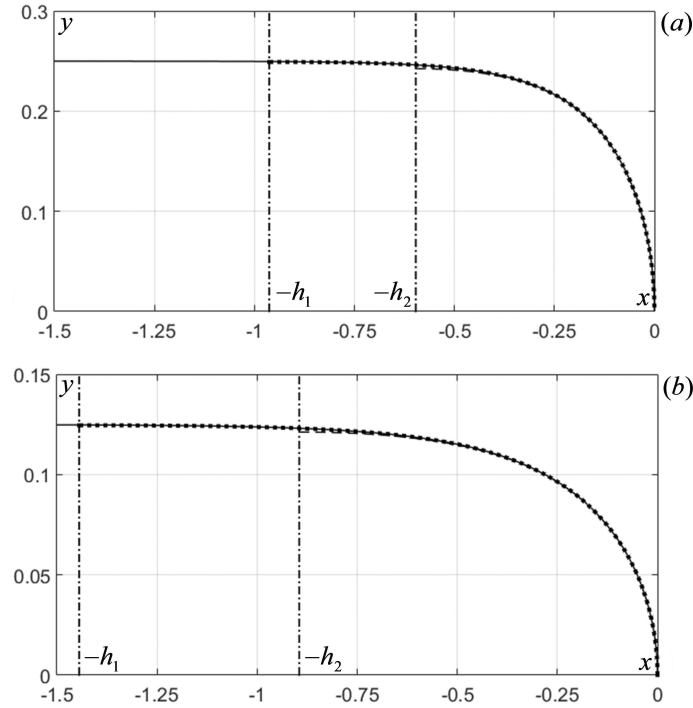


Рис. 4. Конфигурации пальцев, полученные в результате решения задач (1) и (6) для $U = 2$ (a) и для $U = 4$ (b) соответственно. Сплошные линии – решения задачи (1), пунктирные и штриховые линии – решения задачи (6) при $\delta = 0.003$ и $\delta = 0.03$. Штрихпунктирные линии $x = -h_1$ и $x = -h_2$ отмечают глубину формирования пальца для $\delta = 0.003$ и $\delta = 0.03$

Аналогичная интерпретация соотношения (21) возможна и для решения модифицированной задачи (6). В соответствии с [16] скорость диссипации энергии в малой окрестности границы Γ характеризует величина ψ_{B_2} , которая напрямую связана с δ , см. формулы (8), (11):

$$\psi_{B_2} = 0.5(1 - \delta). \quad (22)$$

Сам вариационный принцип формулируется так [16]: из всех возможных решений задачи (6) с различными скоростями продвижения U при одной и той же площади головной части пальца S реализуется решение с минимальной скоростью диссипации энергии ψ_{B_2} или, с учетом (22), с максимальным значением δ . Далее, следуя принципу взаимности вариационных задач, задачу о максимуме $\delta(U, S)$ при фиксированном S можно заменить на задачу о максимуме $S(U, \delta)$ при фиксированном δ . Решение последней и реализуется соотношением (21).

В отличие от работы [16], где автор вынужден был ограничиться только выводом, аналогичным (21), здесь можно непосредственно убедиться, является ли условие $U = 2$ решением задачи о максимуме $\delta(U, S)$. Действительно, используя замкнутый аналитический вид выражения (20) и разрешая его относительно a , найдем

$$a = \left[\exp\left(\frac{\pi U^2 S}{U-1}\right) + 1 \right]^{-1/2} \left[\exp\left(\frac{\pi U^2 S}{U-1}\right) - 1 \right]^{1/2}.$$

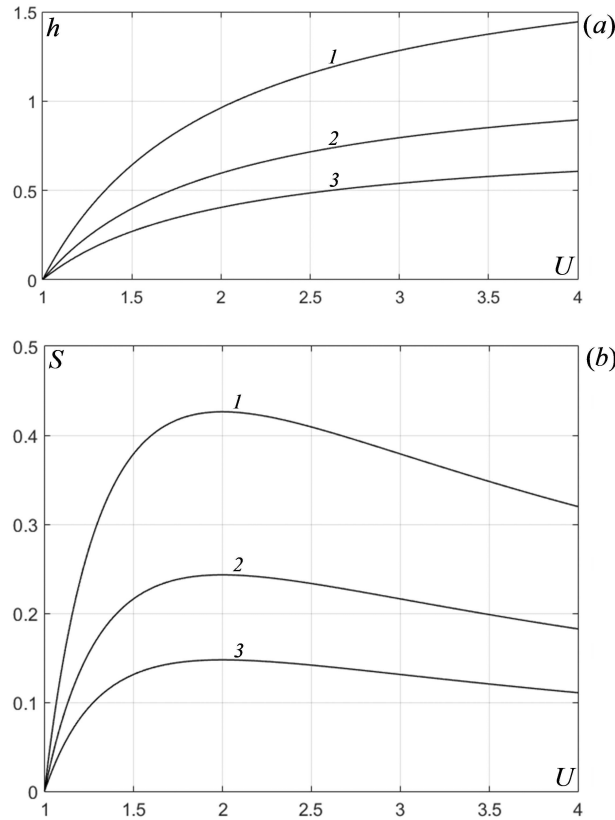


Рис. 5. Зависимости $h(U)$ (a) и $S(U)$ (b) при различных δ : 1 – $\delta = 0.003$, 2 – $\delta = 0.03$, 3 – $\delta = 0.1$

Подставляя это выражение в формулу (17), получим

$$\delta(U, S) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \left\{ \left[\exp \left(\frac{\pi U^2 S}{U-1} \right) + 1 \right]^{1/2} \left[\exp \left(\frac{\pi U^2 S}{U-1} \right) - 1 \right]^{-1/2} \right\} - 1.$$

На рис. 6 приведены зависимости $\delta(U, S)$ в виде кривых $\delta(U)$ при различных значениях S : линии 1 отвечает $S = 0.4$, линии 2 – $S = 0.5$, линии 3 – $S = 0.6$. Видно, что при $U = 2$ и любом фиксированном S у функции $\delta(U, S)$ действительно будут максимумы, а у функции $\psi_{B_2}(U, S)$, согласно выражению (22), – минимумы. Таким образом, принцип минимальной скорости диссипации энергии в локальной форме позволяет выбрать из семейства решений (18) пальцы со скоростью продвижения $U = 2$ и толщиной $\lambda_\delta \approx 0.5$.

Заключение

Задача о продвижении стационарного пальца в лотке Хеле-Шоу при учете действия капиллярных сил на межфазной границе поставлена более 60 лет назад, однако, до конца так и не решена. Ее анализ в классической постановке Саффмена и Тэйлора выявляет сингулярность решения в бесконечно удаленной точке, где лежит основание пальца. Это значительно затрудняет реализацию корректного численного анализа задачи. Предложена новая модифицированная постановка задачи о продвижении стационарного пальца в лотке Хеле-Шоу. В отличие

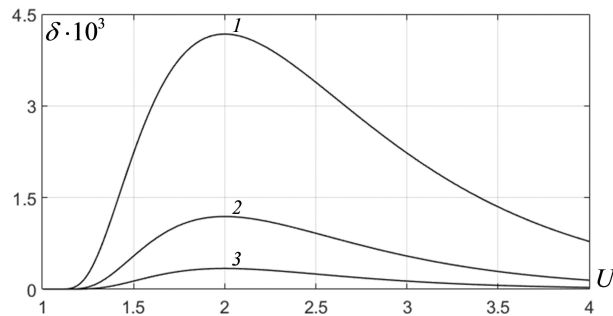


Рис. 6. Зависимости $\delta(U)$ при различных значениях S : 1 – $S = 0.4$, 2 – $S = 0.5$, 3 – $S = 0.6$

от классической постановки в ней постулируется ограниченность расстояния, на котором полностью формируется палец, чем убирается потенциальный источник сингулярности решения. Указанное расстояние по сути выступает дополнительным параметром модифицированной постановки. Для идеализированного случая пренебрежимо малых капиллярных сил показано, что в пределе, когда это расстояние стремится к бесконечности, ее решение стремится к классическому решению задачи. На конкретных примерах показано, что в качестве значения дополнительного параметра модифицированной постановки достаточно выбрать величину порядка 1. Это уже обеспечит практическое совпадение формы пальца с формой, отвечающей классическому решению. Показано также, что принцип минимальной скорости диссипации энергии, сформулированный в локальной форме, когда диссипативные потери оцениваются только в малой окрестности свободной границы, отбирает палец толщиной 0.5 из семейства решений задачи в новой постановке в полном согласии с результатами экспериментов в случае пренебрежимо малых капиллярных сил. Выявленные свойства модифицированной постановки делают ее перспективной с точки зрения ее обобщения на случай действия капиллярных сил и возможности ее корректного численного анализа.

Благодарности. Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

Литература

1. *Saffman P.G., Taylor G.I.* The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // *Proc. R. Soc. London, Ser. A.* – 1958. – V. 245, No 1242. – P. 312–329.
2. *McLean J.W., Saffman P.G.* The effect of surface tension on the shape of fingers in a Hele-Shaw cell // *J. Fluid Mech.* – 1981. – V. 102. – P. 455–469.
3. *Окейдон Дж.Р., Ховисон С.Д.* П.Я.Кочина и Хеле-Шоу в современной математике, естественных науках и технике // *Прикл. матем. и механика.* – 2002. – Т. 66, Вып. 3. – С. 515–524.
4. *Chapman S.J.* On the role of Stokes line in the selection of Saffman–Taylor finger with small surface tension // *Eur. J. Appl. Math.* – 1999. – V. 10. – P. 513–534.
5. *Shraiman B.* Velocity selection and the Saffman–Taylor problem // *Phys. Rev. Lett.* – 1986. – V. 56. – P. 2028–2031.

6. *Tanveer S.* Analytic theory for the selection of a symmetric Saffman – Taylor finger in a Hele-Shaw cell // *Phys. Fluids.* – 1987. – V. 30, No 6. – P. 1589–1605.
7. *Combescot R., Hakim V., Dombre T., Pomeau Y., Pumir A.* Analytic theory of the Saffman–Taylor fingers // *Phys. Rev. A.* – 1988. – V. 37, No 4. – P. 1270–1283.
8. *Tanveer S.* Viscous displacement in a Hele-Shaw cell / Ed. by H. Segur et al. – N. Y.: Plenum Press, 1991. – P. 131–153.
9. *Tanveer S.* The effect of surface tension on the shape of a Hele-Shaw cell bubble // *Phys. Fluids.* – 1986. – V. 29, No 11. – P. 3537–3548.
10. *Алимов М.М.* Численный анализ ветвлений решения задачи Хеле-Шоу о стационарно движущемся пузыре // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* – 2012. – Т. 154, кн. 1. – С. 99–113.
11. *Ламб Г.* Гидродинамика. – М.; Л.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
12. *Vasconcelos G.L.* Exact solutions for N steady fingers in a Hele-Shaw cell // *Phys. Rev. E.* – 1998. – V. 58, No 5. – P. 6858–6860.
13. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. – М.: Наука, 1979. – 536 с.
14. *Алимов М.М.* О стационарных решениях задачи Хеле-Шоу // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* – 2005. – Т. 147, кн. 3. – С. 33–48.
15. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
16. *Алимов М.М.* Принцип минимальной скорости диссипации энергии в стационарных течениях Хеле-Шоу // *Изв. РАН. МЖГ.* – 2013. – № 4. – С. 104–116.

Поступила в редакцию
15.02.18

Алимов Марс Мясумович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории «Математическое моделирование неравновесных процессов в нефтегазодобыче» Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: Mars.Alimov@kpfu.ru

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)
2018, vol. 160, no. 3, pp. 462–476

A Modified Formulation of the Problem of the Steady Finger in a Hele-Shaw Cell

M.M. Alimov

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia

E-mail: *Mars.Alimov@kpfu.ru*

Received February 15, 2018

Abstract

The problem of the motion of steady fingers in a Hele-Shaw cell in case of nonzero surface tension was posed more than 60 years ago. However, it has not been completely solved. The analysis in the classical formulation by Saffman and Taylor has revealed that the solution has a singularity at the infinity point where the base of the finger lies. This makes it difficult to realize a correct numerical analysis of the problem. A new modified formulation of the problem is proposed. In this formulation, we postulate that the distance at which the finger is completely formed is limited, which removes the potential source of solution singularity. This distance is, in fact, an additional parameter of the modified formulation. For the case of zero surface tension, it has been established that, in the limit, when this distance tends to infinity, the solution of the problem in the modified formulation tends to the Saffman and Taylor finger solution. Specific examples show that it is sufficient to choose a quantity of order 1 as the value of the additional parameter of the modified formulation. This will already ensure the practical coincidence of the finger shape with the form that corresponds to the classical solution for the case of zero surface tension. It has been also established that the principle of minimum energy dissipation rate formulated in the local form can be used when dissipation is estimated only in a small neighborhood of the free boundary. It has been shown that this principle selects a finger of thickness 0.5 from the family of solutions of the problem in the new formulation in full agreement with the results of the experiments in the case of zero surface tension. The revealed qualities of the modified formulation make it promising from the point of view of its generalization to the case of nonzero surface tension and the possibility of its correct numerical analysis.

Keywords: Hele-Shaw flow, free boundary problems, exact solution, minimum energy dissipation rate

Acknowledgments. The work is performed according to the Russian Government Program of Competitive Growth of Kazan Federal University.

Figure Captions

Fig. 1. The upper half of the flow domain in the physical plane z (a) and in auxiliary plane ω (b) for the classical formulation of the problem.

Fig. 2. The configuration of the fingers of Saffman and Taylor with thicknesses from 0.1 to 0.9 in increments of 0.2.

Fig. 3. The upper half of the flow domain in the physical plane z (a) and in auxiliary plane ζ (b) for the modified formulation of the problem.

Fig. 4. The finger configurations obtained as a result of solving the problem (1) and the problem (6) for $U = 2$ (a) and for $U = 4$ (b), respectively. Solid lines are the solutions of problem (1), dotted and dashed lines are the solutions of problem (6) for $\delta = 0.003$ and $\delta = 0.03$. Dash-dotted lines $x = -h_1$ and $x = -h_2$ indicate the depth of the formation of the finger for $\delta = 0.003$ and $\delta = 0.03$.

Fig. 5. Dependencies $h(U)$ (a) and $S(U)$ (b) for different δ : 1 – $\delta = 0.003$, 2 – $\delta = 0.03$, 3 – $\delta = 0.1$.

Fig. 6. Dependencies $\delta(U)$ for different S : 1 – $S = 0.4$, 2 – $S = 0.5$, 3 – $S = 0.6$.

References

1. Saffman P.G., Taylor G.I. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 1958, vol. 245, no. 1242, pp. 312–329.
2. McLean J.W., Saffman P.G. The effect of surface tension on the shape of fingers in a Hele-Shaw cell. *J. Fluid Mech.*, 1981, vol. 102, pp. 455–469.
3. Ockendon J.R., Howison S.D. Kochina and Hele-Shaw in modern mathematics, natural science and industry. *J. Appl. Math. Mech.*, 2002, vol. 66, no. 3, pp. 505–512. doi: 10.1016/S0021-8928(02)00060-6.
4. Chapman S.J. On the role of Stokes line in the selection of Saffman–Taylor finger with small surface tension. *Eur. J. Appl. Math.*, 1999, vol. 10, pp. 513–534.
5. Shraiman B. Velocity selection and the Saffman – Taylor problem. *Phys. Rev. Lett.*, 1986, vol. 56, pp. 2028–2031.
6. Tanweer S. Analytic theory for the selection of a symmetric Saffman–Taylor finger in a Hele-Shaw cell. *Phys. Fluids*, 1987, vol. 30, no. 6, pp. 1589–1605.
7. Combescot R., Hakim V., Dombre T., Pomeau Y., Pumir A. Analytic theory of the Saffman–Taylor fingers. *Phys. Rev. A*, 1988, vol. 37, no. 4, pp. 1270–1283.
8. Tanvir S. *Viscous Displacement in a Hele-Shaw Cell*. Segur H. et al. (Eds.). New York, Plenum Press, 1991, pp. 131–153.
9. Tanweer S. The effect of surface tension on the shape of a Hele-Shaw cell bubble. *Phys. Fluids*, 1986, vol. 29, no. 11, pp. 3537–3548.
10. Alimov M.M.. Numerical analysis of solution of the Hele-Shaw problem for steadily moving bubble. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2012, vol. 154, no. 1, pp. 99–113. (In Russian)
11. Lamb H. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat, 1947. 928 p. (In Russian)
12. Vasconcelos G.L. Exact solutions for N steady fingers in a Hele-Shaw cell. *Phys. Rev. E*, 1998, vol. 58, no. 5, pp. 6858–6860.
13. Gurevich M.I. *Teoriya strui ideal'noi zhidkosti* [Theory of Jets in Ideal Fluids]. Moscow, Nauka, 1979. 536 p. (In Russian)
14. Alimov M.M. On steady solutions of Hele-Shaw problem. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2005, vol. 147, no. 3, pp. 33–48. (In Russian)

15. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* [Methods of Complex Variable Theory]. Moscow, Nauka, 1973. 736 p. (In Russian)
16. Alimov M.M. The principle of minimum energy dissipation rate in steady Hele–Shaw flows. *Fluid Dyn.*, 2013, vol. 48, no. 4, pp. 512–522. doi: 10.1134/S0015462813040108.

⟨ **Для цитирования:** Алимов М.М. Модифицированная постановка задачи о стационарном пальце в лотке Хеле-Шоу // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2018. – Т. 160, кн. 3. – С. 462–476. ⟩

⟨ **For citation:** Alimov M.M. A modified formulation of the problem of the steady finger in a Hele-Shaw cell. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, vol. 160, no. 3, pp. 462–476. (In Russian) ⟩