

УДК 514.16

КОНФОРМНЫЕ МОДЕЛИ РАССЛОЕНИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ АЛГЕБРОЙ АНТИКВАТЕРНИОНОВ. III

И.А. Кузьмина

Аннотация

В работе [1] Н.Е. Беловой доказано, что любое двумерное подпространство алгебры антикватернионов, содержащее единицу, является подалгеброй, изоморфной 2-алгебре комплексных, двойных или дуальных чисел. В этой работе рассматривается третий случай. Построена связность в расслоениях сфер вещественного и мнимого радиуса и найдена ее кривизна. Построены также конформные модели этих расслоений.

1. Расслоение группы обратимых элементов алгебры антикватернионов

Рассмотрим 4-алгебру \mathbb{A} антикватернионов [3] с базисом $1, f, e, i$ и с таблицей умножения

	1	f	e	i
1	1	f	e	i
f	f	1	i	e
e	e	-i	1	-f
i	i	-e	f	-1

Всякий антикватернион можно записать в виде $\mathbf{x} = x^0 + x^1 f + x^2 e + x^3 i$. В алгебре антикватернионов определен переход от элемента \mathbf{x} к сопряженному элементу $\bar{\mathbf{x}} = x^0 - x^1 f - x^2 e - x^3 i$, при котором $\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{x}}$, а произведение $\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}} = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2$ есть число вещественное. Скалярное произведение двух антикватернионов определяется как $\mathbf{x}\mathbf{y} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}\bar{\mathbf{y}} + \mathbf{y}\bar{\mathbf{x}})$. Тем самым в \mathbb{A} возникает структура 4-х-мерного псевдоевклидова пространства \mathbb{E}_2^4 .

Квадратный корень $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}}}$, вещественный и положительный, если $\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}} > 0$, и из верхней полуплоскости комплексного переменного, если $\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}} < 0$, называется модулем антикватерниона [6]. Заметим, что $|1| = |i| = 1$, $|e| = |f| = i$. Если $|\mathbf{x}| \neq 0$, то существует обратный элемент для элемента \mathbf{x} , который имеет вид $\mathbf{x}^{-1} = \bar{\mathbf{x}}/|\mathbf{x}|^2$. Если $|\mathbf{x}| = 0$, то получим $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$. Это уравнение изотропного конуса в псевдоевклидовом пространстве \mathbb{E}_2^4 . Множество обратимых элементов алгебры \mathbb{A} антикватернионов

$$\tilde{\mathbb{A}} = \{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x}|^2 \neq 0\}$$

образует группу Ли.

В работе Н.Е. Беловой [1] доказано, что любое двумерное подпространство алгебры антикватернионов, содержащее единицу, является подалгеброй, изоморфной 2-алгебре комплексных, двойных или дуальных чисел. Первый случай рассмотрен нами в [4], второй – в [5]. В этой работе мы рассмотрим третий случай –

2-подалгебру $\mathbb{R}(\epsilon)$ дуальных чисел с базисом $\{1, \epsilon\}$, где $\epsilon = f + i$. Множество ее обратимых элементов

$$\tilde{\mathbb{R}}(\epsilon) = \{\lambda = a + b\epsilon \mid a \neq 0\}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

есть подгруппа Ли группы $\tilde{\mathbb{A}}$, 2-плоскость без двойной прямой.

Запишем антикватернион в виде

$$\mathbf{x} = x^0 + x^2 + x^1\epsilon + (x^3 - x^1 + x^2\epsilon)i = z_1 + z_2i, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{R}(\epsilon).$$

Расширим таблицу умножения алгебры антикватернионов, дополнив ее элементами ϵ и $\hat{\epsilon}$, где $\hat{\epsilon} = f - i$, $\hat{\epsilon}^2 = 0$. Получим

$$\epsilon f = -\epsilon i = f\hat{\epsilon} = i\hat{\epsilon} = \frac{1}{2}\epsilon\hat{\epsilon} = 1 - e, \quad f\epsilon = -i\epsilon = \hat{\epsilon}f = \hat{\epsilon}i = \frac{1}{2}\hat{\epsilon}\epsilon = 1 + e,$$

$$\epsilon e = -e\epsilon = i + f, \quad \hat{\epsilon}e = -e\hat{\epsilon} = i - f.$$

Согласно этому установим нужные произведения. Например, если $z = a + b\epsilon \in \mathbb{R}(\epsilon)$ и $\hat{z} = a + b\hat{\epsilon} \in \mathbb{R}(\epsilon)$, то

$$i\bar{z} = \hat{z}i, \quad i\hat{z} = \bar{z}i. \quad (1)$$

Тогда

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{z}_1 - \hat{z}_2i, \quad \mathbf{x}\bar{\mathbf{x}} = (z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2) + (z_2\hat{z}_1 - z_1\hat{z}_2)i,$$

где $\hat{z}_1 = x^0 + x^2 + x^1\hat{\epsilon}$, $\hat{z}_2 = x^3 - x^1 + x^2\hat{\epsilon}$.

Рассмотрим фактормножество правых смежных классов $\tilde{\mathbb{A}}/\tilde{\mathbb{R}}(\epsilon)$. Антикватернионы $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \tilde{\mathbb{A}}$ принадлежат одному и тому же правому смежному классу по $\tilde{\mathbb{R}}(\epsilon)$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}\mathbf{y}^{-1} \in \tilde{\mathbb{R}}(\epsilon)$. Но $\mathbf{x}\mathbf{y}^{-1} = \mathbf{x}\bar{\mathbf{y}}/|\mathbf{y}|^2$, где

$$\mathbf{x}\bar{\mathbf{y}} = (z_1 + z_2i)(\bar{w}_1 - \hat{w}_2i) = (z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2) + (z_2\hat{w}_1 - z_1\hat{w}_2)i. \quad (2)$$

Поэтому этот антикватернион является ненулевым дуальным числом, если выполнены условия

$$z_2\hat{w}_1 - z_1\hat{w}_2 = 0, \quad z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 \neq 0. \quad (3)$$

Первое из них означает, что $z_1 : z_2 = \hat{w}_1 : \hat{w}_2$ и тогда второе дает $\hat{w}_1\bar{w}_1 + \hat{w}_2\bar{w}_2 \neq 0$ и аналогично $\hat{z}_1\bar{z}_1 + \hat{z}_2\bar{z}_2 \neq 0$. Отсюда следует, во-первых, что каноническая проекция $\pi : \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}/\tilde{\mathbb{R}}(\epsilon)$ имеет вид

$$\pi(\mathbf{x}) = (z_1 : z_2). \quad (4)$$

Во-вторых, фактормножество есть подмножество $M \subset P(\epsilon)$ дуальной проективной прямой

$$M = \{[z_1 : z_2] \in P(\epsilon) \mid \hat{z}_1\bar{z}_1 + \hat{z}_2\bar{z}_2 \neq 0\}.$$

Оно покрывается двумя картами:

$$U_1 = \{[z_1 : z_2] \mid |z_2| \neq 0\} \quad \text{с координатой } z = \frac{z_1}{z_2}, \quad (5)$$

где $|z|^2 \neq 1$, т. к. $\hat{z}_1\bar{z}_1 + \hat{z}_2\bar{z}_2 \neq 0$;

$$U_2 = \{[z_1 : z_2] \mid |z_1| \neq 0\} \quad \text{с координатой } z' = \frac{z_2}{z_1}, \quad (6)$$

где по той же причине $|z'|^2 \neq 1$. Таким образом, при вещественной реализации M является псевдоконформной плоскостью [6] без пары параллельных прямых $|z|^2 = 1$.

Итак, мы имеем главное расслоение $E = (\tilde{A}, \pi, M)$ правых смежных классов $\tilde{\mathbb{R}}(\epsilon)\mathbf{x}$. На нем структурная группа $\tilde{\mathbb{R}}(\epsilon)$ действует слева $\tilde{\mathbb{R}}(\epsilon)\mathbf{x} \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}(\epsilon)(\tilde{\mathbb{R}}(\epsilon)\mathbf{x}) = \tilde{\mathbb{R}}(\epsilon)\mathbf{x}$. Отображения тривиализации и их обратные имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi_1 : \pi^{-1}(U_1) &\longrightarrow U_1 \times \tilde{\mathbb{R}}(\epsilon), \quad \varphi_1(z_1 + z_2 i) = \left(\frac{z_1}{z_2}, z_2 \right), \\ \varphi_1^{-1}(z, \lambda) &= \lambda(z + i), \\ \varphi_2 : \pi^{-1}(U_2) &\longrightarrow U_2 \times \tilde{\mathbb{R}}(\epsilon), \quad \varphi_2(z_1 + z_2 i) = \left(\frac{z_2}{z_1}, z_1 \right), \\ \varphi_2^{-1}(z', \lambda) &= \lambda(1 + z'i).\end{aligned}$$

Эти формулы следуют из равенств

$$\begin{aligned}\mathbf{x} = z_1 + z_2 i &= z_2 \left(\frac{z_1}{z_2} + i \right) = z_2(z + i) \quad \text{при } |z_2| \neq 0, \\ \mathbf{x} = z_1 + z_2 i &= z_1 \left(1 + \frac{z_2}{z_1} i \right) = z_1(1 + z'i) \quad \text{при } |z_1| \neq 0.\end{aligned}$$

Функция склейки имеет вид

$$\psi_{12}(z, \lambda) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \left(\frac{1}{z}, \lambda z \right).$$

Поэтому расслоение локально тривиально.

Следовательно, справедлива

Теорема 1. *Расслоение (\tilde{A}, π, M) , определяемое формулой (4), является главным локально тривиальным расслоением над псевдоконформной плоскостью без пары параллельных прямых с типовым слоем, диффеоморфным 2-плоскости без двойной прямой и структурной группой $\tilde{\mathbb{R}}(\epsilon)$.*

Определим прообраз любой точки базы при отображении π . Пусть $d = u + \epsilon v \in M \subset P(\epsilon)$ над окрестностью U_1 . Мы получим 2-плоскости $L_2 : z_1 - dz_2 = 0$, которые задаются двумя вещественными уравнениями

$$\begin{cases} x^0 + \frac{1}{1+v}((u^2 + v + 1)x^2 - ux^3) = 0, \\ x^1 - \frac{1}{1+v}(ux^2 + vx^3) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Рассмотрим сечения плоскостей L_2 с изотропным конусом $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$. Исключив x^0, x^1 из (7), получим $P(ux^2 - x^3)^2 = 0$, где $P = u^2 + 2v + 1$.

Так как при $P = 0$ условие $P(ux^2 - x^3)^2 = 0$ выполняется при любых x^2 и x^3 , то это означает, что плоскости (7) принадлежат изотропному конусу, являясь его плоскостными образующими.

Так как $P \neq 0$, то $(ux^2 - x^3)^2 = 0$. В сечении получим одну двойную изотропную прямую. Таким образом, над всякой точкой $d \in U_1$ слой $\pi^{-1}(d)$ есть полуевклидова 2-плоскость, которая касается изотропного конуса пространства \mathbb{E}_2^4 .

Аналогично, если $d' = u' + \epsilon v' \in U_2$, то получим полуевклидовы 2-плоскости $L'_2 : z_2 - d'z_1 = 0$ с уравнениями

$$\begin{cases} x^2 + \frac{1}{v' - 1}(v'x^0 + u'x^1) = 0, \\ x^3 + \frac{1}{v' - 1}(u'x^0 + (u'^2 - v' + 1)x^1) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

с теми же свойствами, что и 2-плоскости (7).

2. Метрика и связность в расслоении сферы вещественного радиуса

1. Группа антикватернионов единичного модуля $\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}} = 1$ изображается сферой вещественного радиуса $S_2^3(1) \subset \mathbb{E}_2^4$ псевдоевклидова пространства

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1. \quad (9)$$

Если $\mathbf{a} \in S_2^3(1)$, то преобразования $\mathbf{x}' = \mathbf{ax}$ и $\mathbf{x}' = \mathbf{x}\mathbf{a}$ в силу $|\mathbf{x}'|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{x}|^2$ являются вращениями в \mathbb{E}_2^4 , которые характеризуются тем, что параметр поворота не зависит от выбора вектора \mathbf{x} .

Пусть $\mathbf{a} = a_1 + a_2i$, $\mathbf{x} = z_1 + z_2i$, где a_1, a_2, z_1, z_2 – дуальные числа. Тогда согласно (1) получим

$$\mathbf{x}' = \mathbf{ax} = (a_1 + a_2i)(z_1 + z_2i) = (a_1z_1 - a_2\hat{z}_2) + (a_1z_2 + a_2\hat{z}_1)i.$$

Найдем вещественную 4-матрицу этого преобразования. Пусть

$$\begin{aligned} z_1 &= x^0 + x^2 + x^1\epsilon, \quad z_2 = x^3 - x^1 + x^2\epsilon, \\ a_1 &= p^0 + p^2 + p^1\epsilon, \quad a_2 = p^3 - p^1 + p^2\epsilon. \end{aligned}$$

Тогда

$$A^{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} p^0 & p^1 - 2p^2 & p^2 & 2p^2 - p^3 \\ p^1 & p^0 - p^2 & p^3 & 0 \\ p^2 & 2p^2 - p^3 & p^0 & p^1 - 2p^2 \\ p^3 & -2p^2 & p^1 & p^0 + p^2 \end{pmatrix}, \quad \det A^{\mathbb{R}} = 1. \quad (10)$$

$A^{\mathbb{R}}$ – специальная псевдоортогональная матрица.

Аналогичным образом для преобразований вида $\mathbf{x}' = \mathbf{x}\mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in S_2^3(1)$, получим

$$z'_1 = a_1z_1 - \hat{a}_2z_2, \quad z'_2 = a_2z_1 + \hat{a}_1z_2 \quad (11)$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & -\hat{a}_2 \\ a_2 & \hat{a}_1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим ограничение расслоения $E = (\tilde{\mathbb{A}}, \pi, M)$ на сферу вещественного радиуса $S_2^3(1) \subset \tilde{\mathbb{A}}$, т. е. расслоение $(S_2^3(1), \pi, M)$. Возьмем сечения сферы $S_2^3(1)$ плоскостями L_2 . При $P \neq 0$ имеем $(ux^2 - x^3)^2 = (1 + v)^2/P$. Возможны два случая:

- a) $u^2 + 2v + 1 < 0$; в сечении получим мнимые кривые.
- b) $u^2 + 2v + 1 > 0$; в сечении получим полуевклидовы окружности, изображаемые в проекции на плоскость (x^2, x^3) парой параллельных прямых $(ux^2 - x^3)^2 = a > 0$.

Таким образом, для сферы $S_2^3(1)$ имеет смысл рассматривать только расслоение над областью $u^2 + 2v + 1 > 0$. Ограничение подгруппы $\tilde{\mathbb{R}}(\epsilon)$ дуальных чисел на $S_2^3(1)$ есть подгруппа l дуальных чисел единичного модуля.

Теорема 2. $(S_2^3(1), \pi, M)$ есть главное расслоение группы $S_2^3(1)$ на правые смежные классы по подгруппе Ли l антисквадратонов единичного модуля

$$\mathbf{a} = (a_1, 0) : a_1 \bar{a}_1 = 1.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}' = z'_1 + z'_2 i$, $\mathbf{x} = z_1 + z_2 i$ – произвольная пара антисквадратонов из $S_2^3(1)$. Тогда $\mathbf{x}'^{-1} = \bar{\mathbf{x}} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 i$ и согласно (2)

$$\mathbf{x}' \mathbf{x}^{-1} = (z'_1 \bar{z}_1 + z'_2 \bar{z}_2) + (z'_2 \bar{z}_1 - z'_1 \bar{z}_2)i.$$

Отсюда при $z_2 = 0$, $z'_2 = 0$ следует, в частности, что l является подгруппой в $S_2^3(1)$. Кроме того, это замкнутое 1-мерное подмногообразие (большая окружность, изображаемая парой параллельных прямых) в $S_2^3(1)$ и, следовательно, в силу теоремы Картана, подгруппа Ли. Антисквадратоны \mathbf{x}' , \mathbf{x} принадлежат одному и тому же правому смежному классу по l , если $\mathbf{x}' \mathbf{x}^{-1} \in l$, т. е. если $\mathbf{x}' \mathbf{x}^{-1} = 1 + \epsilon t$ для некоторого t . Тогда действие структурной группы на $S_2^3(1)$ имеет вид $\mathbf{x}' = (1 + \epsilon t)\mathbf{x}$ или

$$z'_1 = (1 + \epsilon t)z_1, \quad z'_2 = (1 + \epsilon t)z_2. \quad (12)$$

□

Отметим, что в силу (10) псевдоортогональная матрица преобразования (12) имеет вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & -t \\ t & 1 & t & 0 \\ 0 & -t & 1 & t \\ t & 0 & t & 1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

2. Введем на $S_2^3(1)$ координаты, адаптированные к расслоению. В качестве таких координат возьмем координаты точки $z = z_1/z_2 = u + \epsilon v \in M \subset P(\epsilon)$ и параметр сдвига, отсчитанный от некоторой фиксированной точки \mathbf{q} орбиты $(z_1(t), z_2(t))$. Согласно (12) $z_1(t) = (1 + \epsilon t)z_1$, $z_2(t) = (1 + \epsilon t)z_2$. Тогда дуальные координаты точки $\mathbf{x} = (1 + \epsilon t)\mathbf{q}$ согласно (12) будут равны

$$z_1 = (1 + \epsilon t)(q^0 + q^2 + q^1 \epsilon), \quad z_2 = (1 + \epsilon t)(q^3 - q^1 + q^2 \epsilon).$$

Выберем теперь начальную точку орбиты в гиперплоскости $q^2 = 0$ и от нее будем отсчитывать параметр t . Тогда $z_1 = (1 + \epsilon t)(q^0 + q^1 \epsilon)$, $z_2 = (1 + \epsilon t)(q^3 - q^1)$ и

$$z = \frac{q^0 + q^1 \epsilon}{q^3 - q^1} = u + \epsilon v.$$

Отсюда определяются координаты начальной точки. С точностью до знака

$$q^0 = \frac{1}{\sqrt{P}}u, \quad q^1 = \frac{1}{\sqrt{P}}v, \quad q^2 = 0, \quad q^3 = \frac{1}{\sqrt{P}}(1 + v),$$

где $P = u^2 + 2v + 1 > 0$. В результате получим следующее параметрическое уравнение сферы $S_2^3(1)$, отнесенное к адаптированным координатам (u, v, t) :

$$\begin{aligned} x^0 &= \frac{1}{\sqrt{P}}(u - t), \\ x^1 &= \frac{1}{\sqrt{P}}(v + ut), \\ x^2 &= \frac{1}{\sqrt{P}}t, \\ x^3 &= \frac{1}{\sqrt{P}}(1 + v + ut). \end{aligned} \quad (14)$$

Найдем псевдориманову метрику сферы $S_2^3(1)$, отнесенную к адаптированным координатам (u, v, t) . Для этого ее параметрическое уравнение (14) запишем в векторном виде. Если ввести пару псевдоортогональных векторов

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{P}}(u, v, 0, 1 + v), \quad \tilde{\mathbf{a}} = \frac{1}{\sqrt{P}}(-1, u, 1, u),$$

то уравнение сферы запишется в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}}t. \quad (15)$$

Найдем компоненты матрицы метрического тензора $g_{AB} = (\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B)$, ($A, B = 1, 2, 3$), где $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_v$, $\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_t$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= \mathbf{a}_u + \tilde{\mathbf{a}}_u t, \\ \mathbf{x}_v &= \mathbf{a}_v + \tilde{\mathbf{a}}_v t, \\ \mathbf{x}_t &= \tilde{\mathbf{a}}. \end{aligned}$$

В результате получим

$$(g_{AB}) = \begin{pmatrix} \frac{2v+1}{P^2} & \frac{-u}{P^2} & \frac{-1}{P} \\ \frac{-u}{P^2} & \frac{-1}{P^2} & 0 \\ \frac{-1}{P} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Заметим, что элементы матрицы не зависят от t . Это согласуется с тем, что сдвиги $t \rightarrow t'$ являются движениями 3-сферы $S_2^3(1)$. Метрика (16) неопределенная.

3. Построим связность в расслоении $(S_2^3(1), \pi, M)$ [2]. Подалгебра дуальных чисел касается изотропного конуса, поэтому мы не можем выбрать горизонтальное распределение, ортогональное слоям.

Коэффициенты римановой связности для метрики (16) имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= -\frac{2u}{P}, & \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = -\frac{1}{P}, \\ \Gamma_{22}^2 &= -\frac{2}{P}, & \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = -\frac{u}{P}, & \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 = 1. \end{aligned}$$

Остальные коэффициенты связности равны нулю. Псевдориманово пространство $(S_2^3(1), g_{AB})$ является пространством постоянной кривизны $K = -1$.

3. Конформная модель расслоения $(S_2^3(1), \pi, M)$

Построим конформную модель расслоения $(S_2^3(1), \pi, M)$. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} S_2^3(1) & \xrightarrow{f} & C_1^3 \\ \searrow \pi & & \swarrow p \\ & M, & \end{array}$$

где f – стереографическое отображение сферы $S_2^3(1)$ на псевдоконформное пространство [6]. Отображение $p = \pi \circ f^{-1} : C_1^3 \rightarrow M$ определяется с помощью этой

диаграммы. Но сфера $S_2^3(1)$ покрывается двумя картами: $U = S_2^3(1) \setminus \mathbf{p}$, где полюс $\mathbf{p} = (1, 0, 0, 0)$ и $U' = S_2^3(1) \setminus \mathbf{p}'$, где полюс $\mathbf{p}' = (-1, 0, 0, 0)$. В совокупности $f|_U = f_1$ и $f|_{U'} = f_2$ описывают все f , $S_2^3(1) = U \cup U'$. Сначала рассмотрим отображение f_1 на \mathbb{R}^3 . Найдем координатное выражение отображения $p = \pi \circ f_1^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow M$. При $x^0 \neq 1$ отображение f_1 задается формулами

$$x = \frac{x^1}{1-x^0}, \quad y = \frac{x^2}{1-x^0}, \quad z = \frac{x^3}{1-x^0}, \quad (17)$$

где $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, а координаты точки (x^0, x^1, x^2, x^3) на $S_2^3(1) \subset \mathbb{E}_2^4$ связаны условием (9). Обратное отображение $f_1^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow S_2^3(1)$ имеет при условии $\xi^2 + 1 \neq 0$ вид

$$f_1^{-1} : x^0 = \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1}, \quad x^1 = \frac{2x}{\xi^2 + 1}, \quad x^2 = \frac{2y}{\xi^2 + 1}, \quad x^3 = \frac{2z}{\xi^2 + 1}, \quad (18)$$

где $\xi^2 = -x^2 - y^2 + z^2$. Таким образом, получим

$$\begin{aligned} p(x, y, z) &= \pi(f_1^{-1}(x, y, z)) = \pi(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2} = \\ &= \left(\frac{\xi^2 - 1 + 2y}{2(z-x)}, \frac{-y(\xi^2 - 1 + 2y) + 2x(z-x)}{2(z-x)^2} \right) = (u, v) \end{aligned} \quad (19)$$

при $z - x \neq 0$. В результате локально проекция $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow M$ принимает вид

$$u = \frac{\xi^2 - 1 + 2y}{2(z-x)}, \quad v = \frac{-y(\xi^2 - 1 + 2y) + 2x(z-x)}{2(z-x)^2}. \quad (20)$$

Найдем метрику в \mathbb{R}^3 , соответствующую метрике сферы. Используя формулу (18), получим

$$ds^2 = \frac{4(-dx^2 - dy^2 + dz^2)}{(-x^2 - y^2 + z^2 + 1)^2} = \frac{4d\xi^2}{(\xi^2 + 1)^2}. \quad (21)$$

Итак, f_1 – конформное отображение.

Пусть $\mathbf{q} \in S_2^3(1)$ и $Q_{\mathbf{q}}^2 = S_2^3(1) \cap T_{\mathbf{q}}^3$ – вещественный конус с вершиной в точке \mathbf{q} , где $T_{\mathbf{q}}^3$ – касательная плоскость в этой точке с уравнением $(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = 1$. Нормальный вектор касательной плоскости $\mathbf{N} = (q^0, q^1, q^2, q^3)$ совпадает с радиусом-вектором сферы. Так как $\mathbf{q} \in S_2^3(1)$, то $\mathbf{N}^2 = 1 > 0$. Поэтому $T_{\mathbf{q}}^3$ – псевдоевклидова плоскость. $Q_{\mathbf{q}}^2 \subset T_{\mathbf{q}}^3$ – вырожденная квадрика с особой точкой \mathbf{q} . Найдем ее образ $f_1(Q_{\mathbf{q}}^2)$ при стереографическом отображении. Для этого проведем прямые через полюс $\mathbf{p} = (1, 0, 0, 0)$ и точки конуса $Q_{\mathbf{q}}^2$, т. е. точки \mathbf{x} , удовлетворяющие системе уравнений

$$\mathbf{x}^2 = 1, \quad (\mathbf{q}, \mathbf{x}) = 1, \quad \text{где } \mathbf{q}^2 = 1. \quad (22)$$

Уравнения этих прямых $\mathbf{r} = \mathbf{p} + t\mathbf{x}$. Ищем точки пересечения этих прямых с гиперплоскостью $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{E}_2^4$, положив $\mathbf{r} = (0, x, y, z)$. Получим

$$0 = 1 + tx^0, \quad x = tx^1, \quad y = tx^2, \quad z = tx^3.$$

Тогда

$$\mathbf{x} : \quad x^0 = -\frac{1}{t}, \quad x^1 = \frac{x}{t}, \quad x^2 = \frac{y}{t}, \quad x^3 = \frac{z}{t}.$$

Но эти точки должны удовлетворять системе уравнений (22), поэтому

$$1 - x^2 - y^2 + z^2 = t^2, \quad -q^0 - q^1x - q^2y + q^3z = t.$$

Исключив t , получим

$$\begin{aligned} ((q^1)^2 + 1)x^2 + ((q^2)^2 + 1)y^2 + ((q^3)^2 - 1)z^2 + 2q^1q^2xy - \\ - 2q^1q^3xz - 2q^2q^3yz + 2q^0q^1x + 2q^0q^2y - 2q^0q^3z = 1 - (q^0)^2, \quad (23) \end{aligned}$$

где $\mathbf{q}^2 = (q^0)^2 - (q^1)^2 - (q^2)^2 + (q^3)^2 = 1$, $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$. Это уравнения вещественных конусов с вершинами в точках $f_1(\mathbf{q})$, определяемых формулами (17). В частности, конус в точке $\mathbf{q} = (-1, 0, 0, 0)$ соответствует изотропный конус $-x^2 - y^2 + z^2 = 0$ с вершиной в точке $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. Изотропные конусы (23) и конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ связаны конформными преобразованиями.

Пространство C_1^3 получается добавлением несобственной точки, соответствующей полюсу \mathbf{p} при расширении диффеоморфизма f_1 до $f : S_2^3(1) \rightarrow C_1^3$ и конуса $Q_{\mathbf{p}}^2$ в этой точке.

Аналогично рассмотрим стереографическое отображение области $U' = S_2^3(1) \setminus \{\mathbf{p}'\}$, где $\mathbf{p}' = (-1, 0, 0, 0)$. При $x^0 \neq -1$ отображение f_2 задается формулами, аналогичными (17):

$$x' = \frac{x^1}{1+x^0}, \quad y' = \frac{x^2}{1+x^0}, \quad z' = \frac{x^3}{1+x^0}, \quad (24)$$

где $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, а координаты точки (x^0, x^1, x^2, x^3) на $S_2^3(1) \subset \mathbb{E}_2^4$ связаны условием (9). Обратное отображение $f_2^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow S_2^3(1)$ имеет при условии $\xi'^2 + 1 \neq 0$ вид

$$f_2^{-1} : \quad x^0 = \frac{\xi'^2 - 1}{\xi'^2 + 1}, \quad x^1 = \frac{2x'}{\xi'^2 + 1}, \quad x^2 = \frac{2y'}{\xi'^2 + 1}, \quad x^3 = \frac{2z'}{\xi'^2 + 1}, \quad (25)$$

где $\xi'^2 = -x'^2 - y'^2 + z'^2$. На пересечении $U \cap U'$ локальные координаты связаны следующей зависимостью

$$x' = \frac{x}{\xi^2}, \quad y' = \frac{y}{\xi^2}, \quad z' = \frac{z}{\xi^2}.$$

Таким образом, $p : C_1^3 \rightarrow M$ есть главное расслоенное пространство с базой M и структурной группой l . Действие этой группы в пространстве C_1^3 согласно (13) имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{2A}(2x + (\xi^2 - 1 + 2y)t),$$

$$y(t) = \frac{1}{A}(y + (z - x)t),$$

$$z(t) = \frac{1}{2A}(2z + (\xi^2 - 1 + 2y)t),$$

где $A = 1 + (z - x)t$. Это параметрические уравнения слоев, проходящих через точку (x, y, z) . Оператор соответствующей 1-параметрической группы (т. е. фундаментальное векторное поле) имеет компоненты

$$V^1 = \frac{1}{2}((z - x)^2 - y(y - 2) - 1), \quad V^2 = (z - x)(1 - y),$$

$$V^3 = -\frac{1}{2}((z - x)^2 + y(y - 2) + 1).$$

Используя параметрическое уравнение сферы $S_2^3(1)$ (14) и формулы стереографической проекции, получаем, что в адаптированных координатах параметрические уравнения слоев имеют вид

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{B}(v + ut), \\y &= \frac{1}{B}t, \\z &= \frac{1}{B}(1 + v + ut),\end{aligned}$$

где $B = \sqrt{P} - u + t$. Отсюда нетрудно получить матрицу G' метрического тензора пространства C_1^3 в адаптированных координатах: $G' = \mu G$, где $\mu = P/B^2$ – конформный множитель.

Найдем уравнения слоев в C_1^3 . Пусть $z = (z_1 : z_2) \in M$ и $z = (u, v)$ – ее стереографические координаты в области $z_2 \neq 0$. При $z = z_1/z_2$ получим $z_1 - zz_2 = 0$ или (7). Это уравнение 2-плоскости в E_2^4 , в которой лежит полуевклидова окружность, изображаемая парой параллельных прямых – слой над точкой $z \in M$ в расслоении. Подставив сюда выражения (x^0, x^1, x^2, x^3) через (x, y, z) из формул (18) стереографического отображения, получим

$$\begin{cases} (1+v)x - uy - vz = 0, \\ (x-u)^2 + (y-1)^2 - (z-u)^2 = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Плоскости $(1+v)x - uy - vz = 0$ псевдоевклидовы в C_1^3 относительно изотропного конуса $-x^2 - y^2 + z^2 = 0$, т. к.

$$\begin{cases} -x^2 - y^2 + z^2 = 0, \\ (1+v)x - uy - vz = 0 \end{cases}$$

есть пара вещественных прямых, (26) – это две пересекающиеся прямые. Действительно, исключив z , в проекции на евклидову плоскость XOY получим

$$-(2v+1)x^2 + (v^2 - u^2)y^2 + 2u(1+v)xy + 2uvx - 2v(v+u^2)y + v^2 = 0.$$

Оно распадается на два линейных уравнения

$$(2v+1)x + (v\sqrt{P} - u(1+v))y - v(u + \sqrt{P}) = 0,$$

$$(2v+1)x - (v\sqrt{P} + u(1+v))y - v(u - \sqrt{P}) = 0.$$

Мы имеем в C_1^3 2-параметрическое семейство больших «окружностей» – сечений конусов их диаметральными плоскостями. Действительно, плоскости проходят через вершины $C(u, 1, u)$ конусов и начало координат, т. е. через прямую OC . Ось симметрии OC – вещественная прямая с уравнением $(1+v)x - uy = 0$ в плоскости $z = 0$. Пусть α – угол этой оси с осью OX . Тогда $\operatorname{ctg}\alpha = -u/(1+v)$. Выделим 1-параметрическое подсемейство условием $u/1+v = c = \text{const}$. Тогда оси этих прямых $x - cy = 0$ совпадают. Прямые лежат в плоскостях $x - cy - \frac{v}{(1+v)}z = 0$. Для этого подсемейства $\operatorname{ctg}\alpha = c$, отсюда $\alpha = \text{const}$. Уравнения прямых в плоскости XOY принимают вид

$$\frac{X^2}{u^2 + 2v + 1} - \frac{Y^2}{v^2} = 0.$$

4. Метрика и связность в расслоении сферы мнимого радиуса

1. Множество антикватернионов мнимого модуля $\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}} = -1$ изображается сферой мнимого радиуса $S_2^3(-1) \subset \mathbb{E}_2^4$ псевдоевклидова пространства

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 = -1. \quad (27)$$

Если $\mathbf{a} \in S_2^3(-1)$, то преобразования вида $\mathbf{x}' = \mathbf{ax}$ и $\mathbf{x}' = \mathbf{x}\mathbf{a}$ в силу $|\mathbf{x}'|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{x}|^2 = -|\mathbf{x}|^2$ являются антивращениями в \mathbb{E}_2^4 , которые характеризуются тем, что параметр поворота не зависит от выбора вектора \mathbf{x} . Матрица преобразования $\mathbf{x}' = \mathbf{ax}$ имеет вид (10), где теперь $\det A^R = -1$.

Рассмотрим ограничение расслоения $E = (\tilde{A}, \pi, M)$ на сферу мнимого радиуса $S_2^3(-1) \subset \tilde{A}$, т. е. расслоение $(S_2^3(-1), \pi, M)$. Возьмем сечения сферы $S_2^3(-1)$ плоскостями L'_2 . При $P' \neq 0$ имеем $(u'x^1 + x^0)^2 = -(1 - v')^2/P'$, где $P' = u'^2 - 2v' + 1$, $u' = 1/u$, $v' = -v/|z|^2$. Возможны два случая:

- a) $u'^2 - 2v' + 1 > 0$; в сечении получим мнимые кривые.
- b) $u'^2 - 2v' + 1 < 0$; в сечении получим полуевклидовы окружности, изображаемые в проекции на плоскость (x^0, x^1) парой параллельных прямых $(u'x^1 + x^0)^2 = b > 0$.

Таким образом, для сферы $S_2^3(-1)$ имеет смысл рассматривать только расслоение над областью $u'^2 - 2v' + 1 < 0$.

2. Введем на $S_2^3(-1)$ координаты, адаптированные к расслоению. В качестве таких координат возьмем координаты точки $z' = z_2/z_1 = u' + \epsilon v' \in M \subset P(\epsilon)$ и параметр сдвига, отсчитанный от некоторой фиксированной точки \mathbf{q} орбиты. Тогда дуальные координаты точки $\mathbf{x} = (1 + \epsilon t)\mathbf{q}$ согласно (12) будут равны

$$z_1 = (1 + \epsilon t)(q^0 + q^2 + q^1\epsilon), \quad z_2 = (1 + \epsilon t)(q^3 - q^1 + q^2\epsilon).$$

Выберем теперь начальную точку орбиты в гиперплоскости $q^1 = 0$ и от нее будем отсчитывать параметр t . Тогда $z_1 = (1 + \epsilon t)(q^0 + q^2)$, $z_2 = (1 + \epsilon t)(q^3 + q^2\epsilon)$ и

$$z' = \frac{q^3 + q^2\epsilon}{q^0 + q^2} = u' + \epsilon v'.$$

Отсюда определяются координаты начальной точки. С точностью до знака

$$q^0 = \frac{1}{\sqrt{-P'}}(1 - v'), \quad q^1 = 0, \quad q^2 = \frac{1}{\sqrt{-P'}}v', \quad q^3 = \frac{1}{\sqrt{-P'}}u',$$

где $P' = u'^2 - 2v' + 1 < 0$. В результате получим следующее параметрическое уравнение сферы $S_2^3(-1)$, отнесенное к адаптированным координатам (u', v', t) :

$$\begin{aligned} x^0 &= \frac{1}{\sqrt{-P'}}(1 - v' - u't), \\ x^1 &= \frac{1}{\sqrt{-P'}}t, \\ x^2 &= \frac{1}{\sqrt{-P'}}(v' + u't), \\ x^3 &= \frac{1}{\sqrt{-P'}}(u' + t). \end{aligned} \quad (28)$$

Найдем псевдориманову метрику сферы $S_2^3(-1)$, отнесенную к адаптированным координатам (u', v', t) . Для этого ее параметрическое уравнение (28) запишем в векторном виде. Если ввести пару псевдоортогональных векторов

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{-P'}}(1 - u', 0, v', u'), \quad \tilde{\mathbf{a}} = \frac{1}{\sqrt{-P'}}(-u', 1, u', 1),$$

то уравнение сферы запишется в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}}t. \quad (29)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{u'} &= \mathbf{a}_{u'} + \tilde{\mathbf{a}}_{u'}t, \\ \mathbf{x}_{v'} &= \mathbf{a}_{v'} + \tilde{\mathbf{a}}_{v'}t, \\ \mathbf{x}_t &= \tilde{\mathbf{a}}. \end{aligned}$$

В результате получим

$$(g'_{AB}) = \begin{pmatrix} \frac{2v' - 1}{P'^2} & \frac{-u'}{P'^2} & \frac{-1}{P'} \\ \frac{-u'}{P'^2} & \frac{1}{P'^2} & 0 \\ \frac{-1}{P'} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Заметим, что элементы матрицы не зависят от t . Это согласуется с тем, что сдвиги $t \rightarrow t'$ являются движениями 3-сферы $S_2^3(-1)$. Метрика (30) неопределенная.

3. Коэффициенты римановой связности этой метрики равны

$$\begin{aligned} \Gamma'_{11}^1 &= -\frac{2u'}{P'}, \quad \Gamma'_{12}^1 = \Gamma'_{21}^1 = \Gamma'_{23}^1 = \Gamma'_{32}^1 = \frac{1}{P'}, \\ \Gamma'_{22}^2 &= \frac{2}{P'}, \quad \Gamma'_{12}^2 = \Gamma'_{21}^2 = \Gamma'_{13}^2 = \Gamma'_{31}^2 = -\frac{u'}{P'}, \quad \Gamma'_{13}^2 = \Gamma'_{31}^2 = 1. \end{aligned}$$

Остальные коэффициенты связности равны нулю.

Псевдориманово пространство $(S_2^3(-1), g'_{AB})$ является пространством постоянной кривизны $K = 1$.

5. Конформная модель расслоения $(S_2^3(-1), \pi, M)$

Построим конформную модель расслоения $(S_2^3(-1), \pi, M)$. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} S_2^3(-1) & \xrightarrow{f} & \tilde{C}_1^3 \\ \searrow \pi & & \swarrow p \\ & M, & \end{array}$$

где f – стереографическое отображение сферы $S_2^3(-1)$ на псевдоконформное пространство [6]. Но сфера $S_2^3(-1)$ покрывается двумя картами: $U = S_2^3(-1) \setminus \mathbf{p}$, где полюс $\mathbf{p} = (0, 1, 0, 0)$, и $U' = S_2^3(-1) \setminus \mathbf{p}'$, где полюс $\mathbf{p}' = (0, -1, 0, 0)$. В совокупности $f|_U = f_1$ и $f|_{U'} = f_2$ описывают все f , $S_2^3(-1) = U \cup U'$. Сначала

рассмотрим отображение f_1 на \mathbb{R}^3 . Найдем координатное выражение отображения $p = \pi \circ f_1^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow M$. При $x^1 \neq 1$ отображение f_1 задается формулами

$$x = \frac{x^0}{1-x^1}, \quad y = \frac{x^2}{1-x^1}, \quad z = \frac{x^3}{1-x^1}, \quad (31)$$

где $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, а координаты точки (x^0, x^1, x^2, x^3) на $S_2^3(-1) \subset \mathbb{E}_2^4$ связаны условием (27). Обратное отображение $f_1^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow S_2^3(-1)$ при условии $\xi^2 + 1 \neq 0$ имеет вид

$$f_1^{-1} : x^0 = \frac{2x}{\xi^2 + 1}, \quad x^1 = \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1}, \quad x^2 = \frac{2y}{\xi^2 + 1}, \quad x^3 = \frac{2z}{\xi^2 + 1}, \quad (32)$$

где $\xi^2 = -x^2 + y^2 - z^2$. В результате локально проекция $p = \pi \circ f^{-1}$ принимает вид

$$u' = \frac{2z - \xi^2 + 1}{2(x + y)}, \quad v' = \frac{4y(x + y) - (\xi^2 - 1)(2z - \xi^2 + 1)}{4(x + y)^2}, \quad (33)$$

где $x + y \neq 0$. Найдем метрику в \mathbb{R}^3 , соответствующую метрике сферы. Используя формулу (32), получим

$$ds^2 = \frac{4(-dx^2 + dy^2 - dz^2)}{(-x^2 + y^2 - z^2 + 1)^2} = \frac{4d\xi^2}{(\xi^2 + 1)^2}.$$

Итак, f_1 – конформное отображение.

Пусть $\mathbf{q} \in S_2^3(-1)$ и $Q_{\mathbf{q}}^2 = S_2^3(-1) \cap T_{\mathbf{q}}^3$ – вещественный конус с вершиной в точке \mathbf{q} , где $T_{\mathbf{q}}^3$ – касательная плоскость в этой точке с уравнением $(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = -1$. Нормальный вектор касательной плоскости $\mathbf{N} = (q^0, q^1, q^2, q^3)$ совпадает с радиусом-вектором сферы. Так как $\mathbf{q} \in S_2^3(-1)$, то $\mathbf{N}^2 = 1 > 0$. Поэтому $T_{\mathbf{q}}^3$ – псевдоэвклидова плоскость. $Q_{\mathbf{q}}^2 \subset T_{\mathbf{q}}^3$ – вырожденная квадрика с особой точкой \mathbf{q} . Ее образ $f_1(Q_{\mathbf{q}}^2)$ при стереографическом отображении имеет уравнение, аналогичное (23):

$$((q^0)^2 + 1)x^2 + ((q^2)^2 - 1)y^2 + ((q^3)^2 + 1)z^2 - 2q^0q^2xy + 2q^0q^3xz - 2q^2q^3yz + 2q^0q^1x - 2q^1q^2y + 2q^1q^3z = 1 - (q^1)^2, \quad (34)$$

где $\mathbf{q}^2 = (q^0)^2 - (q^1)^2 - (q^2)^2 + (q^3)^2 = -1$, $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$. Это уравнение вещественных конусов с вершинами в точках $f_1(\mathbf{q})$, определяемых (31). В частности, конусу в точке $\mathbf{q} = (0, -1, 0, 0)$ соответствует изотропный конус $-x^2 + y^2 - z^2 = 0$ с вершиной в точке $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. Изотропные конусы (34) и конус $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ связаны конформными преобразованиями. Пространство \tilde{C}_1^3 получается добавлением несобственной точки, соответствующей полюсу \mathbf{p} при расширении диффеоморфизма f_1 до $f : S_2^3(-1) \rightarrow \tilde{C}_1^3$ и конуса $Q_{\mathbf{p}}^2$ в этой точке.

Рассмотрим стереографическое отображение области $U' = S_2^3(-1) \setminus \mathbf{p}'$, где $\mathbf{p}' = (0, -1, 0, 0)$. При $x^1 \neq -1$ отображение f_2 задается формулами, аналогичными (31):

$$x' = \frac{x^0}{1+x^1}, \quad y' = \frac{x^2}{1+x^1}, \quad z' = \frac{x^3}{1+x^1}, \quad (35)$$

где $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, а координаты точки (x^0, x^1, x^2, x^3) на $S_2^3(-1) \subset \mathbb{E}_2^4$ связаны условием (27). Обратное отображение $f_2^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow S_2^3(-1)$ при условии $\xi'^2 + 1 \neq 0$ имеет вид

$$f_2^{-1} : x^0 = \frac{2x'}{\xi'^2 + 1}, \quad x^1 = \frac{\xi'^2 - 1}{\xi'^2 + 1}, \quad x^2 = \frac{2y'}{\xi'^2 + 1}, \quad x^3 = \frac{2z'}{\xi'^2 + 1}, \quad (36)$$

где $\xi'^2 = -x'^2 + y'^2 - z'^2$.

Таким образом, $p : \tilde{C}_1^3 \rightarrow M$ есть главное расслоенное пространство с базой M и структурной группой l . Действие этой группы в пространстве \tilde{C}_1^3 согласно (13) имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2A}(2x + (\xi^2 - 1 - 2z)t), \\ y(t) &= \frac{1}{2A}(2y + (2z - \xi^2 + 1)t), \\ z(t) &= \frac{1}{A}(z + (x + y)t), \end{aligned}$$

где $A = 1 - (x + y)t$. Это параметрические уравнения слоев, проходящих через точку (x, y, z) . Оператор соответствующей 1-параметрической группы имеет компоненты

$$\begin{aligned} V^1 &= \frac{1}{2}((x + y)^2 - z(z + 2) - 1), & V^2 &= \frac{1}{2}((x + y)^2 + z(z + 2) + 1), \\ V^3 &= (x + y)(1 + z). \end{aligned}$$

Используя параметрическое уравнение сферы $S_2^3(-1)$ (28) и формулы стереографической проекции, получаем, что в адаптированных координатах параметрические уравнения слоев имеют вид

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{B}(1 - v' - u't), \\ y &= \frac{1}{B}(v' + u't), \\ z &= \frac{1}{B}(u' + t), \end{aligned}$$

где $B = \sqrt{-P'} - t$. Отсюда нетрудно получить матрицу G' метрического тензора пространства \tilde{C}_1^3 в адаптированных координатах: $G' = \mu G$, где $\mu = -P'/B^2$ – конформный множитель.

Найдем уравнения слоев в \tilde{C}_1^3 . Пусть $z' = (z_1 : z_2) \in M$ и $z' = (u', v')$ – ее стереографические координаты в области $z_1 \neq 0$. При $z' = z_2/z_1$ получаем $z_2 - z'z_1 = 0$ или (8). Это уравнение 2-плоскости в \mathbb{E}_2^4 , в которой лежит окружность, изображаемая парой параллельных прямых – слой над точкой $z' \in M$ в расслоении. Подставив сюда выражения (x^0, x^1, x^2, x^3) через (x, y, z) из формул (32) стереографического отображения, получим

$$\begin{cases} (v' - u'^2)x - (u'^2 - v' + 1)y + u'z = 0, \\ (x - u')^2 - (y + u')^2 + (z + 1)^2 = 0. \end{cases} \quad (37)$$

Плоскости $(v' - u'^2)x - (u'^2 - v' + 1)y + u'z = 0$ псевдоевклидовы в \tilde{C}_1^3 относительно изотропного конуса $-x^2 + y^2 - z^2 = 0$, т. к.

$$\begin{cases} -x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ (v' - u'^2)x - (u'^2 - v' + 1)y + u'z = 0 \end{cases}$$

есть пара вещественных прямых; (37) – это две пересекающиеся прямые. В самом деле, исключив y , в проекции на евклидову плоскость XOZ получим

$$(2u'^2 - 2v' + 1)x^2 + ((u'^2 - v' + 1)^2 - u'^2)z^2 - 2u'(v' - u'^2)xz - \\ - 2u'(u'^2 - v' + 1)x + 2(v'(v' - u'^2) + u'^2 - 2v' + 1)z + (u'^2 - v' + 1)^2 = 0. \quad (38)$$

Легко видеть, что уравнение распадается на два линейных уравнения.

Мы имеем в \tilde{C}_1^3 2-параметрическое семейство больших «окружностей» – сечений конусов их диаметральными плоскостями. Действительно, плоскости проходят через вершины $C(u', -u', -1)$ конусов и начало координат, т. е. через прямую OC . Ось симметрии OC – вещественная прямая с уравнением $(v' - u'^2)x + u'z = 0$ в плоскости $y = 0$. Пусть α – угол этой оси с осью OX . Тогда $\operatorname{ctg}\alpha = -u'/(v' - u'^2)$. Выделим 1-параметрическое подсемейство условием $-u'/(v' - u'^2) = c = \text{const}$. Тогда оси этих прямых $x - cz = 0$ совпадают. Прямые лежат в плоскостях

$$x - \frac{u'^2 - v' + 1}{(v' - u'^2)}y - cz = 0.$$

Для этого подсемейства $\operatorname{ctg}\alpha = c$, отсюда $\alpha = \text{const}$.

Summary

I.A. Kuzmina. Conformal models of bundles determined of antiquaternions' algebra. III.

In [1] N.E. Belova proved that any two-dimensional subspace of antiquaternions' algebra including the unit was subalgebra isomorphic with two-algebra of complex, throw or dual numbers. In this paper we consider the third accident. We make the connection in the bundles of a real and virtual radius spheres and we find the curvature of this connection. We consider else the conformal models of this bundles.

Литература

1. Белова Н.Е. Расслоения алгебр размерности 4. – Казань: Казан. ун-т, 1999. – 44 с. – Деп. в ВИНТИ 11.10.99, № 3037-В99.
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. – М.: Наука, 1979. – 760 с.
3. Кузьмина И.А., Шапуков Б.Н. Конформная и эллиптическая модели расслоения Хопфа // Тр. геом. сем. – Казань: Казан. ун-т, 2003. – Вып. 24. – С. 81–98.
4. Кузьмина И.А. Конформные модели расслоений, определяемых алгеброй антикватернионов. – Казань: Казан. ун-т, 2004. – 20 с. – Деп. в ВИНТИ 20.01.2004, № 161-В2004.
5. Кузьмина И.А. Конформные модели расслоений, определяемых алгеброй антикватернионовII. – Казань: Казан. ун-т, 2004. – 23 с. – Деп. в ВИНТИ 22.06.2004, № 1052-В2004.
6. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. – М.: Наука, 1966. – 647 с.

Поступила в редакцию
27.12.04

Кузьмина Ирина Александровна – аспирант кафедры геометрии Казанского государственного университета.

E-mail: Irina.Kuzmina@ksu.ru