Известия вузов. Математика
2019, №10, с. 46–61

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

М.М. КОКУРИН

ОБ УСЛОВИЯХ КВАЛИФИЦИРОВАННОЙ СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ И МЕТОДА КВАЗИОБРАЩЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ КОШИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Аннотация. Изучаются разностные методы и метод квазиобращения в применении к линейным некорректным задачам Коши с самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве в условиях точных данных. Показано, что для таких задач предыдущие результаты автора о скорости сходимости указанных методов в общем случае банахова пространства допускают усиление. Найдены близкие друг к другу необходимые и достаточные условия квалифицированной сходимости изучаемых методов в терминах показателя истокопредставимости искомого решения. Установлено, что за исключением тривиального случая степенные оценки скорости сходимости рассматриваемых методов не могут иметь показатель, превышающий характерный для каждого метода порог насыщения.

Ключевые слова: некорректная задача Коши, разностная схема, метод квазиобращения, скорость сходимости, операторное исчисление, самосопряженный оператор, условие истокопредставимости, интерполяционные пространства.

УДК: 517.988

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-10-46-61

1. Введение

Объектом исследования в работе является задача Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathcal{A}x(t), \quad x(0) = f, \tag{1.1}$$

где $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H \to H$, $\overline{D(\mathcal{A})} = H$ — неограниченный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, со спектром $\sigma(\mathcal{A}) \subset [a, +\infty)$, где $a > 0$. Требуется определить элемент $x(T)$, представляющий собой значение классического решения $x = x(t)$ задачи (1.1) в точке $t = T$. Под классическим решением (1.1) понимается функция $x : [0, T] \to H$, где $x(0) = f$, $x(t) \in D(\mathcal{A})$, $t \in [0, T]$, непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0, T]$ в смысле нормы H и удовлетворяющая дифференциальному уравнению из (1.1) при $t \in [0, T]$. Далее предполагается, что классическое решение существует. Задача

Поступила в редакцию 08.10.2018, после доработки 08.10.2018. Принята к публикации 19.12.2018.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-00039а), поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации в рамках государственного задания (проект 1.5420.2017/8.9) и стипендией Президента Российской Федерации молодым ученым и аспирантам (СП-5252.2018.5).

(1.1) в общем случае поставлена некорректно. Однако для любого $f \in D(\mathcal{A})$ она имеет не более одного классического решения [1]–[3].

Из условий на $\mathcal{A}$ следует существование непрерывного обратного оператора $\mathcal{A}^{-1}$, а также что $-\mathcal{A}$ является генератором аналитической полугруппы ограниченных операторов $(U_{-\mathcal{A}}(t))_{t\geq 0}$. Для классического решения $x(t)$ задачи (1.1) справедливо равенство $x(t) = U_{-\mathcal{A}}(T-t)x(T)$ [1], [2], [4].

Будем пользоваться аппаратом исчисления самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, позволяющим ставить в соответствие функциям $u(\lambda)$, заданным на спектре $\sigma(\mathcal{A})$, линейные операторы $u(\mathcal{A}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda)dE_\lambda$, действующие в H и называемые функциями от оператора $\mathcal{A}$. Здесь $\{E_\lambda\}$ — семейство спектральных проекторов оператора $\mathcal{A}$. Если функция $u(\lambda)$ измерима по Борелю и ограничена на луче $[a,+\infty) \supset \sigma(\mathcal{A})$, то $u(\mathcal{A}) \in L(H)$ и

$$\|u(\mathcal{A})\| \leq \sup_{\lambda\in[a,+\infty)} |u(\lambda)|. \tag{1.2}$$

В частности, оператор $\mathcal{A}^p$ с любым вещественным p является функцией $u(\lambda) = \lambda^p$ от оператора $\mathcal{A}$. Определение и свойства дробных степеней операторов можно найти в ([3], гл. 1; [5], гл. 3). Далее, оператор полугруппы $U_{-\mathcal{A}}(t)$, $t \in [0,T]$, может быть представлен в виде $F_t(\mathcal{A})$, где $F_t(\lambda) = e^{-t\lambda}$. Таким образом, $x(t) = F_{T-t}(\mathcal{A})x(T)$, $t \in [0,T]$, и, в частности,

$$f = x(0) = F_T(\mathcal{A})x(T), \quad F_T(\lambda) = e^{-T\lambda}. \tag{1.3}$$

Необходимые факты, относящиеся к исчислению самосопряженных операторов, изложены, например, в ([6], гл. 7–9; [7]). Отметим, что если функции $u_1(\lambda)$ и $u_2(\lambda)$ ограничены на $\sigma(A)$, то $u_1(A)u_2(A) = u_2(A)u_1(A) = (u_1u_2)(A) \in L(H)$. Более того, если $u_1(\lambda)$ измерима по Борелю, а $u_2(\lambda)$ ограничена на $\sigma(A)$, то и в этом случае $u_1(A)u_2(A) = (u_1u_2)(A)$ ([6], с. 369).

В статье изучаются разностные методы решения задачи (1.1), имеющие вид

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{n+j} = \Delta t \sum_{j=0}^{k} \beta_j \mathcal{A} x_{n+j}, \quad 0 \leq n \leq N-k, \quad x_0 = f. \tag{1.4}$$

Эти методы были впервые предложены в работах А.Б. Бакушинского в 1970-х годах (например, [8]). Здесь $\Delta t = T/N$ есть шаг временной дискретизации, $t_n = n\Delta t$, $0 \leq n \leq N$, — узлы дискретизации на отрезке $[0,T]$, а элементы $x_n \in H$, $0 \leq n \leq N$, — приближения к значениям $x(t_n)$ классического решения в узлах дискретизации. Каждая разностная схема (1.4) характеризуется значением $k \geq 1$ и коэффициентами α_j, β_j, $0 \leq j \leq k$. Если, кроме того, задать начальные элементы $x_1, \ldots, x_{k-1}$ разностной схемы, т. е. приближения к значениям искомого решения в начальных узлах дискретизации, то схема (1.4) позволяет найти приближения x_n для всех $0 \leq n \leq N$ по рекуррентной формуле

$$x_{n+k} = \sum_{j=0}^{k-1} (\beta_j \Delta t \mathcal{A} - \alpha_j E)(E - \beta_k \Delta t \mathcal{A})^{-1} x_{n+j}.$$

Своеобразие описанного подхода к решению некорректных задач Коши заключается в том, что роль параметра регуляризации играет шаг временной дискретизации Δt разностной схемы, а не малый параметр возмущения задачи, как, например, в методе квазиобращения [2], также изучаемом в настоящей статье. В [4], [8], [9] установлены регуляризующие свойства разностных методов при подходящем выборе шага временной дискретизации в зависимости от уровня погрешности δ начального элемента f задачи (1.1).

Будем рассматривать два подкласса разностных методов (1.4), выделенные в [9], [10] и описываемые следующими наборами параметров:

$$R^{(1,1)}: \quad k=1, \quad \alpha_0=-1, \alpha_1=1, \beta_0=1-\beta_1, \quad \beta_1<0;$$

$$R^{(2,2)}: \quad k=2, \quad \alpha_0=1-2A, \alpha_1=2A-2, \alpha_2=1, \beta_0=A-B-1,$$

$$\beta_1=A+2B+1, \beta_2=-B, \quad A\in(0,1], B>0, \quad x_1=2f-(E+\Delta t\mathcal{A})^{-1}f.$$

Здесь под $R^{(k_0,m_0)}$ понимается класс разностных методов с $k=k_0$ и порядком аппроксимации $m\geq m_0$, удовлетворяющих ряду условий, делающих возможным получение оценок точности ([9], [10]). Таким образом, $R^{(1,1)}$ есть однопараметрическое семейство двухслойных разностных схем, а $R^{(2,2)}$ является двупараметрическим семейством трехслойных схем. Отметим, что здесь использована иная параметризация класса $R^{(2,2)}$, чем в [9], [10].

Схемы класса $R^{(1,1)}$ изучались в ([11], с. 306) в рамках анализа более общего класса схем, получающегося путем внесения регуляризующих возмущений в дискретизированный вариант уравнения (1.1) и содержащего также разностные схемы на основе метода квазиобращения. В [9] установлены оценки погрешности разностных методов классов $R^{(1,1)}$, $R^{(2,2)}$ в условиях приближенных входных данных. В настоящей статье изучаются аппроксимирующие свойства этих методов, именно, исследуется скорость сходимости вырабатываемых приближений в предположении, что начальный элемент $x(0)=f$ известен точно. При этом на искомый элемент $x(T)$ налагается следующее условие истокопредставимости.

Условие (A). *Имеет место представление* $x(T)=\mathcal{A}^{-p}w$ *с некоторыми* $p\geq 1$, $w\in H$.

Отметим, что условие не является ограничительным, так как при $p=1$ оно выполнено автоматически в силу определения классического решения задачи (1.1). С ростом показателя истокопредставимости p скорость сходимости рассматриваемых методов, вообще говоря, растет.

В работах [9], [10] единообразно установлены необходимые и достаточные условия квалифицированной сходимости разностных методов классов $R^{(1,1)}$ и $R^{(2,2)}$, а также метода квазиобращения, в условиях точных данных в терминах показателя истокопредставимости p в применении к некорректным задачам Коши с секториальным оператором в банаховом пространстве. В настоящей статье изучается применение указанных методов к более узкому классу задач, а именно, к задачам (1.1) с самосопряженным оператором $\mathcal{A}$ в гильбертовом пространстве, имеющим строго положительный спектр. В данной статье показано, что в этом случае результаты из [9], [10] допускают заметное усиление — в частности, устраняется труднопроверяемое условие на коэффициенты разностной схемы класса $R^{(2,2)}$, присутствующее в [9], [10].

Статья построена следующим образом. В разделе 2 доказываются прямые теоремы о сходимости разностных методов, устанавливающие достаточные условия их квалифицированной сходимости в терминах показателя истокопредставимости искомого решения. Из этих теорем видно, что показатель степенной сходимости разностных методов классов $R^{(1,1)}$ и $R^{(2,2)}$ увеличивается с ростом показателя истокопредставимости p, но не может превышать характерного для этих классов порога насыщения, равного 1 для класса $R^{(1,1)}$ и равного 2 для $R^{(2,2)}$. Раздел 3 посвящен доказательству обратных теорем, в которых указываются необходимые условия степенной сходимости разностных методов в терминах показателя истокопредставимости. Если показатель степенной сходимости не превышает порога насыщения, эти необходимые условия оказываются близкими к достаточным. Программу исследования разностных методов завершает раздел 4, в котором показано, что степенная сходимость изучаемых методов с показателем, превышающим порог насыщения, возможна лишь в тривиальном случае. Этот результат представлен в виде усиленных обратных теорем. Наконец, в разделе 5 показано, что техника доказательства прямых, обратных и усиленных обратных теорем о сходимости методов решения некорректных задач Коши, развитая в разделах 2–4 и в предыдущих работах автора [9], [10] применительно к разностным методам, позволяет получить новые результаты также и для широко известного метода квазиобращения.

2. Прямые теоремы о скорости сходимости разностных методов

Настоящий раздел посвящен получению оценок скорости сходимости разностных методов классов $R^{(1,1)}$ и $R^{(2,2)}$ в применении к задаче (1.1) в условиях точных входных данных. Рассмотрим вначале методы класса $R^{(1,1)}$. Согласно [9] для соответствующих элементов x_n справедлива формула

$$x_n = v_n(\mathcal{A})f, \quad v_n(\lambda) = \Big(\frac{1+(1-\beta_1)\lambda\Delta t}{1-\beta_1\lambda\Delta t}\Big)^n.$$

В частности, приближение x_N к значению $x(T)$ запишется в виде

$$x_N = v_N(\mathcal{A})f, \quad v_N(\lambda) = \Big(\frac{1+(1-\beta_1)\lambda\Delta t}{1-\beta_1\lambda\Delta t}\Big)^{T/\Delta t}.$$

Используя (1.3), условие (A) и свойства функций от самосопряженных операторов ([6], гл. 9), получаем следующее представление для погрешности $x_N - x(T)$ применяемого разностного метода:

$$x_N - x(T) = v_N(\mathcal{A})f - x(T) = v_N(\mathcal{A})F_T(\mathcal{A})x(T) - x(T) = (v_N(\mathcal{A})F_T(\mathcal{A}) - E)\mathcal{A}^{-p}w = G_p(\mathcal{A})w,$$

$$G_p(\lambda) = (v_N(\lambda)F_T(\lambda) - 1)\lambda^{-p} = \lambda^{-p}(e^{-T\lambda}v_N(\lambda) - 1). \tag{2.1}$$

Представим функцию $G_p(\lambda)$ в виде

$$G_p(\lambda) = \lambda^{-p}(e^{X(\lambda,\Delta t)} - 1), \quad X(\lambda,\Delta t) = \frac{T}{\Delta t}g_1(\lambda\Delta t), \quad g_1(z) = \ln\frac{1+(1-\beta_1)z}{1-\beta_1 z} - z.$$

В силу (1.2) получаем

$$\|x_N - x(T)\| \le \max_{\lambda\in[a,+\infty)}|G_p(\lambda)|\cdot\|w\| \le C_1 \max_{\lambda\in[a,+\infty)}\Big(\lambda^{-p}\big|e^{X(\lambda,\Delta t)} - 1\big|\Big) =$$

$$= C_1\max\Big\{\max_{\lambda\in[a,(\Delta t)^{-1/2}]}\Big(\lambda^{-p}\big|e^{X(\lambda,\Delta t)} - 1\big|\Big), \max_{\lambda\in[(\Delta t)^{-1/2},+\infty)}\Big(\lambda^{-p}\big|e^{X(\lambda,\Delta t)} - 1\big|\Big)\Big\}. \tag{2.2}$$

Здесь и далее $C_1, C_2, \ldots$ — неотрицательные константы, которые могут зависеть от коэффициентов применяемого разностного метода, от значений a, p, T, $\|w\|$, но не от λ или Δt.

Оценим первый максимум в правой части (2.2). Для этого заметим, что $g_1(0) = 0$, $g_1'(0) = 0$, $|g_1''(0)| < \infty$. При $\lambda \in [a,(\Delta t)^{-1/2}]$ величина $\lambda\Delta t$ ограничена по модулю, поэтому $|g_1(\lambda\Delta t)| \le C_2\lambda^2(\Delta t)^2$,

$$|X(\lambda,\Delta t)| = \frac{T}{\Delta t}|g_1(\lambda\Delta t)| \le C_2 T\lambda^2\Delta t \le C_2 T = \mathrm{const},$$

и, как следствие, $\big|e^{X(\lambda,\Delta t)} - 1\big| \le C_3|X(\lambda,\Delta t)| \le C_4\lambda^2\Delta t$. Таким образом,

$$\max_{\lambda\in[a,(\Delta t)^{-1/2}]}\Big(\lambda^{-p}\big|e^{X(\lambda,\Delta t)} - 1\big|\Big) \le C_4\Delta t \max_{\lambda\in[a,(\Delta t)^{-1/2})}\lambda^{2-p} \le C_5\left\{\begin{array}{cc} (\Delta t)^{p/2}, & 1 \le p < 2; \\ \Delta t, & p \ge 2. \end{array}\right. \tag{2.3}$$

Оценим теперь второй максимум в правой части (2.2). В силу $\beta_1 < 0$ имеем

$$g_1(0) = 0, \quad g_1'(z) = \frac{z\big((-1+2\beta_1) + \beta_1(1-\beta_1)z\big)}{(1+(1-\beta_1)z)(1-\beta_1 z)} < 0 \ \ \forall z > 0.$$

Отсюда следует $X(\lambda, \Delta t) < 0$ для всех $\lambda \in [a, +\infty)$, и

$$\max_{\lambda \in [(\Delta t)^{-1/2}, +\infty)} \Big(\lambda^{-p}\big|e^{X(\lambda,\Delta t)} - 1\big|\Big) \leq (\Delta t)^{p/2}. \tag{2.4}$$

Подставляя (2.3) и (2.4) в (2.2), получаем

$$\|x_N - x(T)\| \leq C_6 \left\{ \begin{array}{cc} (\Delta t)^{p/2}, & 1 \leq p < 2; \\ \Delta t, & p \geq 2. \end{array} \right.$$

Аналогично [9] можно распространить эту оценку на другие узлы дискретизации:

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq C_6 \left\{ \begin{array}{cc} (\Delta t)^{p/2}, & 1 \leq p < 2; \\ \Delta t, & p \geq 2, \end{array} \right. \quad 0 \leq n \leq N. \tag{2.5}$$

Доказана

Теорема 2.1. *Для разностных методов класса $R^{(1,1)}$ в применении к задаче* (1.1) *с точно заданным элементом f при выполнении условия истокопредставимости* (*условия* (A)) *справедлива оценка скорости сходимости* (2.5).

Изучим скорость сходимости методов класса $R^{(2,2)}$. Для полученных с помощью этих методов приближений x_N справедлива формула [9]

$$x_N = v_N(\mathcal{A})f, \quad v_N(\lambda) = \widetilde{M}(\lambda\Delta t)\widetilde{X}^{T/\Delta t}(\lambda\Delta t) + (1 - \widetilde{M}(\lambda\Delta t))\widetilde{Y}^{T/\Delta t}(\lambda\Delta t), \tag{2.6}$$

где

$$\widetilde{M}(z) = \frac{(2+4z)(1+Bz) - (1+z)\Big(2(1-A) + (A+2B+1)z - \sqrt{Q(z)}\Big)}{2(1+z)\sqrt{Q(z)}},$$

$$\widetilde{X}(z) = \frac{2(1-A) + (A+2B+1)z + \sqrt{Q(z)}}{2(1+Bz)},$$

$$\widetilde{Y}(z) = \frac{2(1-A) + (A+2B+1)z - \sqrt{Q(z)}}{2(1+Bz)},$$

$$Q(z) = 4A^2 + 4A(1-A)z + \big((A+1)^2 + 8AB\big)z^2, \quad A \in (0,1], \quad B > 0.$$

Легко видеть, что квадратный трехчлен $Q(z)$ принимает лишь положительные значения при $z > 0$. Докажем то же самое для функции $\widetilde{M}(z)$. Соотношение $\widetilde{M}(z) > 0$, $z > 0$, эквивалентно неравенству

$$2A + (1-A)z + (2B - A - 1)z^2 > -(1+z)\sqrt{Q(z)}, \quad z > 0. \tag{2.7}$$

Отметим, что правая часть (2.7) отрицательна при любом $z > 0$, а при условии $B > (A+1)/2$ левая часть принимает лишь положительные значения. Таким образом, при $B > (A+1)/2$ соотношение (2.7) справедливо. Неравенство

$$\big(2A + (1-A)z + (2B - A - 1)z^2\big)^2 < (1+z)^2 Q(z)$$

элементарными эквивалентными преобразованиями приводится к виду

$$B(B - 1 - 3A)z^2 + (B - 1 - 3A - 3AB)z - 3A < 0.$$

При $B \le 1 + 3A$ это неравенство верно при всех $z > 0$, поэтому

$$\left|2A + (1 - A)z + (2B - A - 1)z^2\right| < (1 + z)\sqrt{Q(z)}, \quad z > 0. \tag{2.8}$$

Отсюда непосредственно вытекает справедливость (2.7). Тем самым (2.7) доказано при $B > (A + 1)/2$ и при $B \le 1 + 3A$, что в силу $A \in (0, 1]$ покрывает всю допустимую область изменения параметров A, B. Значит, $\widetilde{M}(z) > 0$ для всех $z > 0$.

Получим аналогичную (2.2) оценку

$$\begin{aligned}\|x_N - x(T)\| \le \max_{\lambda\in[a,+\infty)} \left|\lambda^{-p}(e^{-T\lambda} v_N(\lambda) - 1)\right| \cdot \|w\| \le \\ \le C_7\Bigg(\max_{\lambda\in[a,(\Delta t)^{-2/3}]}\Big(\lambda^{-p}\Big|e^{\widehat{X}(\lambda,\Delta t)} - 1\Big|\Big) + \max_{\lambda\in[(\Delta t)^{-2/3},+\infty)}\Big(\lambda^{-p}\Big|e^{\widehat{X}(\lambda,\Delta t)} - 1\Big|\Big) + \\ + \max_{\lambda\in[a,+\infty)}\Big(\lambda^{-p}\Big|\big(1 - \widetilde{M}(\lambda\Delta t)\big)\widetilde{Y}^{T/\Delta t}(\lambda\Delta t)\Big|e^{-T\lambda}\Big)\Bigg),\end{aligned} \tag{2.9}$$

где

$$\widehat{X}(\lambda, \Delta t) = \frac{T}{\Delta t} g_2(\lambda\Delta t) + g_3(\lambda\Delta t), \quad g_2(z) = \ln \widetilde{X}(z) - z, \quad g_3(z) = \ln \widetilde{M}(z). \tag{2.10}$$

Оценим вначале первый максимум в правой части (2.9). Элементарный анализ показывает, что

$$g_2(0) = 0,\ g_2'(0) = 0,\ g_2''(0) = 0,\ |g_2'''(0)| < \infty; \quad g_3(0) = 0, \quad g_3'(0) = 0, \quad |g_3''(0)| < \infty. \tag{2.11}$$

При $\lambda \in [a, (\Delta t)^{-2/3}]$ величина $\lambda\Delta t$ ограничена по модулю, поэтому

$$|\widehat{X}(\lambda, \Delta t)| \le \frac{T}{\Delta t}|g_2(\lambda\Delta t)| + |g_3(\lambda\Delta t)| \le C_8\Big(\frac{T}{\Delta t}\cdot\lambda^3(\Delta t)^3 + \lambda^2(\Delta t)^2\Big) \le C_9\lambda^3(\Delta t)^2 \le C_9, \tag{2.12}$$

и, следовательно, $|e^{\widehat{X}(\lambda,\Delta t)} - 1| \le C_{10}|\widehat{X}(\lambda, \Delta t)| \le C_{11}\lambda^3(\Delta t)^2$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\max_{\lambda\in[a,(\Delta t)^{-2/3}]}\Big(\lambda^{-p}\Big|e^{\widehat{X}(\lambda,\Delta t)} - 1\Big|\Big) \le C_{11}(\Delta t)^2 \max_{\lambda\in[a,(\Delta t)^{-2/3}]} \lambda^{3-p} \le \\ \le C_{12}\left\{\begin{array}{ll}(\Delta t)^{2p/3}, & 1 \le p < 3; \\ (\Delta t)^2, & p \ge 3.\end{array}\right.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Оценим второй максимум в правой части (2.9). Имеем

$$g_2(0) = 0, \quad g_2'(z) = \frac{(A + 2B + 1) + \frac{Q'(z)}{2\sqrt{Q(z)}}}{2(1 - A) + (A + 2B + 1)z + \sqrt{Q(z)}} - \frac{B}{1 + Bz} - 1. \tag{2.14}$$

Покажем, что $g_2'(z) < 0$ для всех $z > 0$, тогда

$$g_2(z) < 0 \quad \forall z > 0. \tag{2.15}$$

Умножая числитель и знаменатель первой дроби в (2.14) на $2(1-A)+(A+2B+1)z-\sqrt{Q(z)}$, приходим к представлению

$$g_2'(z) = \frac{(1-A+2AB)\sqrt{Q(z)} + 2A(1-3A-2AB) + (1-A)(1+A+6AB)z}{2\sqrt{Q(z)}\big((1-A+B)z + (1-2A)\big)(1+Bz)} - 1 =$$
$$= 8A^3(1+2B)\Bigg(\sqrt{Q(z)}\Big((1-A+2AB)\sqrt{Q(z)} - \big(2A(1-3A-2AB)+ + (1-A)(1+A+6AB)z\big)\Big)\Bigg)^{-1} - 1. \quad (2.16)$$

Теперь для доказательства отрицательности функции $g_2(z)$ при $z>0$ достаточно установить неравенство

$$(1-A+2AB)Q(z) - 8A^3(1+2B) > \sqrt{Q(z)}\big(2A(1-3A-2AB)+ + (1-A)(1+A+6AB)z\big), \quad z>0. \quad (2.17)$$

Действительно, комбинируя (2.17) с вытекающим из него неравенством

$$(1-A+2AB)\sqrt{Q(z)} > 2A(1-3A-2AB) + (1-A)(1+A+6AB)z$$

и пользуясь представлением (2.16), получим $g_2'(0) < 0$ при $z>0$, что вместе с $g_2(0)=0$ дает требуемое утверждение.

Докажем (2.17). Перепишем это неравенство в виде

$$\varphi(z) \equiv (1-A+2AB)\sqrt{Q(z)} - \frac{8A^3(1+2B)}{\sqrt{Q(z)}} - - (1-A)(1+A+6AB)z - 2A(1-3A-2AB) > 0, \quad z>0. \quad (2.18)$$

Имеем $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=0$,

$$\varphi''(z) = \frac{16A^3(1+2B)}{Q^{5/2}(z)}\Big(-\big((A+1)^2+8AB\big)(A^2+3A+6AB)z^2 - - 4A(1-A)(A^2+3A+6AB)z + 4A^2\big(A(3-A)+6AB\big)\Big).$$

Элементарный анализ показывает, что функция $\varphi''(z)$ при $z>0$ обращается в нуль только в одной точке $z=z^*$, принимает положительные значения при $z\in(0,z^*)$ и является отрицательной при $z\in(z^*,+\infty)$. Это значит, что если при некотором $z=z^{**}>0$ неравенство (2.18) нарушено, то оно нарушено и при всех $z>z^{**}$ и, в частности, предел $\lim\limits_{z\to+\infty}\varphi(z)/z$ не может быть больше нуля. Однако

$$\lim_{z\to+\infty}\frac{\varphi(z)}{z} = (1-A+2AB)\lim_{z\to\infty}\frac{\sqrt{Q(z)}}{z} - (1-A)(1+A+6AB) =$$
$$= (1-A+2AB)\sqrt{(A+1)^2+8AB} - (1-A)(1+A+6AB) =$$
$$= \frac{4A^2B\big(4A(1-A)+4AB(3-2A)+8AB^2\big)}{(1-A+2AB)\sqrt{(A+1)^2+8AB} + (1-A)(1+A+6AB)} > 0.$$

Полученное противоречие доказывает неравенство (2.18), а вместе с ним и (2.15).

Легко видеть, что функция $\widetilde{M}(z)$ и функция $g_3(z) = \ln \widetilde{M}(z)$ в (2.10) ограничены сверху при $z > 0$. Вместе с (2.15) это дает ограниченность сверху функции $\widehat{X}(\lambda, \Delta t)$ при всех $\lambda \in [a, +\infty)$, $\Delta t > 0$. Приходим к оценке для второго максимума в правой части (2.9)

$$\max_{\lambda \in [(\Delta t)^{-2/3}, +\infty)} \left(\lambda^{-p} \left| e^{\widehat{X}(\lambda, \Delta t)} - 1 \right| \right) \leq C_{13} (\Delta t)^{2p/3}. \tag{2.19}$$

Наконец, оценим третий максимум в правой части (2.9). Потребуем, чтобы параметр A рассматриваемой схемы класса $R^{(2,2)}$ не был равен единице (т. е. $A \in (0, 1)$), и докажем, что при этом условии

$$\sup_{z > 0} |\widetilde{Y}(z)| < 1. \tag{2.20}$$

В самом деле, $|\widetilde{Y}(0)| = |1 - 2A| < 1$. Элементарный анализ показывает, что уравнения $\widetilde{Y}(z) = \pm 1$ не имеют положительных корней при $A \in (0, 1)$, $B > 0$. Наконец, при данных значениях параметров функция $\widetilde{Y}(z)$ непрерывна на $[0, +\infty)$ и стремится при $z \to \infty$ к пределу

$$\lim_{z \to +\infty} \widetilde{Y}(z) = \frac{A + 2B + 1 - \sqrt{(A+1)^2 + 8AB}}{2B} \in (-1, 1).$$

Из сказанного вытекает неравенство (2.20). Обозначим

$$b = \sup_{z > 0} |\widetilde{Y}(z)| < 1. \tag{2.21}$$

С учетом ограниченности функции $M(z)$ получаем

$$\max_{\lambda \in [a, +\infty)} \left(\lambda^{-p} \left| \left(1 - \widetilde{M}(\lambda \Delta t)\right) \widetilde{Y}^{T/\Delta t}(\lambda \Delta t) \right| e^{-T\lambda} \right) \leq C_{14} b^{T/\Delta t}. \tag{2.22}$$

Подставляя (2.13), (2.19) и (2.22) в (2.9), приходим к финальной оценке

$$\|x_N - x(T)\| \leq C_{15} \begin{cases} (\Delta t)^{2p/3}, & 1 \leq p < 3; \\ (\Delta t)^2, & p \geq 3. \end{cases}$$

Используя схему рассуждения из [9], распространим ее на промежуточные узлы дискретизации:

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq C_{15} \begin{cases} (\Delta t)^{2p/3}, & 1 \leq p < 3; \\ (\Delta t)^2, & p \geq 3, \end{cases} \quad 0 \leq n \leq N. \tag{2.23}$$

Доказана

Теорема 2.2. *Для разностных методов класса $R^{(2,2)}$ с параметром $A \neq 1$ в применении к задаче* (1.1) *с точно заданным элементом f при выполнении условия истокопредставимости* (*условия* (A)) *справедлива оценка скорости сходимости* (2.23).

Аналоги теорем 2.1 и 2.2 были доказаны в [10] для более общего случая некорректных задач Коши с секториальными операторами в банаховом пространстве. Теорема 2.1 совпадает с доказанным в [10] утверждением при $p \neq 2$ и усиливает его при $p = 2$. Основная новизна настоящего раздела заключена в теореме 2.2, устанавливающей достаточные условия степенной сходимости всех разностных методов класса $R^{(2,2)}$ с $A \neq 1$. Аналогичная теорема из [10] содержит труднопроверяемое условие на коэффициенты разностного метода. Видим, что в частном случае некорректных задач Коши с самосопряженными операторами в гильбертовом пространстве обратную теорему возможно доказать без введения такого условия.

3. Обратные теоремы о скорости сходимости разностных методов

Теоремы 2.1 и 2.2 устанавливают достаточные условия квалифицированной сходимости разностных методов классов $R^{(1,1)}$ и $R^{(2,2)}$ в терминах показателя истокопредставимости искомого решения. Настоящий раздел посвящен получению необходимых условий, близких к достаточным и выраженным в виде обратных теорем. Теорема о необходимых условиях степенной сходимости методов класса $R^{(1,1)}$, обратная к теореме 2.1, формулируется следующим образом.

Теорема 3.1. *Пусть для решения задачи* (1.1) *с некоторым элементом* f *применяется метод класса* $R^{(1,1)}$, *и для него справедлива оценка скорости сходимости* $\|x_N - x(T)\| \leq C_{16}(\Delta t)^q$, *где* $q > 0$. *Тогда решение задачи* (1.1) *с данным элементом* f *удовлетворяет условию истокопредставимости* (*условию* (A)) *с любым* $p \in (0, 2q)$.

Этот результат был установлен в [10] для более общего случая задачи с секториальным оператором в банаховом пространстве.

Докажем аналогичную теорему о необходимых условиях степенной сходимости методов класса $R^{(2,2)}$, обратную к теореме 2.2.

Теорема 3.2. *Пусть для решения задачи* (1.1) *с некоторым элементом* f *применяется метод класса* $R^{(2,2)}$ *с параметром* $A \neq 1$, *и для него справедлива оценка скорости сходимости*

$$\|x_N - x(T)\| \leq C_{17}(\Delta t)^q, \quad q > 0. \tag{3.1}$$

Тогда решение задачи (1.1) *с данным элементом* f *удовлетворяет условию истокопредставимости* (*условию* (A)) *с любым* $p \in (0, 3q/2)$.

Доказательство. Зафиксируем $s > 1$. Следуя схеме рассуждений из [10], будем искать значения $p \in (0, s)$, для которых элемент $x(T)$ принадлежит интерполяционному пространству $(H, D(\mathcal{A}^s))_{p/s,1}$, где область определения $D(\mathcal{A}^s)$ снабжена нормой $\|v\|_{D(\mathcal{A}^s)} = \|\mathcal{A}^s v\|$. Тогда с помощью теоремы вложения непосредственно выводится справедливость условия истокопредставимости с этими значениями p. Необходимые факты теории интерполяционных пространств изложены, например, в [12]. Будем использовать K-метод построения таких пространств. Согласно этому методу для проверки включения $x(T) \in (H, D(\mathcal{A}^s))_{p/s,1}$ достаточно установить сходимость интеграла

$$\int_0^{+\infty} \sigma^{-p/s-1} K(\sigma, x(T)) d\sigma, \tag{3.2}$$

где $K(\sigma, x(T)) = \inf\limits_{x(T)=a_0+a_1,\ a_0 \in H,\ a_1 \in D(\mathcal{A}^s)} (\|a_0\| + \sigma\|\mathcal{A}^s a_1\|)$. В [10] показано, что $x_N \in D(\mathcal{A}^s)$ с любым $s > 1$, что позволяет с помощью разложений $x(T) = x(T) + 0$, $x(T) = (x(T) - x_N) + x_N$ получить оценки

$$\forall \sigma \in [0, +\infty), \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad K(\sigma, x(T)) \leq C_{18}, \quad K(\sigma, x(T)) \leq C_{17} N^{-q} + \sigma \|\mathcal{A}^s x_N\|. \tag{3.3}$$

Оценим величину $\|\mathcal{A}^s x_N\|$. В силу определения классического решения $x(T) \in D(\mathcal{A})$, так что имеет место представление $x(T) = \mathcal{A}^{-1} w$. В силу свойств функций от операторов имеем

$$\mathcal{A}^s x_N = \mathcal{A}^s v_N(\mathcal{A}) U_{-\mathcal{A}}(T) \mathcal{A}^{-1} w = \mathcal{A}^{s-1} v_N(\mathcal{A}) U_{-\mathcal{A}}(T) w,$$

$$\|\mathcal{A}^s x_N\| \leq \max_{\lambda \in [a, +\infty)} (\lambda^{s-1} |v_N(\lambda)| e^{-\lambda T}).$$

Воспользовавшись представлением (2.6), обозначениями (2.10) и (2.21), а также ограниченностью функции $\widetilde{M}(z)$ при $z > 0$, получаем

$$\|\mathcal{A}^s x_N\| \leq C_{19} \max_{\lambda\in[a,+\infty)} \left(e^{Ng_2(\lambda\Delta t)}\lambda^{s-1}\right) + C_{20}b^N. \tag{3.4}$$

Произвольно зафиксируем $r > 0$. Относительно функции $g_2(z)$ известны соотношения (2.11), (2.15). Поэтому существуют такие ϵ, $C_{21} > 0$, что при всех $\Delta t \in (0, \epsilon)$ справедливо

$$g_2(1) \leq r\frac{\ln \Delta t}{N} \leq -C_{21}(\Delta t)^3 \leq g_2(a\Delta t) < 0.$$

Следовательно, существует $\Lambda(\Delta t) \in (a, 1/\Delta t)$ такое, что $g_2(\Lambda(\Delta t)\Delta t) = r(\ln \Delta t)/N$ для всех $\Delta t \in (0, \epsilon)$. С другой стороны, для этих значений Δt справедлива оценка $g_2(\Lambda(\Delta t)\Delta t) \leq -C_{22}\Lambda^3(\Delta t)(\Delta t)^3$. Отсюда вытекает, что при всех $\Delta t \in (0, \epsilon)$ имеет место соотношение $\Lambda(\Delta t) \leq C_{23}(\Delta t)^{-2/3-\varepsilon}$ с любым $\varepsilon > 0$ и $C_{23} = C_{23}(\varepsilon)$.

Преобразуем неравенство (3.4)

$$\|\mathcal{A}^s x_N\| \leq C_{19} \max\Big\{\max_{\lambda\in[a,\Lambda(\Delta t)]}\left(e^{Ng_2(\lambda\Delta t)}\lambda^{s-1}\right), \max_{\lambda\in[\Lambda(\Delta t),1/\Delta t]}\left(e^{Ng_2(\lambda\Delta t)}\lambda^{s-1}\right),$$

$$\max_{\lambda\in[1/\Delta t,+\infty)}\left(e^{Ng_2(\lambda\Delta t)}\lambda^{s-1}\right)\Big\} + C_{20}b^N \leq C_{19}\max\Big\{e^{Ng_2(a\Delta t)}\Lambda^{s-1}(\Delta t),$$

$$e^{Ng_2(\Lambda(\Delta t)\Delta t)}(\Delta t)^{-(s-1)}, \max_{\lambda\in[1/\Delta t,+\infty)}\left(e^{Ng_2(\lambda\Delta t)}\lambda^{s-1}\right)\Big\} + C_{20}b^N \leq$$

$$\leq C_{24}\max\Big\{(\Delta t)^{-(2/3+\varepsilon)(s-1)}, (\Delta t)^{-(s-1)+r}, \max_{\lambda\in[1/\Delta t,+\infty)}\left(e^{Ng_2(\lambda\Delta t)}\lambda^{s-1}\right)\Big\}.$$

В силу оценки $g_2(z) \leq -C_{25}z$, $z \geq 1$, вытекающей из представления (2.10), ограниченности $\widetilde{X}(z)$ и соотношения (2.15), имеем

$$\max_{\lambda\in[1/\Delta t,+\infty)}\left(e^{Ng_2(\lambda\Delta t)}\lambda^{s-1}\right) \leq \max_{\lambda\in[1/\epsilon,+\infty)}\left(e^{-C_{25}T\lambda}\lambda^{s-1}\right) = C_{26}.$$

Вспоминая, что значение $r > 0$ может быть выбрано произвольным, приходим к итоговой оценке, справедливой для любых N и $\varepsilon > 0$,

$$\|\mathcal{A}^s x_N\| \leq C_{27}N^{\frac{2}{3}(s-1)+\varepsilon}, \quad C_{27} = C_{27}(\varepsilon). \tag{3.5}$$

Комбинируя (3.3) и (3.5), получаем

$$\forall\sigma \in [0, +\infty),\ \forall N \in \mathbb{N}\ \ K(\sigma, x(T)) \leq C_{17}N^{-q} + C_{27}\sigma N^{\frac{2}{3}(s-1)+\varepsilon}.$$

Выбирая здесь $N = \left[\sigma^{-\frac{1}{\frac{2}{3}(s-1)+q+\varepsilon}}\right]$, приходим к оценке

$$\forall\sigma \in [0, +\infty)\ \ K(\sigma, x(T)) \leq C_{28}\sigma^{\frac{q}{\frac{2}{3}(s-1)+q+\varepsilon}}.$$

Используя ее вместе с соотношением $K(\sigma, x(T)) \leq C_{18}$ из (3.3), оценим интеграл (3.2)

$$\int_0^{+\infty}\sigma^{-p/s-1}K(\sigma, x(T))d\sigma = \int_0^1\sigma^{-p/s-1}K(\sigma, x(T))d\sigma + \int_1^{+\infty}\sigma^{-p/s-1}K(\sigma, x(T))d\sigma \leq$$

$$\leq C_{28}\int_0^1\sigma^{\frac{q}{\frac{2}{3}(s-1)+q+\varepsilon}-p/s-1}d\sigma + C_{29}.$$

Видим, что при $p \in \left(0, \frac{qs}{\frac{2}{3}(s-1)+q+\varepsilon}\right)$ этот интеграл конечен и выполнено $p < s$, а значит, условие истокопредставимости справедливо со всеми такими показателями p. В силу произвольности s и ε отсюда вытекает утверждение теоремы.

Аналогичная теорема была доказана в [10] применительно к более общему случаю некорректных задач Коши с секториальными операторами в банаховом пространстве, однако с дополнительным труднопроверяемым условием на коэффициенты разностной схемы, требующим компьютерного вычисления. В частном случае некорректных задач Коши с самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве подобные условия не требуются. Другим интересным отличием от [10] является тот факт, что здесь пришлось применить теорему вложения однократно, тогда как в [10] ключевым моментом доказательства являлось ее итеративное применение.

4. Усиленные обратные теоремы о скорости сходимости разностных методов

Сопоставим прямые теоремы о степенной сходимости разностных методов, доказанные в разделе 2, с обратными теоремами, полученными в разделе 3. Начнем с теорем о сходимости методов класса $R^{(1,1)}$. Теорема 2.1 показывает, что для степенной сходимости методов данного класса с показателем $q \leq 1$ при Δt достаточно условие истокопредставимости с показателем $2q$. В то же время согласно теореме 3.1 необходимым является условие истокопредставимости с любым показателем $p \in (0, 2q)$. Возникает вопрос, каковы условия степенной сходимости методов класса $R^{(1,1)}$ с показателем $q > 1$. Следующая теорема показывает, что сходимость с такой скоростью возможна лишь в тривиальном случае.

Теорема 4.1. *Разностные методы класса $R^{(1,1)}$ в применении к задаче* (1.1) *с элементом f допускают оценку скорости сходимости*

$$\|x_N - x(T)\| \leq C_{30}(\Delta t)^q, \quad q > 1, \tag{4.1}$$

тогда и только тогда, когда $f = 0$.

Доказательство. При $f = 0$ имеем $x(t) \equiv 0$ в силу единственности классического решения задачи (1.1), и в частности $x(T) = 0$; кроме того, $x_N = v_N(\mathcal{A})f = 0$ при любом N, откуда следует $\|x_N - x(T)\| = 0$ и оценка (4.1) выполнена.

Докажем обратное утверждение: если справедлива оценка (4.1), то $f = 0$. Согласно (2.1), определению функции от оператора и свойствам спектрального семейства $\{E_\lambda\}$ имеем

$$x_N - x(T) = G_1(\mathcal{A})w = \int_{a-0}^{+\infty} G_1(\lambda) dE_\lambda w, \quad \|x_N - x(T)\|^2 = \int_{a-0}^{+\infty} G_1^2(\lambda) d\|E_\lambda w\|^2. \tag{4.2}$$

Здесь учтено, что условие истокопредставимости всегда справедливо с параметром $p = 1$, поэтому вместо функции $G_p(\lambda)$ из (2.1) используется функция $G_1(\lambda) = \lambda^{-1}(e^{X(\lambda,\Delta t)} - 1)$, соответственно $w = \mathcal{A}x(T)$.

Ближайшей целью является получение верхней оценки для $\|x_N - x(T)\|$. Покажем, что для любого $M \geq a$ найдется $K_M > 0$ такое, что

$$\forall N \in \mathbb{N}, \ \forall \lambda \in [a, M] \quad |G_1(\lambda)| \geq K_M \Delta t. \tag{4.3}$$

Напомним, что $X(\lambda, \Delta t) = \frac{T}{\Delta t} g_1(\lambda \Delta t) < 0$. Поэтому $G_1(\lambda) < 0$ при любом $\lambda \in [a, +\infty)$ и

$$|G_1(\lambda)| = \lambda^{-1}(1 - e^{X(\lambda,\Delta t)}).$$

В разделе 2 было показано, что $g_1(0) = 0$, $g_1'(0) = 0$, $g_1''(0) < 0$ и $g_1'(z) < 0$ при $z > 0$. Значит, каким бы ни было $M \geq a$, при $\lambda \in [a, M]$ справедлива оценка $g_1(\lambda\Delta t) \leq -C_{31}\lambda^2(\Delta t)^2$ с константой $C_{31} = C_{31}(M) > 0$. Поскольку при $\lambda \in [a, M]$ и любых возможных $\Delta t = 1/N$, $N \in \mathbb{N}$ величина $X(\lambda, \Delta t)$ остается ограниченной, имеем

$$|G_1(\lambda)| \geq C_{32}(M)\lambda^{-1}|X(\lambda, \Delta t)| \geq C_{33}(M)\lambda\Delta t \geq C_{33}(M)M\Delta t,$$

и тем самым оценка (4.3) доказана.

Из (4.2), (4.3) вытекает, что для всех $M \geq a$, $N \in \mathbb{N}$ справедливо

$$\|x_N - x(T)\|^2 \geq \int_{a-0}^{M} G_1^2(\lambda) d\|E_\lambda w\|^2 \geq K_M^2(\Delta t)^2 \int_{a-0}^{M} d\|E_\lambda w\|^2;$$

$$\|x_N - x(T)\| \geq K_M \|P_{[a,M]} w\| \Delta t. \tag{4.4}$$

Здесь $P_{[a,M]} = \int\limits_{a-0}^{M} dE_\lambda$ — ортопроектор на собственное подпространство оператора $\mathcal{A}$, отвечающее части спектра из отрезка $[a, M]$. Сравнивая (4.4) с (4.1), получаем

$$K_M \|P_{[a,M]} w\| \leq C_{30}(\Delta t)^{q-1}, \quad q > 1.$$

Произвольно зафиксировав $M \geq a$ и переходя в этом неравенстве к пределу при $\Delta t \to 0$, приходим к выводу, что $P_{[a,M]} w = 0$ для всех $M \geq a$. Это возможно, только если $w = 0$, а значит, и $f = U_{-\mathcal{A}}(T)x(T) = U_{-\mathcal{A}}(T)\mathcal{A}^{-1}w = 0$. □

Сравним теперь доказанные выше прямую и обратную теоремы о степенной сходимости разностных методов класса $R^{(2,2)}$ при $A \neq 1$. Теорема 2.2 утверждает, что для степенной сходимости методов данного класса с показателем $q \leq 2$ при Δt достаточно условие истокопредставимости с показателем $3q/2$. Согласно теореме 3.2 необходимым является условие истокопредставимости с любым показателем $p \in (0, 3q/2)$. Докажем, что степенная сходимость методов рассматриваемого класса со значением $q > 2$ возможна лишь в тривиальном случае $f = 0$. При этом придется наложить дополнительное условие $B \leq 1 + 3A$ на коэффициенты A, B метода класса $R^{(2,2)}$.

Теорема 4.2. *Разностные методы класса $R^{(2,2)}$ с параметрами $A \in (0, 1)$ и $B \in (0, 1+3A]$ в применении к задаче* (1.1) *с элементом f допускают оценку скорости сходимости*

$$\|x_N - x(T)\| \leq C_{34}(\Delta t)^q, \quad q > 2, \tag{4.5}$$

тогда и только тогда, когда $f = 0$.

Доказательство. Убедимся, что если справедлива оценка (4.5), то $f = 0$; в обратную сторону утверждение теоремы устанавливается тривиально. Как и при доказательстве теоремы 4.1, справедлива формула (2.1) с $p = 1$, $w = \mathcal{A}x(T)$ и формула (4.2), но функция $v_N(\lambda)$ в (2.1) имеет вид (2.6). По аналогии с (4.3) покажем, что для любого $M \geq a$ найдется $K_M > 0$ такое, что

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall \lambda \in [a, M] \quad |G_1(\lambda)| \geq K_M(\Delta t)^2. \tag{4.6}$$

С использованием (2.9) и (2.22) получаем

$$\begin{aligned} |G_1(\lambda)| = \lambda^{-1}|e^{-T\lambda}v_N(\lambda) - 1| = \lambda^{-1}\big|(e^{\widehat{X}(\lambda,\Delta t)} - 1) + (1 - \widetilde{M}(\lambda\Delta t))\widetilde{Y}^{T/\Delta t}(\lambda\Delta t)e^{-T\lambda}\big| \geq \\ \geq \lambda^{-1}\big|e^{\widehat{X}(\lambda,\Delta t)} - 1\big| - \big|(1 - \widetilde{M}(\lambda\Delta t))\widetilde{Y}^{T/\Delta t}(\lambda\Delta t)e^{-T\lambda}\big| \geq \\ \geq M^{-1}\big|e^{\widehat{X}(\lambda,\Delta t)} - 1\big| - C_{14}b^{T/\Delta t} \geq C_{35}(M)\big|e^{\widehat{X}(\lambda,\Delta t)} - 1\big|, \quad \lambda \in [a, M]. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Покажем, что в условиях теоремы величина $\widehat{X}(\lambda, \Delta t)$ отрицательна. В силу (2.10), (2.15) для этого достаточно установить отрицательность функции $g_3(z)$. Неравенство $g_3(z) < 0$ элементарными преобразованиями приводится к эквивалентному виду

$$2A + (1 + A)z + (2B - A - 1)z^2 < (1 + z)\sqrt{Q(z)},$$

а справедливость данного неравенства для всех $z > 0$ при условии $B \leq 1 + 3A$ вытекает из (2.8). Тем самым установлено, что $\widehat{X}(\lambda, \Delta t) < 0$ при допустимых значениях аргументов.

По аналогии с (2.12) устанавливается, что при $\lambda \in [a, M]$ величина $|\widehat{X}(\lambda, \Delta t)|$ ограничена сверху зависящей от M константой. Ввиду отрицательности функций $\widehat{X}(\lambda, \Delta t)$, $g_2(z)$, $g_3(z)$ при всех допустимых значениях аргументов, с использованием соотношений (2.10), (2.11) получаем

$$\begin{aligned} |e^{\widehat{X}(\lambda,\Delta t)} - 1| &\geq C_{36}(M)|\widehat{X}(\lambda, \Delta t)| = C_{36}(M)\Big|\frac{T}{\Delta t}g_2(\lambda\Delta t) + g_3(\lambda\Delta t)\Big| = \\ &= C_{36}(M)\Big(\frac{T}{\Delta t}|g_2(\lambda\Delta t)| + |g_3(\lambda\Delta t)|\Big) \geq C_{37}(M)(\lambda^3(\Delta t)^2 + \lambda^2(\Delta t)^2) \geq \\ &\geq C_{37}(M)(a^3 + a^2)(\Delta t)^2 = C_{38}(M)(\Delta t)^2, \quad \lambda \in [a, M]. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Комбинируя (4.7) и (4.8), приходим к искомому соотношению (4.6).

Из (4.6) и (4.2) вытекает справедливость соотношения

$$\forall M \geq a,\ \forall N \in \mathbb{N}\ \ \|x_N - x(T)\| \geq K_M\|P_{[a,M]}w\|(\Delta t)^2,$$

аналогичного (4.4). Сравнивая его с (4.5), получаем оценку

$$K_M\|P_{[a,M]}w\| \leq C_{34}(\Delta t)^{q-2}, \quad q > 2,$$

справедливую для всех Δt и $M \geq a$. Произвольно зафиксировав M и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, по аналогии с теоремой 4.1 приходим к выводу, что $w = 0$ и $f = 0$. □

Тем самым реализована относительно законченная программа исследования разностных методов классов $R^{(1,1)}$ и $R^{(2,2)}$ в применении к некорректным задачам Коши (1.1) с самосопряженными операторами в гильбертовом пространстве. Для каждого класса получены близкие друг к другу необходимые и достаточные условия сходимости со скоростью, степенной по Δt, в условиях точных входных данных. По сравнению с общим случаем некорректных задач Коши с секториальными операторами в банаховых пространствах [9], [10], прямые теоремы 2.1, 2.2 и обратные теоремы 3.1, 3.2 не содержат труднопроверяемых условий на коэффициенты разностных методов. Кроме того, установлены усиленные обратные теоремы 4.1 и 4.2, аналоги которых в случае банахова пространства автору неизвестны.

5. Теоремы о скорости сходимости метода квазиобращения

Применим развитую выше технику доказательства теорем о степенной сходимости разностных методов к изучению метода квазиобращения для задачи (1.1) ([2], [10], [13]). В рамках этого метода рассматривается вспомогательная корректная задача Коши

$$\frac{dx_\varepsilon(t)}{dt} = (\mathcal{A} - \varepsilon\mathcal{A}^2)x_\varepsilon(t), \quad x_\varepsilon(0) = f \tag{5.1}$$

с малым параметром $\varepsilon > 0$. Обобщенное решение задачи (5.1) имеет вид

$$x_\varepsilon(t) = U_{\mathcal{A}-\varepsilon\mathcal{A}^2}(t)f, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $\{U_{\mathcal{A}-\varepsilon\mathcal{A}^2}(t)\}_{t\geq 0}$ — аналитическая полугруппа непрерывных операторов в H, порожденная оператором $\mathcal{A} - \varepsilon\mathcal{A}^2$. В методе квазиобращения элемент $x_\varepsilon(T)$ выбирается в качестве приближения к значению $x(T)$ классического решения задачи (1.1) при $t = T$. В [2] показано, что $x_\varepsilon(T) \to x(T)$ при $\varepsilon \to 0$ в случае точно заданного элемента f; если же элемент f известен приближенно с уровнем погрешности $\delta > 0$, то при подходящем выборе $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ метод квазиобращения регуляризует некорректную задачу (1.1). Ниже считаем, что элемент f известен точно, а параметр ε принимает значения из ограниченного промежутка $(0, \varepsilon_0]$.

Заметим, что оператор $\mathcal{A}^2$ является самосопряженным со строго положительным спектром, как и оператор $\mathcal{A}$, причем $\sigma(\mathcal{A}^2) \subset [a^2, +\infty)$. Согласно [10] в предположении справедливости условия (A) имеем

$$x_\varepsilon(T) - x(T) = (U_{-\mathcal{A}^2}(\varepsilon T) - E)A^{-p}w = \widetilde{G}_p(\mathcal{A}^2)w, \quad \widetilde{G}_p(\lambda) = (e^{-\varepsilon T\lambda} - 1)\lambda^{-p/2}. \tag{5.2}$$

Отсюда

$$\|x_\varepsilon(T) - x(T)\| \le C_{39} \max_{\lambda \in [a^2, +\infty)} (1 - e^{-\varepsilon T\lambda})\lambda^{-p/2} \le$$

$$\le C_{39} \max\Big\{ \max_{\lambda \in [a^2, \varepsilon^{-1}]} (\varepsilon T \lambda^{1-p/2}), \max_{\lambda \in [\varepsilon^{-1}, +\infty)} \lambda^{-p/2} \Big\};$$

$$\|x_\varepsilon(T) - x(T)\| \le C_{40} \begin{cases} \varepsilon^{p/2}, & 1 \le p < 2; \\ \varepsilon, & p \ge 2. \end{cases} \tag{5.3}$$

Тем самым доказана

Теорема 5.1. *Для метода квазиобращения в применении к задаче* (1.1) *с точно заданным элементом f при выполнении условия истокопредставимости* (*условия* (*A*)) *справедлива оценка* (5.3).

Эта теорема при $p \ne 2$ соответствует оценке из [10] и усиливает ее при $p = 2$. Также в [10] установлена соответствующая обратная

Теорема 5.2. *Пусть для решения задачи* (1.1) *с некоторым элементом f применяется метод квазиобращения, и для него справедлива оценка скорости сходимости $\|x_\varepsilon(T) - x(T)\| \le C_{41}\varepsilon^q$, где $q > 0$. Тогда решение задачи* (1.1) *с данным f удовлетворяет условию истокопредставимости* (*условию*(*A*)) *с любым $p \in (0, 2q)$.*

Докажем усиленную обратную теорему о сходимости метода квазиобращения, аналогичную результатам из раздела 4.

Теорема 5.3. *Оценка скорости сходимости*

$$\|x_\varepsilon(T) - x(T)\| \le C_{42}\varepsilon^q, \quad q > 1, \tag{5.4}$$

метода квазиобращения в применении к задаче (1.1) *с некоторым элементом f справедлива тогда и только тогда, когда $f = 0$.*

Доказательство. В силу (5.2) имеем аналогичное (4.2) равенство

$$\|x_\varepsilon(T) - x(T)\|^2 = \int\limits_{a^2-0}^{+\infty} \widetilde{G}_1^2(\lambda) d\|F_\lambda w\|^2, \tag{5.5}$$

где $w = \mathcal{A}x(T)$, операторы $F_\lambda = E_{\sqrt{\lambda}}$ суть спектральные проекторы, отвечающие оператору $\mathcal{A}^2$. Рассуждая по аналогии с теоремами 4.1, 4.2, покажем, что для любого $M \ge a^2$ найдется $\widetilde{K}_M > 0$ такое, что

$$\forall \varepsilon > 0, \ \forall \lambda \in [a^2, M] \ \ |\widetilde{G}_1(\lambda)| \ge \widetilde{K}_M \varepsilon. \tag{5.6}$$

Заметим, что величина $\varepsilon T\lambda$ ограничена при $\lambda \in [a^2, M]$: а именно, $\varepsilon T\lambda \in (0, \varepsilon_0 TM]$. Имеем

$$\forall \lambda \in [a^2, M] \quad |\widetilde{G}_1(\lambda)| = (1 - e^{-\varepsilon T\lambda})\lambda^{-1/2} \geq C_{43}(M)\varepsilon T\sqrt{\lambda} \geq C_{43}(M)T\sqrt{a}\varepsilon.$$

Тем самым доказали неравенство (5.6) с $\widetilde{K}_M = C_{43}(M)T\sqrt{a}$.

Из (5.5) и (5.6) вытекает аналогичное (4.4) соотношение

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall M \geq a^2 \quad \|x_\varepsilon(T) - x(T)\| \geq \widetilde{K}_M \|Q_{[a^2,M]} w\| \varepsilon, \quad Q_{[a^2,M]} = \int_{a^2-0}^{M} dF_\lambda.$$

Сравнивая его с (5.4), получаем оценку

$$\widetilde{K}_M \|Q_{[a^2,M]} w\| \leq C_{42}\varepsilon^{q-1}, \quad q > 1,$$

справедливую для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $M \geq a^2$. Произвольно зафиксировав M и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, приходим к выводу, что $w = 0$ и $f = 0$. $\square$

В теоремах 5.1, 5.2 и 5.3 установлены близкие друг к другу необходимые и достаточные условия квалифицированной сходимости метода квазиобращения в применении к некорректным задачам Коши (1.1) с самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве в терминах показателя истокопредставимости искомого решения. Исследование метода квазиобращения проводилось по той же схеме, что и изучение разностных методов. Такой же подход использовался автором в [10] в применении к общему случаю некорректных задач Коши с секториальными операторами в банаховом пространстве. Отметим, что до этого справедливость прямой теоремы 5.1 была установлена в [2] только для случая $x(T) \in D(A^4)$; обратные и усиленные обратные теоремы для этого метода ранее не были известны.

Литература

[1] Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Ключев В.В. *Об оценке скорости сходимости и погрешности разностных методов решения некорректной задачи Коши в банаховом пространстве*, Вычисл. методы и программиров. **7**, 163–171 (2006).

[2] Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И. *Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи* (Физматлит, М., 1995).

[3] Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве* (Наука, М., 1967).

[4] Бакушинский А.Б., Кокурин М.М., Кокурин М.Ю. *Об одном классе разностных схем решения некорректной задачи Коши в банаховом пространстве*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики **52** (3), 483–498 (2012).

[5] Haase M. *The functional calculus for sectorial operators* (Birkhäuser, Basel, 2006).

[6] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. *Лекции по функциональному анализу* (Мир, М., 1979).

[7] Треногин В.А. *Функциональный анализ* (Физматлит, М., 2007).

[8] Бакушинский А.Б. *Разностные методы решения некорректных задач Коши для эволюционных уравнений в комплексном B-пространстве*, Дифференц. уравнения **8** (9), 1661–1668 (1972).

[9] Кокурин М.М. *Об оптимизации оценок скорости сходимости некоторых классов разностных схем решения некорректной задачи Коши*, Вычисл. методы и программиров. **14**, 58–76 (2013).

[10] Кокурин М.М. *Необходимые и достаточные условия степенной сходимости метода квазиобращения и разностных методов решения некорректной задачи Коши в условиях точных данных*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики **55** (12), 2027–2041 (2015).

[11] Самарский А.А., Вабищевич П.Н. *Численные методы решения обратных задач математической физики* (Едиториал УРСС, М., 2004).

[12] Трибель Х. *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы* (Мир, М., 1980).

[13] Латтес Р., Лионс Ж.-Л. *Метод квазиобращения и его приложения* (Мир, М., 1970).

Михаил Михайлович Кокурин

Марийский государственный университет,
пл. Ленина, д. 1, г. Йошкар-Ола, 424000, Россия,

e-mail: kokurin@nextmail.ru

M.M. Kokurin

Conditions for the qualified convergence of finite difference methods and the quasi-reversibility method for solving linear ill-posed Cauchy problems in a Hilbert space

Abstract. We consider finite difference methods and the quasi-reversibility method for solving linear ill-posed Cauchy problems with selfadjoint operators and noise-free initial data in a Hilbert space. We refine the earlier author's results on the convergence rate of the methods under investigation. We establish the sufficient conditions and the necessary conditions, close to one another, for the qualified convergence of these methods in terms of the solution's sourcewise index. We prove that the considered methods cannot converge with the polynomial rate greater than the certain limit, except for the trivial case.

Keywords: ill-posed Cauchy problem, finite difference scheme, quasi-reversibility method, convergence rate, operator calculus, selfadjoint operator, sourcewise representation, interpolation spaces.

Mikhail Mikhailovich Kokurin

Mari State University,
1 Lenin sq., Yoshkar-Ola, 424000 Russia,

e-mail: kokurin@nextmail.ru