I. ТЕОРИЯ КРИВЫХ

Прежде, чем приступать к изучению кривых и поверхностей, мы напомним основные понятия математического анализа, изложив их на языке векторных функций и вводя необходимые обозначения [2], [9].

ЛЕКЦИЯ 1. ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ

1.1. Понятие векторной функции. Предел и непрерывность.

Мы будем иметь дело с n-мерными вещественными евклидовыми пространствами $\mathbb{E}^n$. При этом всякая точка $A \in \mathbb{E}^n$ задается радиусом-вектором $\mathbf{x} = \overrightarrow{OA}$ относительно выбранного начала O.

Определение. *Векторная функция (короче — в. ф), определенная на подмножестве $U \subset \mathbb{E}^m$ со значениями в $\mathbb{E}^n$ — это отображение $\boldsymbol{r} : U \to \mathbb{E}^n$, которое всякому вектору $\boldsymbol{u} \in U$ ставит в соответствие вектор $\mathbf{x} = \mathbf{r}(\mathbf{u}) \subset \mathbb{E}^n$.*

Для векторных функций применимы обычные алгебраические операции сложения $\mathbf{r}_1(\mathbf{u})+\mathbf{r}_2(\mathbf{u})$ и умножения на скалярную функцию $\lambda(\mathbf{u})\mathbf{r}(\mathbf{u})$. Скалярное произведении векторных функций $(\mathbf{r}_1(\mathbf{u}), \mathbf{r}_2(\mathbf{u}))$, модуль векторной функции $|\mathbf{r}(\mathbf{u})| = \sqrt{(\mathbf{r}(\mathbf{u}), \mathbf{r}(\mathbf{u}))}$, а в 3-мерном случае также и векторное произведение $[\mathbf{r}_1(\mathbf{u}), \mathbf{r}_2(\mathbf{u})]$ выполняются поточечно.

В евклидовых пространствах мы будем рассматривать стандартную метрическую топологию, задав расстояние между точками формулой $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$. Напомним некоторые понятия из топологии.

Определение. *Открытый шар в $\mathbb{E}^n$ радиуса $\varepsilon > 0$ с центром $\boldsymbol{x}_0$ — это множество $B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) = \{\boldsymbol{x} : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \varepsilon\}$. Оно называется ε-окрестностью точки $\mathbf{x}_0$.*

Определение. *Множество $U \subset \mathbb{E}^n$ называется открытым, если для всякой его точки $\boldsymbol{x}$ существует ε-окрестность, содержащаяся в U. Дополнение открытого множества есть по определению множество замкнутое.*

Определение. *Открытое множество называется связным, если его нельзя представить как объединение непустых, открытых и непересекающихся множеств. Открытое связное множество называют областью.*

Определение. *Окрестностью точки $\boldsymbol{x}_0$ называется всякая область U, содержащая эту точку.*

Пусть в. ф. $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ определена в окрестности точки $\mathbf{u}_0$, кроме, может быть, самой этой точки.

Определение. *Вектор* $\boldsymbol{c} \in \mathbb{E}^n$ *называется пределом в. ф. и обозначается* $\boldsymbol{c} = \lim\limits_{\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u}_0} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta(\varepsilon) > 0$, *что*

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{r}(\mathbf{u}) - \mathbf{c}| < \varepsilon,$$

т.е. для любого шара $B(\mathbf{c}, \varepsilon) \subset \mathbb{E}^n$ найдется шар $B(\mathbf{u}_0, \delta) \subset U$ такой, что его образ принадлежит $B(\mathbf{c}, \varepsilon)$: $\mathbf{r}(B(\mathbf{u}_0, \delta)) \subset B(\mathbf{c}, \varepsilon)$.

Выполняются следующие свойства предела. При $\mathbf{u} \to \mathbf{u}_0$
1) $\lim(\mathbf{r}_1(\mathbf{u}) + \mathbf{r}_2(\mathbf{u})) = \lim \mathbf{r}_1(\mathbf{u}) + \lim \mathbf{r}_2(\mathbf{u})$;
2) $\lim(\lambda(\mathbf{u})\mathbf{r}(\mathbf{u})) = \lim \lambda(\mathbf{u}) \lim \mathbf{r}(\mathbf{u})$;
3) $\lim \mathbf{c} = \mathbf{c}$;
Отсюда следует, что $\lim(\mathbf{c}\mathbf{r}(\mathbf{u})) = \mathbf{c} \lim \mathbf{r}(\mathbf{u})$. Пределы скалярного и (при $n = 3$) векторного произведения обладают обычными свойствами:
4) $\lim(\mathbf{r}_1(\mathbf{u}), \mathbf{r}_2(\mathbf{u})) = (\lim \mathbf{r}_1(\mathbf{u}), \lim \mathbf{r}_2(\mathbf{u}))$;
5) $\lim[\mathbf{r}_1(\mathbf{u}), \mathbf{r}_2(\mathbf{u})] = [\lim \mathbf{r}_1(\mathbf{u}), \lim \mathbf{r}_2(\mathbf{u})]$.

Определение. *В. ф.* $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$, *определенная в некоторой окрестности точки* $\boldsymbol{u}_0$, *называется непрерывной в этой точке, если* $\lim \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u}_0} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}_0)$. *В. ф. называется непрерывной в области* U, *если она непрерывна в каждой точке этой области.*
Из перечисленных выше свойств предела следует, что сумма и произведения непрерывных в. ф. суть непрерывные функции.

Определение. *Пусть* $m = n$. *Отображение* $\boldsymbol{r} : U \to \boldsymbol{r}(U)$, *определяемое векторной функцией, называется гомеоморфным, если оно взаимно однозначно и в обе стороны непрерывно.*

Пусть $\{\mathbf{p}_\alpha\}$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ — базис пространства $\mathbb{E}^m$ и $\{\mathbf{e}_i\}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — базис пространства $\mathbb{E}^n$. Тогда $\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{p}_\alpha$ и $\mathbf{r} = x^i \mathbf{e}_i$. Следовательно, в. ф. может быть представлена в координатах $\mathbf{r}(\mathbf{u}) = x^i(u^1, \ldots, u^m)\mathbf{e}_i$. Таким образом, задание в.ф. эквивалентно заданию n скалярных функций от m переменных

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^m).$$

Заметим, однако, что это координатное представление в.ф. зависит от выбора базисов.

Из свойств предела вытекает

$$\lim_{\mathbf{u} \to \mathbf{u}_0} \mathbf{r}(\mathbf{u}) = \lim_{\mathbf{u} \to \mathbf{u}_0} x^i(\mathbf{u})\mathbf{e}_i.$$

Отсюда получаем следующие свойства:

1) *Координаты предела в. ф. суть пределы ее координат.*

2) *В. ф. непрерывна тогда и только тогда, когда ее координаты суть непрерывные функции.*

1.2. Дифференциал и производные векторных функций.

Рассмотрим значение в. ф. в точке $\mathbf{u}$ и в точках $\mathbf{u}+\mathbf{h}$ некоторой ее окрестности.

Определение. *В. ф. называется дифференцируемой в точке $\boldsymbol{u}$, если разность ее значений в этих точках может быть представлена в виде*

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}+\mathbf{h})-\mathbf{r}(\mathbf{u})=d\mathbf{r}(\mathbf{u},\mathbf{h})+\mathbf{0}^1(\mathbf{u},\mathbf{h}), \tag{1}$$

где в. ф. $d\mathbf{r}(\mathbf{u},\mathbf{h})$ является *линейной формой* по $\mathbf{h}$, а вектор $\mathbf{0}^1(\mathbf{u},\mathbf{h})$ имеет более высокий порядок малости, чем $|\mathbf{h}|$, т. е.

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{\mathbf{0}^1(\mathbf{u},\mathbf{h})}{|\mathbf{h}|}=0.$$

Линейная форма $d\mathbf{r}(\mathbf{u},\mathbf{h})$ называется *дифференциалом* данной в. ф. в точке $\mathbf{u}$.

Аналогично определяются дифференциалы более высокого порядка. Например, дифференциал 2-го порядка определяется соотношением

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}+\mathbf{h})=\mathbf{r}(\mathbf{u})+d\mathbf{r}(\mathbf{u},\mathbf{h})+\frac{1}{2!}d^2\mathbf{r}(\mathbf{u},\mathbf{h},\mathbf{h})+\mathbf{0}^2(\mathbf{u},\mathbf{h}),$$

где $d^2\mathbf{r}(\mathbf{u},\mathbf{h},\mathbf{h})$ есть *квадратичная форма* по $\mathbf{h}$, а $\mathbf{0}^2(\mathbf{u},\mathbf{h})$ имеет более высокий порядок малости, чем $|\mathbf{h}|^2$.

Определение. *В. ф. называется дифференцируемой класса C^k, если существуют ее дифференциалы до k-го порядка.*

В дальнейшем мы будем считать, что в. ф. допускают производные любого порядка или, как говорят, являются *гладкими.*

Займемся более подробно дифференциалом первого порядка. Отметим его свойства, которые вытекают из соответствующих свойств предела (аргументы опускаем):

1) $d(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)=d\mathbf{r}_1+d\mathbf{r}_2$;
2) $d(\lambda\mathbf{r})=d\lambda\mathbf{r}+\lambda d\mathbf{r}$;
3) $d\mathbf{c}=\mathbf{0}$.

Обычным образом дифференцируются скалярное и векторное произведения (в последнем случае с сохранением порядка сомножителей):

4) $d(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=(d\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)+(\mathbf{r}_1,d\mathbf{r}_2)$;
5) $d[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2]=[d\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2]+[\mathbf{r}_1,d\mathbf{r}_2]$.

Пусть в. ф. задана в координатах $\mathbf{r}(\mathbf{u})=x^i(\mathbf{u})\mathbf{e}_i$, где $\{\mathbf{e}_i\}$ — базис в $\mathbb{E}^n$. Дифференцируя, получим

$$d\mathbf{r}(\mathbf{u},\mathbf{h})=dx^i(\mathbf{u},\mathbf{h})\mathbf{e}_i. \tag{2}$$

Поэтому *координаты дифференциала в. ф. суть диффференциалы ее координат.*

Пусть $\{\mathbf{p}_\alpha\}$, $(\alpha = 1, 2, \dots, m)$ — базис пространства $\mathbb{E}^m$ и $\mathbf{h} = h^\alpha \mathbf{p}_\alpha$. Тогда, учитывая линейность дифференциала по $\mathbf{h}$, его координатное представление можно записать так $d\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{h}) = d\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{p}_\alpha)h^\alpha$. Коэффициенты этого выражения суть векторные функции, для которых приняты обозначения

$$d\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{p}_\alpha) := \partial_\alpha \mathbf{r}(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha}. \qquad (3)$$

Они называются *частными производными* в. ф. В силу (2) координаты производных равны $\partial_\alpha \mathbf{r}(\mathbf{u}) = \partial_\alpha x^i(\mathbf{u})\mathbf{e}_i$, так что в итоге

$$d\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{h}) = h^\alpha \partial_\alpha x^i(\mathbf{u})\mathbf{e}_i. \qquad (4)$$

Если, в частности, вектор $\mathbf{h}$ задает фиксированное направление в пространстве, то это выражение называют *производной в направлении вектора* $\mathbf{h}$.

Отмеченные выше свойства дифференциала, очевидно, переносятся на свойства производных. Для этого достаточно в соответствующих равенствах положить $\mathbf{h} = \mathbf{p}_\alpha$. Например, при дифференцировании скалярного произведения имеем

$$\partial_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (\partial_\alpha \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + (\mathbf{r}_1, \partial_\alpha \mathbf{r}_2).$$

При $n = 3$ аналогичное правило имеем при дифференцировании векторного и смешанного произведений.

ЛЕКЦИЯ 2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ

2.1. Регулярные векторные функции.

Пусть $d\mathbf{r}$ — дифференциал векторной функции . Составим из его координат (4) прямоугольную $(m \times n)$-матрицу

$$J = \begin{pmatrix} \partial_1 x^1 & \dots & \partial_m x^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_1 x^n & \dots & \partial_m x^n \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Она называется *якобиевой матрицей* векторной функции.

Определение. *В. ф. называется регулярной в точке* $\boldsymbol{u}$*, если ранг* r *ее якобиевой матрицы в этой точке максимален:* $\mathrm{rank} J = \max\{m, n\}$. *В. ф. называется регулярной в области, если она регулярна в каждой точке этой области.*

Точки, в которых ранг в. ф. не достигает максимального значения, называются ее *критическими точками.*

Определение. *Точка $\boldsymbol{x} \in \mathbb{E}^n$ называется регулярным значением отображения $\boldsymbol{r} : U \to \mathbb{E}^n$, если она регулярна в каждой точке прообраза $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{x}) \subset \mathbb{E}^m$.*

Пусть в. ф. регулярна в точке $\mathbf{u}_0$. Тогда возможны следующие случаи:

$$1)\, m = n = r; \quad 2)\, m < n,\, r = m; \quad 3)\, m > n,\, r = n.$$

Определение. *Диффеоморфизмом называется отображение $\mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, которое взаимно однозначно (биективно) и гладко вместе со своим обратным отображением $\boldsymbol{r}^{-1}$.*

Другими словами, это гомеоморфизм, гладкий в обе стороны. Ясно, что в этом случае $m = n = r$ при любом выборе точки $\mathbf{u} \in U$. Верно ли обратное? Справедлива

Теорема 1. (Об обратной функции). *Пусть $m = n$ и в. ф. $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ регулярна в точке $\boldsymbol{u}_0$. Тогда существует такая ε-окрестность B этой точки, что ограничение отображения на эту окрестность $\boldsymbol{r}|_B$ является диффеоморфизмом.*

Если $m = n = r$ в области U, то в силу этой теоремы она определяет диффеоморфное отображение в некоторой ε-окрестности каждой точки этой области, но в каждой из этих окрестностей диффеоморфизмы могут быть разные. Отображение в целом "склеено"из таких диффеоморфизмов и называется *локальным диффеоморфизмом.*

Пусть теперь $m < n$ и в. ф. регулярна в каждой точке области определения. Тогда соответствующее отображение называется *иммерсией* или *погружением*, а множество значений этой функции $\mathbf{r}(u^1, \ldots, u^m) \subset \mathbb{E}^n$ образует некоторое подмножество $M \subset \mathbb{E}^n$, которое называется *подмногообразием.* В дальнейшем мы столкнемся с такой ситуацией при изучении кривых и поверхностей евклидова пространства. В частности, если отображение является гомеоморфизмом на свой образ, то говорят о *вложении* и, соответственно, о *вложенном подмногообразии.*

Рассмотрим случай $m > n$. Если в. ф. регулярна в каждой точке области определения, то отображение называют *субмерсией.*

Теорема 2. (о прообразе регулярного значения) *Пусть $m > n$ и $c \in \mathbb{E}^n$ — регулярное значение гладкого отображения $\boldsymbol{r}$. Тогда прообраз $\boldsymbol{r}^{-1}(c) \subset \mathbb{E}^m$ (если он не пуст) является вложенным подмногообразием размерности $m - n$.*

Рассмотрим эту ситуацию в координатах. Мы имеем систему функциональных уравнений

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^1(u^1,\dots,u^m) & = & c^1, \\ \dots & \dots & \dots \\ x^n(u^1,\dots,u^m) & = & c^n, \end{array}\right. \tag{6}$$

где $m > n$ и ранг якобиевой матрицы (5) системы равен n для всех $(u^1,\dots,u^n)$, удовлетворяющих этим уравнениям. Тогда в силу теоремы о неявных функциях эту систему можно локально, в некоторой окрестности каждой точки, разрешить относительно n переменных. Каких именно, зависит от положения ненулевого минора в якобиевой матрице. Если, например, этот минор образован n первыми столбцами, то решение имеет вид

$$\left\{\begin{array}{lcl} u^1 & = & g^1(u^{n+1},\dots,u^m), \\ \dots & \dots & \dots \\ u^n & = & g^n(u^{n+1},\dots,u^m), \end{array}\right. \tag{7}$$

так что подстановка этих функций в заданную систему обращает ее в тождество.

На этой теореме основано задание подмногообразия системой *неявных уравнений* (6). Система (7) задает *приведенные уравнения* этого подмногообразия.

2.2. Другие специальные векторные функции.

Рассмотрим некоторые специальные в. ф. и найдем их аналитические признаки.

Определение. *Говорят, что в. ф.* $\boldsymbol{r} : U \subset \mathbb{E}^m \to \mathbb{E}^n$ *имеет постоянный модуль, если* $|\mathbf{r}(\mathbf{u})| = \mathrm{const}$.

Теорема 3. *В. ф. имеет постоянный модуль тогда и только тогда, когда*

$$(\mathbf{r}, d\mathbf{r}) \equiv 0. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя модуль в. ф. $|\mathbf{r}| = \sqrt{(\mathbf{r},\mathbf{r})}$, получим формулу

$$d|\mathbf{r}| = \frac{(\mathbf{r}, d\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|},$$

откуда и следует доказательство. □

Определение. *В. ф., определенная в области* $U \subset \mathbb{E}^m$, *называется коллинеарной, если она имеет постоянное направление в пространстве.*

Это направление можно задать постоянным единичным вектором $\mathbf{e}$ и тогда мы имеем $\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \lambda(\mathbf{u})\mathbf{e}$, где $\lambda(\mathbf{u}) \neq 0$ — гладкая скалярная функция.

Теорема 4. *В. ф.* $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ *коллинеарна тогда и только тогда, когда при любом* $\boldsymbol{u} \in U$

$$d\mathbf{r}//\mathbf{r}. \tag{9}$$

В 3-мерном пространстве это условие можно записать с помощью векторного произведения: $[\mathbf{r}, d\mathbf{r}] \equiv 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя тождество $\mathbf{r}(\mathbf{u}) \equiv \lambda(\mathbf{u})\mathbf{e}$, получим $d\mathbf{r} \equiv d\lambda\mathbf{e}$, откуда следует необходимость условия. Обратно, пусть $\mathrm{d}\mathbf{r}//\mathbf{r}$. Обозначим через $\mathbf{e}(\mathbf{u})$ единичный вектор их общего направления. Тогда $\mathbf{r}(\mathbf{u}) \equiv \lambda(\mathbf{u})\mathbf{e}(\mathbf{u})$. Дифференцируя это тождество, получим $d\mathbf{r} \equiv d\lambda\mathbf{e} + \lambda d\mathbf{e}$. Но в силу теоремы (8) $(\mathbf{e}, d\mathbf{e}) \equiv 0$. Поэтому, умножая скалярно это тождество на $d\mathbf{e}$, получим новое тождество $(d\mathbf{r}, d\mathbf{e}) \equiv \lambda(d\mathbf{e})^2$. Здесь, согласно условию теоремы, $d\mathbf{r}$ параллельно $\mathbf{r}$ и, следовательно, $d\mathbf{r} \equiv \mu(\mathbf{u})\mathbf{e}$. Поэтому левая часть второго тождества равна нулю и значит, поскольку $\lambda \neq 0$, имеем $(d\mathbf{e})^2 \equiv 0$. Следовательно, $d\mathbf{e} \equiv 0$ и $\mathbf{e} = \mathrm{const}$. □

Определение. *Векторная функция называется* k-компланарной*, если при любом* $\boldsymbol{u} \in U$ *вектор* $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ *параллелен некоторой* k*-плоскости* $L \subset \mathbb{E}^n$.

Следующая теорема обобщает предыдущий результат.

Теорема 5. *В. ф.* $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ k*-компланарна тогда и только тогда, когда векторные функции* $\boldsymbol{r}$, $d\boldsymbol{r}$, $\ldots, d^k\boldsymbol{r}$ *линейно зависимы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы докажем эту теорему лишь при $n = 3$. Итак, пусть векторная функция параллельна некоторой 2-плоскости L в евклидовом $\mathbb{E}^3$. Рассмотрим ее нормальный вектор $\mathbf{N}$=const. Тогда по условию теоремы $(\mathbf{r}(\mathbf{u}), \mathbf{N}) \equiv 0$. Дифференцируя это тождество, получим $(d\mathbf{r}, \mathbf{N}) \equiv 0$, $(d^2\mathbf{r}, \mathbf{N}) \equiv 0$. Отсюда следует, что векторы $\mathbf{r}$, $d\mathbf{r}$, $d^2\mathbf{r}$ линейно зависимы при любом $\mathbf{u} \in U$. Докажем достаточность условия. Если оно выполнено и $\mathbf{r}$, $d\mathbf{r}$ линейно независимы, то можно записать $d^2\mathbf{r} = \lambda(\mathbf{u})\mathbf{r} + \mu(\mathbf{u})d\mathbf{r}$. Рассмотрим в. ф. $\mathbf{N}(\mathbf{u}) = [\mathbf{r}, d\mathbf{r}] \neq 0$. Дифференцируя ее, получим $d\mathbf{N} = [\mathbf{r}, d^2\mathbf{r}] = \mu\mathbf{N}$. В силу (9) это значит, что векторная функция $\mathbf{N}$ имеет постоянное направление, а так как $\mathbf{r}(\mathbf{u})\perp\mathbf{N}$, то теорема в этом случае доказана. Если же векторы $\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}$ линейно зависимы, то $d\mathbf{r} = \lambda(\mathbf{u})\mathbf{r}$ и, значит, векторная функция $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ в силу теоремы (9) имеет постоянное направление в пространстве. □

2.3. Векторные функции скалярного аргумента. Круговые векторные функции.

Рассмотрим, в частности, в. ф. $\mathbf{r} : I = (a, b) \to \mathbb{E}^n$ одного скалярного аргумента, когда $m = 1$. Этот аргумент обозначим через t. В этом случае h также число и дифференциал в. ф. имеет вид $d\mathbf{r}(t, h) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)h$. Поэтому производная, которую мы обозначим штрихом, записывается в виде

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) := \mathbf{r}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}\,.$$

Якобиева матрица для в. ф. скалярного аргумента состоит из одного столбца и поэтому условие регулярности в. ф. сводится к отличию от нуля производной: $\mathbf{r}' \neq 0$. Рассмотрим в. ф., которым нет аналога в общем случае. Это две *круговые векторные функции.*

Определение. *Первой круговой называется в. ф.* $\boldsymbol{e}(t) : \mathbb{E} \to \mathbb{E}^2$, *которая каждому* $t \in \mathbb{E}^1$ *ставит в соответствие единичный вектор евклидовой плоскости, образующий ориентированный угол* t *с осью* OX *прямоугольных координат. Вторая круговая в. ф. определяется равенством* $\boldsymbol{g}(t) = \boldsymbol{e}(t + \frac{\pi}{2})$.

Из этого определения следует, что эти в. ф. являются периодическими с периодом 2π, имеют постоянный модуль, равный единице, и ортогональны: $(\mathbf{e}, \mathbf{g}) \equiv 0$. Их прямоугольные координаты на плоскости равны

$$\mathbf{e}(t) = (\cos t, \sin t), \quad \mathbf{g}(t) = (-\sin t, \cos t). \tag{10}$$

Находя производные, получим

$$\mathbf{e}'(t) = \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{g}'(t) = -\mathbf{e}(t).$$

В дальнейшем мы будем рассматривать круговые в. ф. также и в 3-мерном пространстве. Если при этом круговые в. ф. принадлежат плоскости XOY, то третья координата будет равна нулю. В этом случае обычно рассматривается также единичный вектор $\mathbf{k}$ оси OZ, дополняющий их до правого ортонормированного репера $\{\mathbf{e},\, \mathbf{g},\, \mathbf{k}\}$. Как и для всякого такого репера, справедливы тождества

$$(\mathbf{e}, \mathbf{g}) \equiv 0,\; (\mathbf{g}, \mathbf{k}) \equiv 0,\; (\mathbf{k}, \mathbf{e}) \equiv 0,$$

а также тождества

$$[\mathbf{e}, \mathbf{g}] \equiv \mathbf{k},\; [\mathbf{g}, \mathbf{k}] \equiv \mathbf{e},\; [\mathbf{k}, \mathbf{e}] \equiv \mathbf{g}\,.$$

ЛЕКЦИЯ 3. ТЕОРИЯ КРИВЫХ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

3.1. Понятие кривой. Параметризованные кривые.

Рассмотрим сначала кривые в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ произвольной размерности. Интуитивное представление о том, что такое кривая, дает следующее

Определение. *Подмножество* Γ *евклидовом пространстве* $\mathbb{E}^n$ *называется кривой, если всякая его точка* $\boldsymbol{x} \in \Gamma$ *обладает такой* ε*-окрестностью* $B(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$ *в* $\mathbb{E}^n$ *что пересечение* $\Gamma \cap B(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$ *гомеоморфно интервалу* $I \in \mathbb{E}$ *евклидовой прямой.*

Другими словами, с топологической точки зрения кривая локально, в окрестности всякой своей точки устроена как отрезок прямой. Однако на практике приходится иметь дело с кривыми в более широком понимании, которые не вмещаются в данное определение.

Примеры:

1) Окружность в целом не гомеоморфна отрезку прямой, но локально, в окрестности всякой своей точки удовлетворяет этому условию.

2) Пусть на плоскости заданы две точки F_1 и F_2, называемые фокусами, расстояние между которыми равно $2a$. Лемниската Бернулли есть множество точек плоскости, произведение расстояний которых до фокусов постоянно и равно a^2. Эта кривая имеет форму восьмерки. Она имеет особую точку самопересечения, в окрестности которой кривая устроена как крест.

Более общим и практически более употребительным является

Определение. *Параметризованной кривой класса* C^k, $(k \geq 1)$ *в евклидовом* $\mathbb{E}^n$ *называется отображение того же класса* $\boldsymbol{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$ *интервала вещественной прямой в это пространство.*

Таким образом, параметризованная кривая задается векторной функцией одного скалярного аргумента $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ или в координатах $x^i = x^i(t)$. Эти соотношения называются *параметрическими уравнениями* кривой, а образ $\mathbf{r}(I) \subset \mathbb{E}^n$ — ее *носителем.* Параметризованная кривая называется *регулярной*, если регулярна задающая ее векторная функция, т. е. $\mathbf{r}' \neq 0$. Заметим, что вместе с параметризацией задается и определенная ориентация кривой — направление, в котором параметр возрастает. В аналитической механике параметризованную кривую понимают как траекторию движения точки. При этом параметром обычно является время. Тогда условие регулярности означает, что скорость движения точки нигде не обращается в нуль.

Примеры:
1) В. ф. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{p}t$ задает прямую с опорной точкой $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$ и направляющим вектором $\mathbf{p} \neq 0$. Векторная функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{p}t^3$ задает тот же носитель — прямую, но так как $\mathbf{r}' = 3\mathbf{p}t^2$, эта параметризация не регулярна при $t = 0$. В. ф. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{p}t^2$ задает луч с началом $\mathbf{r}_0$. Эта точка является не регулярной и в то же время особой точкой луча.
2) Периодическая в. ф. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + a\mathbf{e}(t)$ задает на плоскости окружность с центром $\mathbf{r}_0$ радиуса a. Здесь $\mathbf{r}' = a\mathbf{g}(t) \neq 0$. Уравнение $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + a\mathbf{e}(nt)$ задает ту же окружность, но скорость по модулю в n раз больше: $\mathbf{r}' = na\mathbf{g}(nt)$.
3) Рассмотрим винтовую линию, лежащую на цилиндре радиуса a в $\mathbb{E}^3$. Она получается вращением точки вокруг оси цилиндра и одновременно ее равномерным переносом вдоль этой оси, пропорциональным углу поворота. Пусть $\omega = \text{const}$ — угловая скорость вращения точки. Тогда $\varphi = \omega t$ есть угол поворота за время t и $v = b\varphi$ – пропорциональная ему линейная скорость. Радиус-вектор точки будет иметь вид

$$\mathbf{r} = a\mathbf{e}(\varphi) + b\varphi\mathbf{k}, \quad a, b = \text{const}.$$

Это регулярная параметризация.
4) Рассмотрим на евклидовой плоскости кривую, заданную векторной функцией $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin 2t)$. Нетрудно видеть, что эта параметризация регулярна. Кривая лежит внутри единичного квадрата с центром в начале координат и при $0 \leq t \leq 2\pi$ ее точка дважды, при $t = \frac{\pi}{2}$ и $t = \frac{3\pi}{2}$, проходит через начало координат, образуя восьмерку. Начало координат является регулярной, но особой точкой этой кривой.

3.2. Длина дуги и натуральный параметр кривой.

Кривая и параметризованная кривая — это разные понятия. Один и тот же носитель, как мы видели в примерах, может быть получен с помощью разных в. ф., т. е. иметь разные параметрические уравнения. Перейдем от параметра t к другому параметру τ с помощью диффеоморфизма $t = f(\tau)$. Тогда мы получим в. ф. $\mathbf{g}(\tau) = \mathbf{r}(f(\tau))$ с тем же носителем. Такие параметризации называются *эквивалентными*. Условие регулярности при этом не нарушится. В самом деле,

$$\frac{d\mathbf{g}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{df}{d\tau},$$

а так как $\frac{df}{d\tau} \neq 0$, то и $\frac{d\mathbf{g}}{d\tau} \neq 0$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только регулярно параметризованные кривые. Для них существует параметр, обладающий рядом хороших свойств — это длина дуги кривой.

Определение. *Ориентированной длиной дуги параметризованной кривой между точками с параметрами* t_1, t_2 *называется число*

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{r}'(t)|dt. \tag{11}$$

Заметим, что это число может быть положительным и отрицательным в зависимости от положения заданных точек.

Выберем на кривой точку $t = t_0$ и за параметр точки $\mathbf{r}(t)$ кривой, принадлежащей окрестности начальной точки, примем ориентированную длину дуги s между ними. Связь между параметрами t и s определяется функцией

$$s = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{r}'(t)|dt = f(t). \tag{12}$$

Эта функция дает замену параметра $t \to s$. Дифференцируя интеграл по верхнему пределу, получим $\frac{df}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| > 0$, так что s определяет регулярную параметризацию кривой и, более того, не изменяет ее ориентацию. Чтобы получить новое параметрическое уравнение, выразим t через $s : t = f^{-1}(s)$. В итоге получим $\mathbf{g}(s) = \mathbf{r}(f^{-1}(s))$, что решает задачу.

Теорема 6. *Длина дуги является инвариантом кривой, не зависит от выбора исходного параметра и зависит лишь от выбора начальной точки.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть наряду с параметром t кривая отнесена к параметру τ и $t = f(\tau)$ — диффеоморфизм. Пусть $t_0 = f(\tau_0)$ и сохраняется ориентация кривой: $\frac{df}{d\tau} > 0$. Тогда $|\mathbf{r}'| = |\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}| = |\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}|\frac{d\tau}{dt}$. Вычисляя длину дуги и сделав в формуле (12) замену параметра, получим

$$s(t) = \int_{f(\tau_0)}^{f(\tau)} \left|\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\right| d\tau = s(\tau).$$

Если же заменить начальную точку, то этот праметр измениться на аддитивную постоянную $\bar{s} = s + c$. Это и есть наше утверждение. □

3.3. Касательная прямая кривой.

Рассмотрим на параметризованной кривой регулярную точку $\mathbf{r}(t)$ и в ее окрестности точку $\mathbf{r}(t+h)$. Проведем через них прямую $L(h)$, называемую *секущей прямой.* Ее положение зависит от выбора h.

Определение. *Касательной прямой в данной точке называется предельное положение секущей* $T = \lim_{h\to 0} L(h)$.

Найдем уравнение касательной. Вектор, соединяющий две рассматриваемые точки, равен

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t)h + \mathbf{0}(t,h).$$

В пределе, если он существует, это дает направляющий вектор $\mathbf{r}'(t)$. Он называется *касательным вектором кривой* в точке t. Поэтому уравнение касательной прямой в регулярной точке имеет вид

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(t) + \lambda\mathbf{r}'(t), \quad -\infty < \lambda < \infty. \tag{13}$$

Как мы видели, при переходе к другому параметру $\frac{d\mathbf{g}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{df}{d\tau}$. Таким образом, касательный вектор зависит от параметризации кривой, но его направление от параметризации не зависит. Поэтому касательная прямая определена инвариантно, независимо от выбора параметра кривой.

Рассмотрим, в частности, натуральный параметр. Следующее свойство выделяет его среди других.

Теорема 7. *Параметризация кривой является натуральной тогда и только тогда, когда касательный вектор является единичным.*

Доказательство. Для доказательства необходимости продифференцируем формулу (12) по s. Получим $1 = |\dot{\mathbf{r}}(s)|$, где точкой обозначена производная по натуральному параметру. Обратно, пусть параметр t обладает этим свойством: $|\mathbf{r}'|(t) = 1$. Тогда из той же формулы имеем $s = t - t_0$ или $t = t_0 + s$. Это значит, что параметр t отсчитывает длину дуги кривой от начальной точки. В частности, выбрав $t_0 = 0$, получим $t = s$. $\square$

ЛЕКЦИЯ 4. ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ.

4.1. Неявное и приведенное уравнения плоской кривой

Плоскую кривую можно задать параметрическим уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ и если расположить ее в плоскости XY, то в декартовых координатах это уравнение имеет вид

$$x = x(t), \quad y = y(t). \tag{14}$$

Наряду с этим плоскую кривую часто задают *неявным уравнением* $F(x, y) = 0$. При этом функция F должна удовлетворять некоторым условиям, ибо имеет место

Теорема 8. (Уитни) *Для любого замкнутого подмножества* $M \subset \mathbb{E}^n$ *существует гладкая функция* $F(x^1, \dots, x^n)$ *такая, что точка* $(x^1, \dots, x^n)$ *принадлежит* M *тогда и только тогда, когда* $F(x^1, \dots, x^n) = 0$.

В связи с этим возникает вопрос: когда неявное уравнение

$$F(x, y) = 0 \tag{15}$$

действительно задает кривую на плоскости?

Теорема 9. *Непустое подмножество* $\Gamma = \{(x, y) : F(x, y) = 0\}$ *есть кривая на плоскости, если: 1) функция* F *дифференцируемая; 2) В точках этого множества* $\mathrm{grad} F\Big|_\Gamma \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует непосредственно из теоремы 3. В самом деле, отображение $F : (x, y) \to z = F(x, y)$ дифференцируемо, а его якобиева матрица $J = (F_x, F_y)$ имеет в точках множества $F = 0$ максимально возможный ранг 1. Поэтому это отображение регулярно, а точка $z = 0$ является регулярным значением. Осталось заметить, что $\Gamma = F^{-1}(0)$. $\square$

Поясним по этому случаю теорему о неявных функциях. В силу этой теоремы для каждой точки $(x, y) \in \Gamma$ существует окрестность U, в которой уравнение $F = 0$ локально разрешимо либо относительно x, либо относительно y. Если, например, производная по y отлична от нуля, то имеем $y = f(x) : F(x, f(x)) \equiv 0$, где $f(x)$ — дифференцируемая функция, определенная в некотором интервале I оси X. Такое уравнение называется *приведенным уравнением* кривой. Оно всегда задает кривую с графиком: $\Gamma = \{(x, f(x)) \in \mathbb{E}^2\}$, $x \in I$. В самом деле, отображение $x \to (x, f(x))$ непрерывно, а обратное к нему осуществляется с помощью проекции, параллельной оси Y, которая также непрерывна. Если же в окрестности данной точки $F_x \neq 0$, $\square$

Примеры.

1) Рассмотрим окружность $F = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Функция, стоящая в левой части, гладкая с градиентом $\mathrm{grad}F = (2x, 2y)$, который в точках окружности не обращается в нуль. Если $F_y = 2y \neq 0$, то при этом условии, исключающем точки окружности на оси OX, мы имеем решения $y = \sqrt{1-x^2}$ и $y = -\sqrt{1-x^2}$. Каждое из них определяет график соответствующей функции — полуокружность. С другой стороны, в области $F_x = 2x \neq 0$, исключающей точки окружности $(0, \pm 1)$, кривая может быть представлена в аналогичном виде $x = \pm\sqrt{1-y^2}$.

2) Колебания материальной точки массы $m = 1$ на евклидовой прямой около положения равновесия описывается дифференциальным уравнением $x'' = -\omega x$, $\omega = \mathrm{const} > 0$. Кинетическая и потенциальная энергия точки вычисляются по формулам $T = \frac{x'^2}{2}$, $U = \frac{\omega x^2}{2}$. Поэтому полная энергия равна $E = \frac{1}{2}(\omega x^2 + x'^2)$. Закон движения точки описывается фазовой кривой в плоскости переменных $x, y = x'$, вдоль которой полная энергия постоянна: $E = \mathrm{const}$. Следовательно, кривая имеет неявное уравнение $\omega x^2 + y^2 = \mathrm{const}$. Это эллипсы.

Как связаны параметрическое и неявное уравнения кривой? Если регулярная кривая задана параметрически, то мы получим ее неявное уравнение, исключив параметр t. Например, при $x' \neq 0$ это можно сделать, выразив t через x : $t = t(x)$. Тогда получим $y = y(t(x)) = f(x)$. Это приведенное уравнение является частным случаем неявного $F = f(x) - y = 0$.

Пример. Окружность радиуса a с центром $\mathbf{r}_0$ имеет параметрическое уравнение $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathrm{a}\mathbf{e}(\mathrm{t})$ или в координатах $x = x_0 + a\cos t$, $y = y_0 + a\sin t$. Здесь параметр t легко исключается и мы получим неявное уравнение $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$.

4.2. Касательная и нормаль.

Уравнение касательной параметризованных кривых мы уже определили: в точке $\mathbf{r}_0$ ее уравнение $\mathbf{R} = \mathbf{r}_0 + \lambda\mathbf{r}'_0$. Для плоских кривых в точке оно имеет вид

$$X = x_0 + \lambda x'_0, \quad Y = y_0 + \lambda y'_0.$$

После исключения параметра λ получим каноническое уравнение касательной

$$\frac{X - x_0}{x'_0} = \frac{Y - y_0}{y'_0}. \tag{16}$$

Если кривая задана приведенным уравнением $y = y(x)$, то поскольку $\frac{y'}{x'} = y'_x$, получим отсюда

$$Y = k(X - x_0) + y_0, \quad k = y'_x(x_0).$$

Прямая, ортогональная касательной в точке кривой, называется *нормалью.* Чтобы получить ее уравнение, надо повернуть касательный вектор на прямой угол. Такой поворот против часовой стрелки можно сделать с помощью оператора поворота, который в прямоугольных координатах имеет матрицу $I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда получим вектор нормали, который в данной точке имеет вид $\mathbf{N}_0 = I\mathbf{r}'_0 = (-y'_0, x'_0)$. Поэтому

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_0 + \lambda I \mathbf{r}'_0\,. \tag{17}$$

Отсюда имеем каноническое уравнение нормали

$$\frac{X - x_0}{-y'_0} = \frac{Y - y_0}{x'_0}\,, \tag{18}$$

которое можно записать также в виде

$$Y = -\frac{1}{k}(X - x_0) + y_0\,, \quad k = y'_x(x_0).$$

Рассмотрим теперь случай, когда кривая задана неявным уравнением. Пусть $x = x(t), y = y(t)$ — параметризация этой кривой. Подставив эти функции в (15), получим тождество $F(x(t), y(t)) \equiv 0$. Дифференцируя его, получим новое тождество

$$(\mathrm{grad} F, \mathbf{r}') = F_x\, x'(t) + F_y\, y'(t) \equiv 0.$$

Отсюда следует, что если в точке кривой (x_0, y_0) градиент $\mathrm{grad} F|_0 \neq 0$, то в ней этот вектор направлен по нормали и поэтому каноническое уравнение нормали имеет вид

$$\frac{X - x_0}{F^0_x} = \frac{Y - y_0}{F^0_y}\,. \tag{19}$$

С другой стороны, с точностью до множителя $x' : y' = -F_y : F_x$. Поэтому уравнение касательной в той же точке получим в виде

$$\frac{X - x_0}{-F^0_y} = \frac{Y - y_0}{F^0_x} \quad \text{или} \quad F^0_x(X - x_0) + F^0_y(Y - y_0) = 0\,. \tag{20}$$

4.3. Особые точки плоской кривой.

Рассмотрим плоскую кривую, заданную неявным уравнением $F(x, y) = 0$.

Определение. *Особыми называются точки кривой, в которых* $\mathrm{grad} F = 0$.
Другими словами, это точки кривой, в которых отображение $z = F(x, y)$ не регулярно. Таким образом, для нахождения особых точек мы должны рассмотреть систему трех уравнений с двумя неизвестными

$$F(x, y) = 0, \quad F_x(x, y) = 0, \quad F_y(x, y) = 0, \tag{21}$$

которая не всегда совместна.

В особой точке найденное выше уравнение касательной не имеет смысла. Однако, это не значит, что ее не существует. Для того, чтобы выяснить ситуацию с касательными, продифференцируем тождество $F_x x'(t) + F_y y'(t) \equiv 0$ еще раз, рассмотрев его затем в особой точке. Учитывая, что в особой точке $F_x^0 = 0$, $F_y^0 = 0$, получим

$$F_{xx}^0\, {x'_0}^2 + 2F_{xy}^0\, x'_0 y'_0 + F_{yy}^0\, {y'_0}^2 = 0.$$

Если в этой точке вторые производные не все обращаются в нуль, то она называется *особой точкой первого порядка.* Тогда для нахождения касательного вектора или, что удобнее, углового коэффициента касательной, мы имеем квадратное уравнение

$$F_{xx}^0 + 2F_{xy}^0 k + F_{yy}^0 k^2 = 0. \tag{22}$$

Наличие касательных зависит от знака его дискриминанта $\Delta = {F_{xy}^0}^2 - F_{xx}^0 F_{yy}^0$. Следовательно, возможно три случая.

1) $\Delta > 0$. В такой особой точке имеется две касательных. Она называется *узловой.*

Пример. Рассмотрим кривую, заданную параметрическим уравнением $x = \cos t$,
$y = \sin 2t$. Это уже знакомая нам "восьмерка". Так как $y = 2\cos t\sqrt{1 - \cos t^2}$, то неявное уравнение этой кривой $4x^2(1 - x^2) - y^2 = 0$. Находя частные производные, запишем систему уравнений (21)

$$F = 4x^2(1 - x^2) - y^2 = 0, \quad F_x = 8x(1 - 2x^2) = 0, \quad F_y = -2y = 0.$$

Этой системе удовлетворяет только одна точка $\mathbf{r}_0 = (0, 0)$ — начало координат. Вычислим вторые производные:

$$F_{xx} = 8(1 - 6x^2), \quad F_{xy} = 0, \quad F_{yy} = -2\,.$$

Их значения в особой точке равны $\{8,\, 0,\, -2\}$ соответственно, а дискриминант равен $\Delta = 16 > 0$. Как и следовало ожидать, это узловая точка. Решая квадратное уравнение $4 - k^2 = 0$, получим следующие значения угловых коэффициентов касательных: $k_{1,2} = \pm 2$. Следовательно, уравнения касательных в этой особой точке $y = \pm 2x$.

Заметим, что особая точка "восьмерки"при ее параметрическом задании является регулярной. Особая точка проходится при двух значениях параметра: $t = \frac{\pi}{2}$ и $t = \frac{3\pi}{2}$. Касательный вектор $\mathbf{r}' = (-\sin t, 2\cos 2t)$ при этих значениях параметра равен соответственно $\mathbf{r}'(\frac{\pi}{2}) = (-1, -2)$ и $\mathbf{r}'(\frac{3\pi}{2}) = (1, -2)$. Это направляющие векторы соответствующих касательных.

2) Если $\Delta < 0$, то квадратное уравнение не имеет вещественных корней. Следовательно, в такой особой точке нет касательных. Это случай *изолированной* особой точки.

Пример. Пусть кривая имеет неявное уравнение $(x-1)(x^2+y^2) = 0$. Она распадается на прямую $x - 1 = 0$ и на не лежащую на ней точку — начало координат. Это изолированная особая точка и в ней нет касательных. В самом деле, проводя вычисления, мы получим квадратное уравнение $1 + k^2 = 0$, которое не имеет вещественных корней.

3) Пусть теперь $\Delta = 0$. Мы имеем кратный корень и только одну касательную, но зато двойную (это отличает ее от обычной касательной). Такая особая точка называется *точкой возврата.* Причина такого названия видна из следующего примера.

Пример. Кривая с неявным уравнением $y^2 = x^3$ называется полукубической параболой. Она имеет две ветви: $y = x\sqrt{x}$ и $y = -x\sqrt{x}$, которые сходятся в начале координат и касаются друг друга в этой точке. Это точка возврата. Вычисления показывают, что в этой точке $\Delta = 0$, а квадратное уравнение имеет вид $k^2 = 0$ с кратным корнем $k = 0$. Поэтому имеем двойную касательную в начале координат – ось X.

Если все вторые производные функции F в особой точке также обращаются в нуль, то надо продифференцировать указанное выше тождество еще раз. Вычислив результат в особой точке, придем к кубическому уравнению для угловых коэффициентов касательных. Если при этом производные третьего порядка не все равны нулю, то мы имеем дело с *особой точкой второго порядка*, в которой может существовать до трех касательных. Вообще, если производные k-го порядка в особой точке все равны нулю, но существуют ненулевые производные $(k+1)$-го порядка, то это *особая точка k-го порядка.*

ЛЕКЦИЯ 5. КРИВИЗНА ПЛОСКОЙ КРИВОЙ.

5.1. Сопровождающий репер кривой.

Оказывается, в каждой точке регулярно параметризованной кривой можно построить подвижный, меняющийся от точки к точке, ортонормированный репер. Тогда его движение показывает, как локально устроена кривая в окрестности каждой своей точки.

Для начала мы предположим, что кривая отнесена к натуральному параметру: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. Обозначая производные по этому параметру точкой, рассмотрим единичный касательный вектор $\dot{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{e}$, направленный в сторону возрастания параметра. Дополним его до ортонормированного репера единичным вектором $\mathbf{n}$ нормали. Как найти этот вектор? Для этого рассмотрим вектор второй производной $\ddot{\mathbf{r}}$. Он называется *вектором кривизны.* Так как вектор $\dot{\mathbf{r}}$ единичный, то вектор $\ddot{\mathbf{r}}$ ему ортогонален и нам осталось только его пронормировать. Итак, мы построили ортонормированный репер

$$\mathbf{e} = \dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{n} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{|\ddot{\mathbf{r}}|}, \tag{23}$$

который называется *сопровождающим репером* плоской кривой.

Как найти векторы сопровождающего репера, если параметризация кривой произвольная? Проще всего найти единичный касательный вектор $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}$. Он имеет координаты

$$\mathbf{e} = \frac{(x',\, y')}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

и направлен в сторону возрастания параметра.

Рассмотрим теперь вектор второй производной $\mathbf{r}''$. Вообще говоря, он не ортогонален касательной и, более того, может оказаться, что в некоторых точках векторы $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ линейно зависимы. Мы предположим, что $[\mathbf{r}', \mathbf{r}''] \neq 0$. При этом условии кривая называется *бирегулярной.* Чтобы получить вектор нормали, надо взять касательный вектор и применить к нему оператор поворота. С точностью до знака $\varepsilon = \pm 1$ получим $\mathbf{N} = \varepsilon(-y', x')$ и тогда

$$\mathbf{n} = \frac{\varepsilon(-y', x')}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\,. \tag{24}$$

Какой выбрать знак? Для этого заметим, что, как видно из формулы $\mathbf{r}'(t+h) - r'(t) = r''(t)|h| + O(t,h)$, вектор $\mathbf{r}''$ всегда направлен в сторону вогнутости кривой. В ту же сторону направим и вектор нормали.

При этом условии скалярное произведение $(\mathbf{N}, \mathbf{r}'') > 0$ или в координатах $\varepsilon(x'y'' - y'x'') > 0$ и, значит, $\varepsilon = \operatorname{sgn}(x'y'' - y'x'')$. Тем самым сопровождающий репер однозначно определен.

Задача. *Для какой кривой во всех ее точках векторы $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ линейно зависимы?*

5.2. Формулы Френе и кривизна плоской кривой.

Посмотрим, как изменяется сопровождающий репер от точки к точке. Для этого отнесем кривую к натуральному параметру и наряду с точкой $\mathbf{r}(s)$ рассмотрим точку $\mathbf{r}(s+h)$ в ее окрестности. Тогда

$$\mathbf{e}(s+h) = \mathbf{e}(s) + \dot{\mathbf{e}}(s)h + \mathbf{0}'^2(s,h), \quad \mathbf{n}(s+h) = \mathbf{n}(s) + \dot{\mathbf{n}}(s)h + \mathbf{0}''^2(s,h),$$

где $\mathbf{0}^2(s,h)$ — векторы второго порядка малости относительно h. Отсюда видно, что изменение сопровождающего репера в главной своей части зависит от первых производных векторов этого репера. При этом $\dot{\mathbf{e}} = \ddot{\mathbf{r}}$ есть вектор кривизны, направленный, как мы видели, по нормали. Поэтому $\dot{\mathbf{e}} = k(s)\mathbf{n}$, где скалярная функция $k(s) = |\ddot{\mathbf{r}}| \geq 0$ называется *кривизной*, а обратная ей величина $R = \frac{1}{k}$ — *радиусом кривизны.* Что касается производной вектора $\mathbf{n}$, то она ортогональна ему и поэтому направлена по касательной. Следовательно, $\dot{\mathbf{n}} = \lambda\mathbf{e}$. Чтобы найти этот множитель, продифференцируем тождество $(\mathbf{e}, \mathbf{n}) \equiv 0$. Получим $k\mathbf{n}^2 + \lambda\mathbf{e}^2 \equiv 0$, откуда $\lambda = -k$. В итоге приходим к следующим соотношениям

$$\frac{d\mathbf{e}}{ds} = k\mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k\mathbf{e}. \tag{25}$$

Они называются *уравнениями Френе.* Таким образом, мы пришли к следующему выводу

Теорема 10. *Движение сопровождающего репера вдоль регулярно параметризованной плоской кривой определяется уравнениями Френе и зависит только от ее кривизны.*

Как вычислить кривизну? Если кривая задана в натуральной параметризации, то, как уже мы видели, $k = |\ddot{\mathbf{r}}|$. Рассмотрим теперь случай, когда кривая отнесена к произвольному параметру: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Заметим, что $|\ddot{\mathbf{r}}| = |[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|$ и, следовательно, кривизну можно выразить так $k = |[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|$. Выразим входящие сюда производные по s через производные по произвольному параметру

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}'\dot{t}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}''(\dot{t})^2 + \mathbf{r}'\ddot{t}. \tag{26}$$

Тогда получим $k = |[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']||\dot{t}|^3$. Но $|\dot{t}| = \frac{1}{|\mathbf{r}'|}$ и, следовательно,

$$k = \frac{|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|}{|\mathbf{r}'|^3}\,. \tag{27}$$

В координатах это дает формулу

$$k(t) = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}\,. \tag{28}$$

В случае, когда кривая задана приведенным уравнением $y = f(x)$, в качестве параметра выберем x. Тогда получим $x' = 1$, $x'' = 0$ и, следовательно,

$$k(x) = \frac{|y''_x|}{(1 + {y'_x}^2)^{3/2}}\,. \tag{29}$$

Пример. Рассмотрим параболу $y = x^2$. Для вычисления ее кривизны применим формулу (29). Имеем $y'_x = 2x$, $y''_x = 2$ и тогда

$$k(x) = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}\,.$$

Обратим внимание на то, что максимальное значение кривизна параболы достигает при $x = 0$, т. е. в ее вершине.

5.3. Геометрический смысл кривизны. Эволюта.

Чтобы выяснить геометрический смысл кривизны, отнесем кривую к натуральному параметру. Рассмотрим вращение единичного касательного вектора при движении точки по кривой. Отложим для наглядности касательные векторы $\mathbf{e}(s)$ от начала координат. Тогда $\mathbf{e}(s)$ будет описывать дугу окружности S единичного радиуса. Заметим, что s является натуральным параметром заданной кривой, но не окружности. Рассмотрим изменение параметра от значения s к значению $s + h$ и обозначим через φ соответствующий угол поворота. Тогда этот угол является некоторой функцией дуги кривой.

Теорема 11. *Кривизна кривой* Γ *есть модуль скорости поворота ее касательного вектора по отношению к дуге, на которой этот поворот происходит.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим вектор

$$\Delta\mathbf{e} = \mathbf{e}(s + h) - \mathbf{e}(s) = \dot{\mathbf{e}}(s)h + \mathbf{O}^1(s, h).$$

Он направлен по хорде окружности S, а его длина с точностью до малых первого порядка равна модулю угла φ, измеренному в радианах: $|\Delta\mathbf{e}| = |\varphi| + \varepsilon$. С другой стороны, $|\Delta\mathbf{e}| = |\dot{\mathbf{e}}(s)||h| + O^2(s, h)$, где O^2 имеет второй порядок малости по отношению к h. Но в силу первой формулы Френе $|\dot{\mathbf{e}}| = k(s)$ и поэтому $|\Delta\mathbf{e}| = k(s)|h| + O^2(s,h)$. Таким образом, имеем $k(s)|h| = |\varphi| + O^2(s,h)$, откуда, рассматривая предел при $h \to 0$, получим

$$k(s) = \lim_{h\to 0}\left|\frac{\varphi}{h}\right|,$$

что доказывает утверждение. □

Для того, чтобы наглядно представить изменение кривизны вдоль кривой, рассмотрим множество Γ_1 *центров кривизны* кривой. Так называются точки на ее нормалях со стороны вогнутости, расстояние которых до соответствующей точки кривой равно радиусу кривизны R. В результате получим, некоторую кривую, которая называется *эволютой* заданной кривой. Из определения следует параметрическое уравнение эволюты

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t) + R(t)\mathbf{n}(t).$$

Учитывая формулы (24) и (28), запишем это уравнение в координатах

$$x_1(t) = x(t) - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''}, \quad y_1(t) = y(t) + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''}. \qquad (30)$$

Пример. Рассмотрим параболу $y = x^2$ с параметризацией $\mathbf{r} = (x, x^2)$. Ее кривизну мы уже подсчитали выше. Радиус кривизны равен $R = \frac{(1+4x^2)^{3/2}}{2}$. Так как касательный вектор имеет координаты $\mathbf{r}' = (1, 2x)$, то нормальный вектор равен $\mathbf{N} = (-2x, 1)$. Мы выбрали такое его направление, так как $\mathbf{r}'' = (0, 2)$ и $(\mathbf{N}, \mathbf{r}'') = 2 > 0$. Единичный вектор нормали имеет координаты $\mathbf{n} = \frac{(-2x,1)}{\sqrt{1+4x^2}}$. Используя уравнение эволюты $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + R\mathbf{n}$, получим $x_1 = -4x^3,\ y_1 = 3x^2 + \frac{1}{2}$. Это ее параметрическое уравнение. Исключая x, найдем уравнение эволюты в неявном виде $27x^2 = 16(y - \frac{1}{2})^3$. Это полукубическая парабола.

Задача. *Дана кривая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, $s \in I$. Рассмотрим гладкое отображение, которое всякой паре чисел (s, λ) прямоугольника $I \times \mathbb{R}$ ставит в соответствие точку $\boldsymbol{r}(s, \lambda) = \boldsymbol{r}(s) + \lambda\boldsymbol{n}(s)$ на соответствующей нормали этой кривой. Показать, что множество критических точек этого отображения есть эволюта заданной кривой.*

ЛЕКЦИЯ 6. ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА ПЛОСКИХ КРИВЫХ.

6.1. Семейства плоских кривых.

Определение. *Говорят, что на плоскости задано k -параметрическое семейство кривых, если в их уравнение входит k независимых параметров.*

В неявной форме уравнение семейства записывается в виде

$$F(x, y, a_1, \ldots, a_k) = 0.$$

Будем предполагать, что зависимость функции от параметров гладкая, а сами параметры изменяются в некоторой области допустимых значений. При этом каждому фиксированному набору параметров соответствует определенная кривая этого семейства. Поясним сказанное на примерах.

Примеры.
1) Множество всех прямых на плоскости $y = kx + b$ зависит от двух параметров, принимающих произвольные значения. В частности, множество прямых $y = kx$ образует пучок с центром в начале координат.
2) Множество всех окружностей $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$ зависит от трех параметров, а множество окружностей $(x - a)^2 + y^2 = 1$ единичного радиуса с центрами на оси X от одного. Множество концентрических окружностей $x^2 + y^2 = a^2$ зависит также от одного параметра.

6.2. Огибающая 1-параметрического семейства.

В дальнейшем мы будем рассматривать только 1-параметрические семейства

$$F(x, y, a) = 0, \tag{31}$$

где каждому значению параметра $a \in I$ соответствует кривая, возможно с особыми точками.

Определение. *Огибающей 1-параметрического семейства $\{\Gamma(a)\}$ плоских кривых называется кривая, которая в каждой своей точке касается некоторой кривой этого семейства.*

Точка касания кривой семейства с огибающей называется *характеристической точкой.* Огибающая существует не всегда. Обратимся к приведенным выше примерам. В случае пучка прямых существует лишь одна характеристическая точка, не образующая кривой. У семейства окружностей с центрами на оси X существует две прямые $y = \pm 1$, огибающие это семейство. У семейства концентрических окружностей огибающей нет. Когда огибающая существует и как ее находить? Укажем признак существования огибающей и способ ее отыскания.

Теорема 12. *Если огибающая 1-параметрического семейства кривых (31) существует, то функции $x = x(a)$, $y = y(a)$, задающие ее параметрические уравнения, являются решением следующей системы двух уравнений с двумя неизвестными*

$$F(x, y, a) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a}(x, y, a) = 0\,. \tag{32}$$

Доказательство. Пусть $F(x, y, a) = 0$ — уравнение семейства. Огибающая, если она существует, состоит из характеристических точек — точек касания. Но каждая такая точка соответствует некоторой кривой семейства и, значит, некоторому значению параметра этого семейства. Поэтому огибающую следует искать в виде $x = x(a)$, $y = y(a)$. Какие условия мы имеем на эти две неизвестные функции? Во-первых, точки огибающей принадлежат кривым семейства, т. е. их координаты должны удовлетворять уравнению семейства при том же значении параметра. Поэтому имеем тождество (условие принадлежности)

$$F(x(a), y(a), a) \equiv 0.$$

Дифференцируя его по параметру a, получим новое тождество

$$F_x(x(a), y(a), a)\frac{dx}{da} + F_y(x(a), y(a), a)\frac{dy}{da} + F_a(x(a), y(a), a) \equiv 0.$$

Здесь $\mathrm{grad} F = (F_x, F_y)$ — нормальный вектор кривой $\Gamma(a)$ семейства, $\mathbf{r}'_a = (\frac{dx}{da}, \frac{dy}{da})$ — касательный вектор огибающей в той же точке. Второе условие заключается в том, что в характеристических точках эти два вектора должны быть ортогональны (условие касания):

$$(\mathrm{grad} F, \mathbf{r}'_a) = F_x\frac{dx}{da} + F_y\frac{dy}{da} \equiv 0.$$

Следовательно, из предыдущего тождества получаем $F_a(x(a), y(a), a) \equiv 0$. Этим доказано, что функции $x(a), y(a)$ должны удовлетворять системе (32). □

Определение. *Решение системы (32) называется дискриминантным множеством данного семейства.*

Может оказаться, что дискриминантное множество и не представляет собой кривую. Проиллюстрируем это на примере.

Пример. Рассмотрим опять пучок прямых $F = ax - y = 0$. Система (32) имеет вид

$$ax - y = 0, \quad x = 0$$

и имеет решение $x = 0$, $y = 0$. Это центр пучка.

В связи с этим возникает вопрос, что может представлять собой дискриминантное множество и в каком случае оно является огибающей семейства? Ответ получается следующий:

Теорема 13. *Дискриминантное множество* Γ *является огибающей, если в точках этого множества* $\mathrm{grad} F\Big|_\Gamma \neq 0$, *множеством особых точек кривых семейства при* $\mathrm{grad} F\Big|_\Gamma = 0$ *или вырождается в точку.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, мы нашли решение системы (32). Подставив его в ее уравнения, получим два тождества. Первое из них $F(x(a), y(a), a) \equiv 0$ продифференцируем по параметру. С учетом второго тождества получим новое тождество

$$(\mathrm{grad} F, \mathbf{r}'_a) = F_x \frac{dx}{da} + F_y \frac{dy}{da} \equiv 0.$$

В каких случаях оно может выполняться? 1) Если в точках дискриминантного множества $\mathrm{grad} F \neq 0$ и $\mathbf{r}'_a \neq 0$, то оно означает ортогональность этих ненулевых векторов и значит мы имеем дело с огибающей; 2) Тождество выполняется в силу того, что при любых значениях параметра a мы имеем $\mathrm{grad} F\Big|_\Gamma \equiv 0$. Тогда мы имеем дело с множеством особых точек (п. 4.3); 3) Тождество выполняется в силу того, что $\mathbf{r}'_a = (\frac{dx}{da}, \frac{dy}{da}) \equiv 0$. Тогда $x = c_1$, $y = c_2$ суть константы и мы получаем точку. Теорема доказана. $\square$

Заметим, что эти случаи могут появляться одновременно в разных комбинациях.

Пример. Рассмотрим семейство кривых $(x-a)^3 - (y-a)^2 = 0$. Они получены из полукубической параболы $y^2 = x^3$ параллельным переносом вдоль биссектрисы $y = x$. Найдем дискриминантное множество. Дифференцируя по параметру a, получим систему

$$(x-a)^3 - (y-a)^2 = 0, \quad 3(x-a)^2 - 2(y-a) = 0.$$

Отсюда получаем $(x-a)^3(1 - \frac{9}{4}(x-a)) = 0$. Таким образом, эта система имеет решения $x = a, y = a$ и $x = a + \frac{4}{9}, y = a + \frac{8}{27}$. Это две параллельные прямые с уравнениями $y = x$ и $y = x - \frac{4}{27}$. Нетрудно видеть, что первая из них есть множество особых точек, образованных точками возврата, а вторая — огибающая.

Теорема 14. *Эволюта кривой есть огибающая ее нормалей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дана регулярная кривая, заданная уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Тогда ее нормали задаются уравнениями $\rho = \mathbf{r}(t) + \lambda\mathbf{n}(t)$ или в неявном виде $(\mathbf{r}', (\rho - \mathbf{r}(t)) = 0$. При изменении параметра t это дает нам 1-параметрическое семейство. Дифференцируя по параметру, получим $\mathbf{r}''(\rho - \mathbf{r}) - \mathbf{r}'^2 = 0$. Из этих двух соотношений найдем λ. Из первого мы имеем $\rho - \mathbf{r} = \lambda\mathbf{n}$ и подставляя это во второе, получим $\lambda(\mathbf{r}'', \mathbf{n}) = \mathbf{r}'^2$. Используя оператор поворота I, единичный вектор нормали можно получить из единичного касательного вектора $\mathbf{n} = \frac{I\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}$. В результате предыдущее равенство принимает вид $\frac{\lambda(\mathbf{r}'', I\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}'|} = \mathbf{r}'^2$, откуда $\lambda = \frac{|\mathbf{r}'|^3}{(I\mathbf{r}', \mathbf{r}'')} = R$. Но так как для любой пары векторов на плоскости $(I\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|$, то это выражение дает нам радиус кривизны кривой. В итоге имеем $\rho = \mathbf{r}(t) + R\mathbf{n}(t)$, что доказывает теорему. $\square$

ЛЕКЦИЯ 7. КРИВЫЕ В 3-МЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

7.1. Уравнения пространственной кривой.

Кривая в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ может быть задана разными способами:

1) Параметрическими уравнениями $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ или в декартовых координатах

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

При регулярной параметризации касательный вектор $\mathbf{r}' = (x', y', z') \neq 0$. В частности, кривая может быть отнесена к натуральному параметру s, который связан с параметром t формулой

$$s = \int_{t_\circ}^{t} |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_{t_\circ}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt.$$

Так же, как и для плоских кривых, касательный вектор $\dot{\mathbf{r}}$ в этом случае является единичным и поэтому вектор второй производной $\ddot{\mathbf{r}}$ к нему ортогонален. Он называется *вектором кривизны* кривой.

2) Кривая может быть задана неявными уравнениями

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0. \tag{33}$$

Каждое из этих уравнений задает, вообще говоря, поверхность, а кривая есть пересечение этих поверхностей. Однако, не всегда такая система задает кривую. Для того, чтобы прояснить ситуацию, рассмотрим якобиеву матрицу

$$J = \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix} \tag{34}$$

и применим теорему о неявных функциях.

Теорема 15. *Непустое множество* Γ *решений системы (33) есть регулярно параметризованая кривая в пространстве, если: 1) функции* F, G *гладкие; 2) на этом множестве* $\operatorname{rank} J=2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как ранг системы максимален, то по теореме о неявных функциях ее можно локально разрешить относительно двух переменных. Рассмотрим, например, окрестность, в которой отличен от нуля минор якобиевой матрицы, образованный двумя последними столбцами: $\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} \neq 0$. Тогда в этой окрестности имеем локальное решение $y = f(x)$, $z = g(x)$. В такой форме уравнение кривой называется *приведенным.* От него легко перейти к параметрическим уравнениям.

Пусть $x = x(t)$ — произвольная гладкая функция, имеющая ненулевую производную $x'(t) \neq 0$. Тогда получаем

$$x = x(t), \quad y = f(x(t)), \quad z = g(x(t)),$$

При этом условие регулярности выполнено. Во многих случаях можно положить просто $x = t$. $\square$

Примеры.

1) Рассмотрим винтовую линию. Пусть кривая расположена на прямом круговом цилиндре радиуса a с осью Z. Если t — время, то угол поворота в радианах $\varphi = \omega t$, а смещение точки вдоль оси с линейной скоростью v равно vt. . Радиус-вектор движущейся точки равен $\mathbf{r}(t) = a\mathbf{e}(\varphi) + b\varphi\mathbf{k}$, где $b = \frac{v}{\omega} = \mathrm{const}$. Это регулярная параметризация.

2) Уравнения $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0, z - b = 0$ задают сферу и плоскость, ортогональную оси Z. При $b^2 < a^2$ это окружность радиуса $r = \sqrt{a^2 - b^2}$, при $b^2 = a^2$ точка, а если $b^2 > a^2$, имеем пустое множество. Чтобы найти параметрические уравнения окружности, рассмотрим якобиеву матрицу $\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Здесь минор, образованный двумя последними столбцами, при $y \neq 0$ отличен от нуля. Поэтому при этом условии систему можно разрешить относительно y и z. В результате получим приведенные уравнения $y = \pm\sqrt{a^2 - b^2 - x^2}, z = b$. Положив теперь $x = \sqrt{a^2 - b^2}\cos t$, придем к следующим параметрическим уравнениям

$$x = \sqrt{a^2 - b^2}\cos t, \quad y = \sqrt{a^2 - b^2}\sin t, \quad z = b.$$

7.2. Касательная прямая и соприкасающаяся плоскость.

Уравнение касательной прямой ξ: $\mathbf{R} = \mathbf{r}(t) + \lambda\mathbf{r}'(t)$ для кривой в 3-пространстве, заданной параметрическим уравнением, имеет в декартовых координатах вид

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} = \frac{Z - z(t)}{z'(t)}$$

и имеет смысл в регулярных точках.

Точка параметризованной кривой называется *бирегулярной*, если в этой точке векторы первой и второй производных линейно независимы: $[\mathbf{r}', \mathbf{r}''] \neq 0$. Тогда в пучке плоскостей, проходящих через касательную прямую, одна определяется однозначно.

Определение. *Соприкасающейся плоскостью кривой в данной ее точке называется плоскость, содержащая вектор кривизны.*

Обозначим ее Π. Таким образом, если кривая отнесена к натуральному параметру, то векторы $\dot{\mathbf{r}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$ являются ее направляющими векторами и уравнение этой плоскости легко записать. Как находить соприкасающуюся плоскость, если кривая задана в произвольной параметризации? Для этого нам понадобится

Теорема 16. *При любой параметризации вектор второй производной* $\mathbf{r}''$ *принадлежит соприкасающейся плоскости.*

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из формул

$$\mathbf{r}' = \dot{\mathbf{r}}s', \quad \mathbf{r}'' = \ddot{\mathbf{r}}(s')^2 + \dot{\mathbf{r}}s''$$

Вторая из них показывает, что вектор $\mathbf{r}''$ есть линейная комбинация орта касательного вектора и вектора кривизны. Значит, он лежит в соприкасающейся плоскости. $\Box$

Запишем уравнение соприкасающейся плоскости. Для этого надо вычислить ее нормальный вектор $\mathbf{B}(t) = [\mathbf{r}', \mathbf{r}'']$. Он называется *вектором бинормали* кривой, а прямая B, проходящая через точку кривой в его направлении – *бинормалью.* Уравнение плоскости Π запишется в виде $(\mathbf{R} - \mathbf{r}(t), \mathbf{B}) = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда кривая задана неявными уравнениями (33). Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ суть параметрические уравнения этой кривой. Тогда мы имеем два тождества: $F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$ и $G(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$. Дифференцируя их, получим два новых тождества

$$F_x x' + F_y y' + F_z z' \equiv 0, \quad G_x x' + G_y y' + G_z z' \equiv 0.$$

Из них следует, что векторы $\mathbf{N}_1 = \mathrm{grad} F$ и $\mathbf{N}_2 = \mathrm{grad} G$ ортогональны кривой в ее точках (они ортогональны к соответствующим поверхностям) и поэтому касательный вектор кривой с точностью до множителя равен $[\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$, а его координаты — это миноры якобиевой матрицы (34).

Пример. Найдем уравнение соприкасающейся плоскости винтовой линии $\mathbf{r} = a\mathbf{e}(\varphi) + b\varphi\mathbf{k}$ в точке $\varphi = 0$. Эта точка имеет координаты $\mathbf{r}_0 = (a, 0, 0)$. Векторы первой и второй производной равны

$$\mathbf{r}' = a\mathbf{g}(\varphi) + b\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}'' = -a\mathbf{e}(\varphi)$$

и в данной точке имеют координаты $\mathbf{r}_0' = (0, a, b)$, $\mathbf{r}_0'' = (-a, 0, 0)$. Следовательно, вектор бинормали равен $\mathbf{B}_0 = (0, -ab, a^2)$. Поэтому уравнение соприкасающейся плоскости имеет вид $by - az = 0$.

Задача. *Докажите, что плоская кривая лежит в своей соприкасающейся плоскости.*

7.3. Сопровождающий репер и формулы Френе. Кривизна и кручение.

Пусть параметризованная кривая Γ бирегулярна. Как и в случае плоской кривой, мы однозначно свяжем с каждой ее точкой ортонормированный репер с началом в этой точке. Его движение вдоль кривой даст нам информацию о том, как кривая устроена локально, в окрестности данной точки.

Для этого отнесем кривую сначала к натуральной параметризации. В качестве первого вектора возьмем единичный касательный вектор $\mathbf{e} = \dot{\mathbf{r}}$. Рассмотрим теперь вектор кривизны $\ddot{\mathbf{r}}$. Напомним, что он ортогонален касательной, по определению лежит в соприкасающейся плоскости и для бирегулярной кривой отличен от нуля. Нормируя его, получим второй единичный вектор $\mathbf{n} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{|\ddot{\mathbf{r}}|}$. Для того, чтобы завершить построение, рассмотрим ортогональный к ним орт бинормали $\mathbf{b} = [\mathbf{e}, \mathbf{n}]$. Репер $\{\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ является ортонормированным и имеет правую ориентацию. Он называется *сопровождающим репером* кривой.

Пусть теперь кривая отнесена к произвольной параметризации: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Рассмотрим касательный вектор $\mathbf{r}'$. Он направлен в сторону возрастания параметра, но не единичный. Чтобы получить единичный вектор, надо касательный вектор пронормировать: $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}$. Далее, так как кривая по условию бирегулярна, то векторы $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ не параллельны и образуют базис соприкасающейся плоскости. К ней ортогонален вектор бинормали $\mathbf{B} = [\mathbf{r}', \mathbf{r}'']$. Его орт дает нам третий вектор ортонормированного репера $\mathbf{b}$. Завершая построение, мы возьмем $\mathbf{n} = [\mathbf{b}, \mathbf{e}]$. В итоге получим репер правой ориентации. Итак,

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{n} = [\mathbf{b}, \mathbf{e}], \quad \mathbf{b} = \frac{[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']}{|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|}. \tag{35}$$

Тем самым наше построение завершено.

Аналогами координатных осей построенного репера являются три прямые. Кроме касательной прямой ξ мы имеем *главную нормаль* η, проходящую в направлении вектора $\mathbf{N}$ (она, следовательно, лежит в соприкасающейся плоскости) и *бинормаль* ζ, проходящую в направлении вектора $\mathbf{B}$. Она ортогональна соприкасающейся плоскости. Кроме того имеется три плоскости — аналоги координатных плоскостей. Одна из них Π — соприкасающаяся. Две другие, ортогональные соответственно касательной прямой и главной нормали, называются *нормальной плоскостью* и *спрямляющей плоскостью.* Нетрудно записать уравнения этих плоскостей.

Приступим к изучению движения сопровождающего репера вдоль кривой. Для этого отнесем кривую к натуральному параметру. Пусть центр репера смещается из точки $\mathbf{r}(s)$ в точку $\mathbf{r}(s+h)$. Рассматривая плоские кривые, мы уже видели, что с точностью до малых первого порядка положение векторов репера в этой точке определяется их первыми производными. Найдем координаты производных $\dot{\mathbf{e}}, \dot{\mathbf{n}}, \dot{\mathbf{b}}$ относительно исходного репера. Производная $\dot{\mathbf{e}} = \ddot{\mathbf{r}}$ есть вектор кривизны, имеющий направление главной нормали. Поэтому $\dot{\mathbf{e}} = k(s)\mathbf{n}$. Здесь $k(s)$ — неотрицательная функция, называемая *кривизной*. Вычислим теперь производную орта бинормали $\dot{\mathbf{b}}$. С одной стороны, эта производная ортогональна вектору $\mathbf{b}$. С другой, дифференцируя тождество $\mathbf{b} = [\mathbf{e}, \mathbf{n}]$, получим

$$\dot{\mathbf{b}} = [\dot{\mathbf{e}}, \mathbf{n}] + [\mathbf{e}, \dot{\mathbf{n}}] = [k\mathbf{n}, \mathbf{n}] + [\mathbf{e}, \dot{\mathbf{n}}] = [\mathbf{e}, \dot{\mathbf{n}}].$$

Следовательно, эта производная ортогональна также касательному вектору и поэтому имеет направление главной нормали. Значит, $\dot{\mathbf{b}} = -q\mathbf{n}$. Функция $q(s)$ называется *кручением кривой*. Теперь мы можем вычислить производную вектора $\mathbf{n}$:

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{d}{ds}[\mathbf{b}, \mathbf{e}] = [\dot{\mathbf{b}}, \mathbf{e}] + [\mathbf{b}, \dot{\mathbf{e}}] = [-q\mathbf{n}, \mathbf{e}] + [\mathbf{b}, k\mathbf{n}] = -k\mathbf{e} + q\mathbf{b}.$$

Итак, мы получили следующий результат:

$$\left\{ \begin{array}{rcccc} \frac{d\mathbf{e}}{ds} & = & & k(s)\mathbf{n}, & \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} & = & -k(s)\mathbf{e} & & +q(s)\mathbf{b}, \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} & = & & -q(s)\mathbf{n}. & \end{array} \right. \tag{36}$$

Это система линейных дифференциальных уравнений первого порядка, которые называются *уравнениями Френе*. Из теории таких систем известно, что если заданы начальные условия, то в некоторой окрестности начальной точки $s = 0$ существует единственное решение $\{\mathbf{e}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$. Таким образом, можно сформулировать такой вывод:

Теорема 17. *Движение сопровождающего репера пространственной кривой определяется уравнениями Френе и зависит только от ее кривизны и кручения.*

Теперь мы можем ответить на вопрос, при каком условии пространственная кривая является плоской? Ответ на него дает следующая

Теорема 18. *Кривая* Γ *является плоской тогда и только тогда, когда ее кручение равно нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть кривая с параметрическим уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ плоская, т. е. ее носитель принадлежит некоторой плоскости Π. Тогда векторы $\mathbf{r}'(t)$ и $\mathbf{r}''(t)$ лежат в этой же плоскости и, следовательно, эта плоскость является соприкасающейся плоскостью кривой. Отсюда следует, что единичный вектор бинормали, ортогональный плоскости Π, постоянен и его производная равна нулю. Но тогда из третьего уравнения Френе вытекает $q\mathbf{n} = 0$, что равносильно $q = 0$.

Обратно, пусть $q = 0$. Из того же уравнения Френе следует $\dot{\mathbf{b}} = 0$ и поэтому $\mathbf{b} = \mathrm{const}$. Рассмотрим тождество $(\mathbf{b}, \mathbf{r}'(t)) \equiv 0$. Интегрируя его, получим $(\mathbf{b}, \mathbf{r}(t)) + c \equiv 0$, где c — постоянная интегрирования. Это новое тождество означает, что радиус-вектор кривой удовлетворяет уравнению плоскости $(\mathbf{b}, \mathbf{r}) + c \equiv 0$ и, следовательно, кривая является плоской. $\square$

ЛЕКЦИЯ 8. СТРОЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ.

8.1. Геометрический смысл кривизны и кручения.

Для того, чтобы выяснить геометрический смысл кривизны, рассмотрим первое уравнение Френе и поступим таким же образом, как и в случае плоских кривых. Мы имеем $k(s) = |\frac{d\mathbf{e}}{ds}|$. По определению производной $\dot{\mathbf{e}} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{|h|}(\mathbf{e}(s+h) - \mathbf{e}(s))$, так что $k(s) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{|\triangle \mathbf{e}|}{|h|}$. Но так как векторная функция $\mathbf{e}(s)$ имеет единичный модуль, то выражение в числителе с точностью до малых второго порядка можно заменить на угол поворота этого вектора при его движении по кривой. В результате получим $k(s) = \lim\limits_{h\to 0}|\frac{\varphi}{h}|$. Таким образом, как и для плоских кривых, справедлива

Теорема 19. *Кривизна кривой есть предел отношения модуля скорости поворота ее касательного вектора по отношению к дуге, на которой этот поворот происходит.*

Аналогичным образом устанавливается и геометрический смысл кручения. Он вытекает из третьего уравнения Френе. Обозначим через ϕ угол поворота вектора бинормали $\mathbf{b}$ на дуге h. Тогда справедлива

Теорема 20. *Абсолютная величина кручения кривой есть предел отношения модуля скорости поворота ее вектора бинормали по отношению к дуге, на которой этот поворот происходит:* $|\omega| = \lim\limits_{h\to 0}|\frac{\phi}{h}|$.

Доказательство аналогично.

8.2. Кинематический смысл кривизны и кручения.

Рассмотрим параметризованную кривую $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ как траекторию движения точки. При этом параметр t имеет смысл времени. Будем рассматривать сопровождающий репер как твердое тело, которое движется вдоль кривой. При этом мы будем считать, что центр репера движется равномерно с единичной скоростью $v = |\mathbf{r}'| = 1$, так что t является натуральным параметром. Но всякое движение репера в пространстве состоит из переноса его центра и вращения. Перенеся репер из точки $\mathbf{r}(s+h)$ параллельно в исходную точку $\mathbf{r}(s)$, рассмотрим затем его вращение вокруг этой точки. Только это вращение будет сейчас представлять для нас интерес. Как известно из кинематики, в каждый момент времени оно представляет собой вращение вокруг некоторой мгновенной оси с вектором угловой скорости $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Обозначим через $\vec{\rho}$

радиус-вектор произвольной "вмороженной"точки твердого тела относительно центра вращения $\mathbf{r}(s)$. Тогда ее линейная скорость, как известно из механики твердого тела, равна $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{\rho}]$. В частности, для точек с радиусами-векторами $\mathbf{e} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$ и $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$ получим

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{e}}{ds} = [\vec{\omega}, \mathbf{e}] = (0, \omega_3, -\omega_2), \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} = [\vec{\omega}, \mathbf{n}] = (-\omega_3, 0, \omega_1), \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} = [\vec{\omega}, \mathbf{b}] = (\omega_2, -\omega_1, 0). \end{cases}$$

Сравнивая эти формулы с уравнениями Френе (36), получим $k\mathbf{n} = [\vec{\omega}, \mathbf{e}]$, $-k\mathbf{e} + q\mathbf{b} = [\vec{\omega}, \mathbf{n}]$, $q\mathbf{n} = [\vec{\omega}, \mathbf{b}]$. Отсюда придем к выводу, что $\omega_1 = q$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = k$. Таким образом, вектор угловой скорости равен $\vec{\omega} = q\mathbf{e} + k\mathbf{b}$. Он принадлежит спрямляющей плоскости и называется *вектором Дарбу.*

8.3. Вычисление кривизны и кручения.

Для вычисления кривизны и кручения кривой вернемся к уравнениям Френе. Из них мы имеем $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{e}, \ddot{\mathbf{r}} = k\mathbf{n}$. Нам понадобится еще третья производная радиуса-вектора

$$\dddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{ds}(k\mathbf{n}) = -q^2\mathbf{e} + \dot{k}\mathbf{n} + kq\mathbf{b}\,.$$

Подсчитаем векторное и смешанное произведения

$$[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}] = [\mathbf{e}, k\mathbf{n}] = k\mathbf{b}, \quad (\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}) = (k\mathbf{b}, \dddot{\mathbf{r}}) = k^2 q.$$

Отсюда следует, что

$$k(s) = |[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|\,, \quad q(s) = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})}{[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]^2}\,. \tag{37}$$

Пусть теперь кривая задана в произвольной параметризации: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Выразим производные по натуральному параметру через производные по t. Получим

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}'\dot{t}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}''(\dot{t})^2 + \mathbf{r}'\ddot{t}, \quad \dddot{r} = \mathbf{r}'''(\dot{t})^3 + 3\mathbf{r}''\dot{t}\ddot{t} + \mathbf{r}'\dddot{t}\,,$$

откуда

$$[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}] = [\mathbf{r}', \mathbf{r}''](\dot{t})^3, \quad (\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}) = (\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')(\dot{t})^6.$$

Подставляя эти выражения в формулы (37), получим

$$k = |[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']||\dot{t}|^3, \quad q = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']^2}\,.$$

Осталось найти $|\dot t|$. Но так как $|\dot{\mathbf{r}}| = |\mathbf{r}'||\dot t|$, то $|\dot t| = \frac{1}{|\mathbf{r}'|}$. Итак, окончательно имеем

$$k(t) = \frac{|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|}{|\mathbf{r}'|^3}, \quad q(t) = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{[\mathbf{r}', r'']^2}\,. \tag{38}$$

8.4. Строение кривой в окрестности данной точки.

Теперь наша задача состоит в том, чтобы выяснить, каким образом кривизна и кручение влияют на локальное строение кривой в окрестности данной точки. Отнесем кривую Γ к натуральному параметру и рассмотрим на ней точку $s = 0$. Сопровождающий репер определяет в этой точке прямоугольную систему координат (x, y, z) с направляющими ортами $\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ соответственно. Разложим векторную функцию $\mathbf{r}(s)$ в окрестности начальной точки в ряд Тейлора. С точностью до малых третьего порядка

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(0) + (\dot{\mathbf{r}}(0))s + \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{r}}(0))s^2 + \frac{1}{3!}(\dddot{\mathbf{r}}(0))s^3\,.$$

Но из формул Френе мы имеем

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{e}\,, \ddot{\mathbf{r}} = k\mathbf{n}\,, \dddot{\mathbf{r}} = -k^2\mathbf{e} + \dot k\mathbf{n} + kq\mathbf{b}\,.$$

Подставляя эти выражения в предыдущее разложение и полагая $\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{e} + y(s)\mathbf{n} + z(s)\mathbf{b}$, получим

$$x = s - \frac{1}{6}k^2s^3\,, y = \frac{1}{2}ks^2 + \frac{1}{6}\dot k s^3\,, z = \frac{1}{6}kqs^3 \tag{39}$$

Это прямоугольные координаты векторной функции $\mathbf{r}(s)$ относительно сопровождающего репера в точке $s = 0$. Здесь k и q суть значения кривизны и кручения в начальной точке. Ограничиваясь лишь первыми членами, будем иметь

$$x = s\,, y = \frac{1}{2}ks^2\,, z = \frac{1}{6}kqs^3\,.$$

Это уравнения аппроксимируют параметрические уравнения нашей кривой в окрестности начальной точки. Для того, чтобы понять, как ведет себя кривая, рассмотрим ее проекции на координатные плоскости.

1) Проекция на соприкасающуюся плоскость $\{x, y\}$ имеет вид

$$x = s\,, y = \frac{1}{2}ks^2\,.$$

Исключая параметр, получим уравнение параболы $y = \frac{1}{2}kx^2$. Так как $k \geq 0$, то своей вогнутостью она обращена в сторону вектора главной нормали $\mathbf{n}$, а степень этой вогнутости пропорциональна кривизне.

2) Проекция на нормальную плоскость $\{y, z\}$ имеет параметрические уравнения

$$y = \frac{1}{2}ks^2\,, z = \frac{1}{6}kqs^3\,.$$

После исключения параметра получим полукубическую параболу $z^2 = \frac{q^2}{6k}y^3$. Так как $\frac{q^2}{6k} > 0$, то ее ветви обращены в положительную сторону главной нормали.

3) Рассмотрим, наконец, проекцию на спрямляющую плоскость $\{x, z\}$

$$x = s\,, z = \frac{1}{6}kqs^3.$$

Это кубическая парабола с приведенным уравнением $z = \frac{1}{6}kqx^3$. Ее расположение на плоскости зависит от знака кручения: при $q > 0$ она проходит через 1-й и 3-й квадранты, а при $q < 0$ через 2-й и 4-й.

Теперь можно сделать вывод о поведении кривой в целом. Для этого вернемся к уравнениям (39) и рассмотрим сначала случай, когда кручение кривой положительно: $q > 0$. Тогда при переходе от отрицательных к положительным значениям параметра знаки координат меняются следующим образом

	x	y	z
s<0	—	+	—
s>0	+	+	+

Отсюда видно, что в окрестности начальной точки кривая имеет форму правого винта.

Рассмотрим теперь случай, когда кручение кривой отрицательно. Тогда при переходе от отрицательных к положительным значениям параметра знаки координат меняются так

	x	y	z
s<0	—	+	+
s>0	+	+	—

Здесь знак координаты z изменился на противоположный, т. е. произошло зеркальное отражение относительно соприкасающейся плоскости. В результате в окрестности начальной точки кривая имеет форму левого винта.