

УДК 514.16

## ДЕЙСТВИЯ ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ АЛГЕБР ВЕЙЛЯ НА РАССЛОЕНИЯХ ВЕЙЛЯ

А.Я. Султанов

### Аннотация

В работе доказана неприводимость алгебры Вейля, введено понятие суммы Уитни алгебр Вейля. Доказано, что если  $m$  – ширина,  $k$  – размерность радикала,  $r$  – индекс алгебры Вейля, то размерность группы автоморфизмов этой алгебры равна  $mk - r$ . Построены левое и правое действия группы автоморфизмов алгебры Вейля на расслоении Вейля.

### 1. Алгебры Вейля

В этом параграфе приведем определение алгебр Вейля и автоморфизмов, опишем способ получения из двух алгебр Вейля новой алгебры Вейля, называемой суммой Уитни этих алгебр.

**Определение 1.1.** [1]. Линейная алгебра  $\mathbb{A}$  конечного ранга над полем  $\mathbb{R}$  называется алгеброй Вейля, если выполнены следующие условия:

- (1)  $\mathbb{A}$  – коммутативна, ассоциативна, обладает единицей;
- (2) существует идеал  $\mathbb{I}$  такой, что  $\mathbb{I}^p \neq \{0\}$ , а  $\mathbb{I}^{p+1} = \{0\}$ ;
- (3) факторалгебра  $\mathbb{A}$  изоморфна  $\mathbb{R}$ .

Число  $p$  называется высотой алгебры  $\mathbb{A}$ ; число  $m$ , равное размерности факторалгебры  $\mathbb{I}$ , называется шириной алгебры  $\mathbb{A}$ . В идеале  $\mathbb{I}$  можно выбрать  $m$  элементов  $e_1, e_2, \dots, e_m$ , которые порождают этот идеал. Одномерная подалгебра, порожденная единицей  $\delta$  алгебры  $\mathbb{A}$ , изоморфна  $\mathbb{R}$ . Отождествляя  $\delta$  с 1 поля действительных чисел  $\mathbb{R}$ , алгебру  $\mathbb{A}$  можно представить в виде полупрямой суммы  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{I}$ :  $\mathbb{A} = \mathbb{R} + \mathbb{I}$ . Идеал  $\mathbb{I}$  называется радикалом алгебры  $\mathbb{A}$ . Базис в алгебре  $\mathbb{A}$  можно построить из элементов  $e^0 = 1$ , и  $e_1^{\alpha_1} e_2^{\alpha_2} \dots e_m^{\alpha_m}$ , где  $\alpha_i \geq 0$  и  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m \neq 0$ . Для обозначения элементов базиса удобно ввести мультииндексы  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ , где  $\alpha_i \geq 0$  и  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m \leq p$ . Тогда базисные элементы можно записать следующим образом  $e^\alpha = e_1^{\alpha_1} \dots e_m^{\alpha_m}$ . Мультииндекс  $0 = (0, \dots, 0)$  соответствует 1. Количество всевозможных мультииндексов  $\alpha$  таких, что  $0 \leq |\alpha| \leq p$  равно  $\binom{p+m}{m}$  – числу сочетаний из  $p+m$  элементов по  $m$  элементов.

Если  $\dim \mathbb{A} < \binom{p+m}{m}$ , то не все мультииндексы будут соответствовать базисным элементам. Обозначим через  $\Lambda$  – множество мультииндексов, соответствующих базисным элементам алгебры  $\mathbb{A}$ , а через  $\Lambda^*$  – множество всех остальных мультииндексов.

Для каждого мультииндекса  $\mu^* \in \Lambda^*$ , имеем

$$e^{\mu^*} = a_\lambda^{\mu^*} e^\lambda, \quad (1.1)$$

где  $a_\lambda^{\mu^*} \in \mathbb{R}$ , а по мультииндексу  $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$  ведется суммирование. Соотношения (1.1) называются определяющими соотношениями алгебры Вейля  $\mathbb{A}$ .

Если  $\dim \mathbb{A} = \binom{p+m}{m}$ , то  $\Lambda^* = \emptyset$ . В этом случае алгебра  $\mathbb{A}$  не имеет определяющих соотношений и называется свободной алгеброй Вейля.

Перейдем к определениям автоморфизмов и дифференцирований произвольных алгебр.

**Определение 1.2.** Обратимый линейный оператор  $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  называется автоморфизмом алгебры  $\mathbb{A}$ , если для любых элементов  $x, y \in \mathbb{A}$  выполняется условие  $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ .

Множество всех автоморфизмов алгебры  $\mathbb{A}$  образует группу относительно композиции операторов. Эта группа обозначается  $\text{Aut } \mathbb{A}$ . Группа  $\text{Aut } \mathbb{A}$  изоморфна некоторой матричной алгебраической группе, поэтому  $\text{Aut } \mathbb{A}$  допускает естественную структуру группы Ли [2, с. 243].

Для описания алгебры Ли группы автоморфизмов алгебры  $\mathbb{A}$  введем еще одно понятие – понятие дифференцирования алгебры  $\mathbb{A}$ .

**Определение 1.3.** Линейный оператор  $D : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  называется дифференцированием алгебры  $\mathbb{A}$ , если  $D(xy) = D(x)y + xD(y)$  для любых элементов  $x, y \in \mathbb{A}$ .

Линейное пространство всех дифференцирований обозначается символом  $\text{Der } \mathbb{A}$ . Это пространство допускает естественную структуру алгебры Ли относительно операции  $[ , ]$ , определенной условием

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1,$$

для любых  $D_1, D_2 \in \text{Der } \mathbb{A}$ . Оператор  $D_1 \circ D_2$  представляет собой композицию операторов  $D_2$  и  $D_1$ .

Имеет место следующее

**Предложение 1.1.** [2, с. 244]. Алгеброй Ли группы  $\text{Aut } \mathbb{A}$  является алгебра Ли  $\text{Der } \mathbb{A}$  всех дифференцирований алгебры  $\mathbb{A}$ .

Из этого предложения следует, что размерность группы Ли  $\text{Aut } \mathbb{A}$  и алгебры Ли  $\text{Der } \mathbb{A}$  равны.

Приведем понятие прямой суммы двух алгебр. Пусть  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$  – произвольные алгебры. На множестве  $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$  всевозможных пар  $(a, b)$ , где  $a \in \mathbb{A}$ ,  $b \in \mathbb{B}$ , можно ввести операции сложения, умножения пар на действительные числа, а также операцию умножения пар следующим образом:  $(a, b) + (a_1, b_1) = (a + a_1, b + b_1)$ ,  $t(a, b) = (ta, tb)$ ,  $(a, b)(a_1, b_1) = (aa_1, bb_1)$ . Множество  $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$  с введенными операциями является линейной алгеброй над  $\mathbb{R}$ . Обозначается полученная алгебра  $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$  и называется прямой суммой алгебр  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$  [1, с. 21]. Если алгебры  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$  обладают единицами  $\delta_{\mathbb{A}}$ ,  $\delta_{\mathbb{B}}$  (такие алгебры называются унитальными), то пара  $(\delta_{\mathbb{A}}, \delta_{\mathbb{B}})$  является единицей алгебры  $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$ .

Важным понятием теории линейных алгебр является понятие изоморфизма.

**Определение 1.4.** Линейное отображение  $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$  называется изоморфизмом, если  $\varphi$  – биекция и  $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$  для любых элементов  $x, y \in \mathbb{A}$ .

**Предложение 1.2.** Пусть  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$  – линейные алгебры над  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{A}$  – унитальная алгебра,  $\delta_{\mathbb{A}}$  – ее единица. Если  $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$  – изоморфизм, то  $\mathbb{B}$  – унитальная алгебра и ее единица  $\delta_{\mathbb{B}} = \varphi(\delta_{\mathbb{A}})$ .

**Доказательство.** Обозначим через  $\varphi(\delta_{\mathbb{A}})$  образ единицы  $\delta_{\mathbb{A}}$  алгебры  $\mathbb{A}$ . Пусть  $b$  – произвольный элемент алгебры  $\mathbb{B}$ . В силу биективности отображения  $\varphi$  существует элемент  $a \in \mathbb{A}$ , такой, что  $\varphi(a) = b$ . Тогда

$$\varphi(\delta_{\mathbb{A}})b = \varphi(\delta_{\mathbb{A}})\varphi(a) = \varphi(\delta_{\mathbb{A}}a) = \varphi(a) = b.$$

Аналогично  $b\varphi(\delta_{\mathbb{A}}) = \varphi(a)\varphi(\delta_{\mathbb{A}}) = \varphi(a\delta_{\mathbb{A}}) = b$ . Отсюда следует, что  $\varphi(\delta_{\mathbb{A}}) = \delta_{\mathbb{B}}$  – единица алгебры  $\mathbb{B}$ .  $\square$

**Предложение 1.3.** *Если ассоциативная унитальная алгебра  $\mathbb{A}$  изоморфна прямой сумме  $\mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$  алгебр  $\mathbb{B} \neq \{0_{\mathbb{B}}\}$ ,  $\mathbb{C} \neq \{0_{\mathbb{C}}\}$ , то каждая из алгебр  $\mathbb{B}$  и  $\mathbb{C}$  является ассоциативной и унитальной.*

**Доказательство.** Пусть  $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$  – изоморфизм. Выберем произвольные элементы  $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{B}$ ,  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ . Для каждой пары  $(b_1, c_1)$ ,  $(b_2, c_2)$ ,  $(b_3, c_3)$  существуют прообразы  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{A}$ . В силу того, что  $\varphi$  – изоморфизм, а  $\mathbb{A}$  – ассоциативна, алгебра  $\mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$  является также ассоциативной. Действительно,

$$\begin{aligned} (b_1, c_1)((b_2, c_2)(b_3, c_3)) &= \varphi(a_1)(\varphi(a_2)\varphi(a_3)) = \varphi(a_1)\varphi(a_2a_3) = \\ &= \varphi(a_1(a_2a_3)) = \varphi((a_1a_2)a_3) = (\varphi(a_1)\varphi(a_2))\varphi(a_3) = ((b_1, c_1)(b_2, c_2))(b_3, c_3). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(b_1, c_1)((b_2, c_2)(b_3, c_3)) = ((b_1, c_1)(b_2, c_2))(b_3, c_3).$$

Это соотношение можно переписать так:

$$(b_1(b_2b_3), c_1(c_2c_3)) = ((b_1, b_2)b_3, (c_1c_2)c_3).$$

Отсюда  $b_1(b_2b_3) = (b_1b_2)b_3$  и  $c_1(c_2c_3) = (c_1c_2)c_3$ , то есть каждая из алгебр  $\mathbb{B}$  и  $\mathbb{C}$  ассоциативна.  $\square$

Пусть  $\delta_{\mathbb{A}}$  – единица алгебры  $\mathbb{A}$ . Обозначим через  $\varphi(\delta_{\mathbb{A}})$  ее образ. Тогда  $\varphi(\delta_{\mathbb{A}})$  – единица алгебры  $\mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$ . Пусть  $\varphi(\delta_{\mathbb{A}}) = (\delta_1, \delta_2)$ , где  $\delta_1 \in \mathbb{B}, \delta_2 \in \mathbb{C}$ . Для любого элемента  $(b, c) \in \mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$  существует прообраз  $a \in \mathbb{A} : (b, c) = \varphi(a)$ .

Так как  $(\delta_1, \delta_2)$  – единица прямой суммы  $\mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$ , то

$$(\delta_1, \delta_2)(b, c) = (b, c), \quad (b, c)(\delta_1, \delta_2) = (b, c).$$

Отсюда

$$(\delta_1b, \delta_2c) = (b, c), \quad (b\delta_1, c\delta_2) = (b, c).$$

Таким образом,  $\delta_1b = b\delta_1 = b$  и  $\delta_2c = c\delta_2 = c$ . Следовательно,  $\delta_1$  – единица алгебры  $\mathbb{B}$ , а  $\delta_2$  – единица алгебры  $\mathbb{C}$ .

Любая алгебра  $\mathbb{A}$  допускает разложение в прямую сумму  $\mathbb{A} \oplus \{0_{\mathbb{A}}\}$ . Такое разложение называется тривиальным. Сумма  $\mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$ , где  $\mathbb{B} \neq \{0_{\mathbb{B}}\}$  и  $\mathbb{C} \neq \{0_{\mathbb{C}}\}$  называется нетривиальной.

**Определение 1.5.** Линейная алгебра  $\mathbb{A}$ , изоморфная нетривиальной прямой сумме  $\mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$ , называется приводимой. В противном случае алгебра  $\mathbb{A}$  называется неприводимой.

**Предложение 1.4.** *Любая алгебра Вейля является неприводимой алгеброй.*

Прежде чем перейти к доказательству этого предложения, выясним строение идемпотентов алгебр Вейля.

Напомним, что элемент  $a \in \mathbb{A}$  называется идемпотентным, иначе идемпотентом, если  $a^2 = a$ .

**Предложение 1.5.** *В любой алгебре Вейля нет идемпотентов, отличных от 0 и единицы  $\delta$ .*

**Доказательство.** Пусть  $a$  – произвольный идемпотент алгебры Вейля  $\mathbb{A}$ . Так как  $a = a_0\delta + a_1$ , где  $a_0 \in \mathbb{R}$ ,  $a_1 \in \mathbb{I}$ , то

$$(a_0\delta + a_1)^2 = a_0\delta + a_1.$$

Отсюда следует, что

$$a_0^2 = a_0, \quad (1.2)$$

$$2a_0a_1 + a_1^2 = a_1. \quad (1.3)$$

Из соотношения (1.2) следует  $a_0 = 0$  или  $a_0 = 1$ .

Пусть  $a_0 = 0$ . Тогда из (1.3) следует, что  $a_1^k = a_1$  для любого натурального числа  $k$ . Если  $k = p$  – высоте алгебры  $\mathbb{A}$ , то  $a_1^k = 0$ . Таким образом,  $a_1 = 0$ , значит,  $a = 0$ .

Пусть теперь  $a_0 = 1$ . Тогда из соотношения (1.3) получим, что  $a_1^k = (-1)^{k-1}a_1$  для любого натурального числа  $k$ . Поэтому  $a_1 = 0$ , значит,  $a = \delta$ . Предложение 1.5 доказано.  $\square$

. **Доказательство предложения 1.4.** Пусть  $\mathbb{A}$  – приводимая алгебра Вейля. Тогда она изоморфна нетривиальной прямой сумме  $\mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$  алгебр  $\mathbb{B}$  и  $\mathbb{C}$ . Так как  $\mathbb{A}$  – унитальная алгебра, то в силу предложения 1.3 каждая из алгебр  $\mathbb{B}$  и  $\mathbb{C}$  унитальна. Обозначим их единицы через  $\delta_{\mathbb{B}}$  и  $\delta_{\mathbb{C}}$  соответственно. Пусть  $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$  – изоморфизм. Тогда  $\varphi(\delta) = (\delta_{\mathbb{B}}, \delta_{\mathbb{C}})$ . Элементы  $\delta_1 = (\delta_{\mathbb{B}}, 0)$  и  $\delta_2 = (0, \delta_{\mathbb{C}})$  отличны от  $(\delta_{\mathbb{B}}, \delta_{\mathbb{C}})$ . Кроме того, они являются идемпотентами прямой суммы  $\mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$ :  $\delta_1^2 = \delta_1, \delta_2^2 = \delta_2$ . Прообразы этих элементов  $\varphi^{-1}(\delta_1), \varphi^{-1}(\delta_2)$  – идемпотенты алгебры  $\mathbb{A}$ :

$$(\varphi^{-1}(\delta_1))^2 = \varphi^{-1}(\delta_1)\varphi^{-1}(\delta_1) = \varphi^{-1}(\delta_1^2) = \varphi^{-1}(\delta_1).$$

$$(\varphi^{-1}(\delta_2))^2 = \varphi^{-1}(\delta_2).$$

В силу предложения 1.5 идемпотент  $\varphi^{-1}(\delta_1)$  равен  $0_{\mathbb{A}}$  или  $\delta$ . Если  $\varphi^{-1}(\delta_1) = 0_{\mathbb{A}}$ , то  $\delta_1 = 0$ , чего быть не может. Если  $\varphi^{-1}(\delta_1) = \delta$ , то  $\varphi(\delta) = \delta_1$ . Отсюда  $(\delta_{\mathbb{B}}, \delta_{\mathbb{C}}) = (\delta_{\mathbb{B}}, 0)$ , значит,  $\delta_{\mathbb{C}} = 0$ . Получили противоречие.

Таким образом, алгебра Вейля  $\mathbb{A}$  не может быть приводимой.  $\square$

Следствием предложения 1.4 является

**Предложение 1.6.** Прямая сумма  $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$  алгебр Вейля  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$  не является алгеброй Вейля.

В прямой сумме  $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$  можно выделить подалгебру, которая будет алгеброй Вейля, порожденной алгебрами  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$ . Укажем способ построения этой подалгебры. Для этого построим каноническую проекцию алгебры Вейля  $\mathbb{A}$  на алгебру  $\mathbb{R}$ .

Из определения алгебры Вейля  $\mathbb{A}$  следует, что существует изоморфизм

$$\omega : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Элементы факторалгебры  $\mathbb{A}$  будем обозначать символами вида  $\bar{a}$ , где  $a \in \mathbb{A}$ . Ясно, что  $\bar{a} = \bar{b}$  тогда и только тогда, когда

$$a \equiv b \pmod{\mathbb{I}}.$$

Определим отображение  $\pi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$  условием  $\pi(a) = \omega(\bar{a})$ . Это отображение сюръективно. Действительно, для любого элемента  $a_0 \in \mathbb{R}$  имеем  $a_0 = a_0 \cdot 1 = a_0\delta$

(единица  $\delta$  алгебры  $\mathbb{A}$  отождествлена с единицей поля действительных чисел). Тогда

$$\pi(a_0\delta) = \omega(\overline{a_0\delta}) = \omega(a_0\bar{\delta}) = a_0\omega(\bar{\delta}) = a_0\delta.$$

Отображение  $\pi$  является гомоморфизмом алгебры  $\mathbb{A}$  на алгебру  $\mathbb{R}$ . Действительно, для любых элементов  $a, b \in \mathbb{A}$  и  $t \in \mathbb{R}$  имеем

$$\pi(a + b) = \omega(\overline{a + b}) = \omega(\bar{a} + \bar{b}) = \pi(a) + \pi(b).$$

$$\pi(ta) = \omega(\overline{ta}) = \omega(t\bar{a}) = t\omega(\bar{a}) = t\pi(a).$$

$$\pi(ab) = \omega(\overline{ab}) = \omega(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \pi(a)\pi(b).$$

Таким образом, отображение  $\pi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$  является эпиморфизмом.

**Определение 1.6.** Эпиморфизм  $\pi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ , определенный условием  $\pi(a) = \omega(\bar{a})$ , называется канонической проекцией алгебры Вейля  $\mathbb{A}$  на алгебру действительных чисел  $\mathbb{R}$ .

Пусть  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$  – алгебры Вейля над  $\mathbb{R}$ , единицы которых отождествлены с единицей поля  $\mathbb{R}$ .  $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$  – прямая сумма этих алгебр. Рассмотрим подмножество  $\mathbb{A} \oplus_{\omega} \mathbb{B} \subset \mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$ , состоящее из всевозможных пар  $(a, b)$ , где  $a \in \mathbb{A}$ ,  $b \in \mathbb{B}$ , удовлетворяющих условию  $\pi_{\mathbb{A}}(a) = \pi_{\mathbb{B}}(b)$ . Здесь  $\pi_{\mathbb{A}}$ ,  $\pi_{\mathbb{B}}$  – канонические проекции алгебр  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$  на алгебру  $\mathbb{R}$  соответственно.

**Предложение 1.7.** Подмножество  $\mathbb{A} \oplus_{\omega} \mathbb{B}$ , снабженное ограничениями основных операций алгебры  $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$ , является унитальной подалгеброй прямой суммы  $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$ .

**Доказательство.** Пусть  $(a, b) \in \mathbb{A} \oplus_{\omega} \mathbb{B}$  и  $(c, d) \in \mathbb{A} \oplus_{\omega} \mathbb{B}$ . Тогда  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ . Поскольку  $(a, b) \in \mathbb{A} \oplus_{\omega} \mathbb{B}$  и  $(c, d) \in \mathbb{A} \oplus_{\omega} \mathbb{B}$ , то  $\pi_{\mathbb{A}}(a) = \pi_{\mathbb{B}}(b)$  и  $\pi_{\mathbb{A}}(c) = \pi_{\mathbb{B}}(d)$ . Тогда

$$\pi_{\mathbb{A}}(a + c) = \pi_{\mathbb{A}}(a) + \pi_{\mathbb{A}}(c) = \pi_{\mathbb{B}}(b) + \pi_{\mathbb{B}}(d) = \pi_{\mathbb{B}}(b + d).$$

Значит,  $(a, b) + (c, d) \in \mathbb{A} \oplus_{\omega} \mathbb{B}$ . Аналогично  $t(a, b) \in \mathbb{A} \oplus_{\omega} \mathbb{B}$  для любого  $t \in \mathbb{R}$ .

Рассмотрим произведение элементов из выделенного множества:

$$(a, b)(c, d) = (ac, bd).$$

Отсюда получим, что  $\pi_{\mathbb{A}}(ac) = \pi_{\mathbb{A}}(a)\pi_{\mathbb{A}}(c) = \pi_{\mathbb{B}}(b)\pi_{\mathbb{B}}(d) = \pi_{\mathbb{B}}(bd)$ . Следовательно,  $(a, b)(c, d) \in \mathbb{A} \oplus_{\omega} \mathbb{B}$ . Далее,  $\pi_{\mathbb{A}}(\delta) = \pi_{\mathbb{B}}(\delta)$ , поэтому  $(\delta, \delta)$  – единица алгебры  $\mathbb{A} \oplus_{\omega} \mathbb{B}$ . Утверждение доказано.  $\square$

**Предложение 1.8.** Прямая сумма  $\mathring{\mathbb{A}} \oplus \mathring{\mathbb{B}}$  радикалов  $\mathring{\mathbb{A}}, \mathring{\mathbb{B}}$  алгебр Вейля  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$  соответственно является радикалом алгебры  $\mathbb{A} \oplus_{\omega} \mathbb{B}$ .

**Доказательство.** Как известно, радикалом линейной алгебры называется идеал, состоящий из всех нильпотентных элементов этой алгебры [1, с. 16].

Пусть  $(a, b)$  – произвольный нильпотентный элемент алгебры  $\mathbb{A} \oplus_{\omega} \mathbb{B}$ . Тогда существует натуральное число  $k$ , такое, что  $(a, b)^k = 0$ . Отсюда  $(a^k, b^k) = 0$ , значит,  $a^k = 0_{\mathbb{A}}$ ,  $b^k = 0_{\mathbb{B}}$ . Из этих равенств следует, что  $a$  – нильпотентный элемент алгебры  $\mathbb{A}$ ,  $b$  – нильпотентный элемент алгебры  $\mathbb{B}$ . Поэтому  $a \in \mathring{\mathbb{A}}$ ,  $b \in \mathring{\mathbb{B}}$ , тогда  $(a, b) \in \mathring{\mathbb{A}} \oplus \mathring{\mathbb{B}}$ . Таким образом,  $Rd(\mathbb{A} \oplus_{\omega} \mathbb{B}) \subset \mathring{\mathbb{A}} \oplus \mathring{\mathbb{B}}$ . С другой стороны, для любого элемента  $(x, y) \in \mathring{\mathbb{A}} \oplus \mathring{\mathbb{B}}$  имеем  $\pi_{\mathbb{A}}(x) = \pi_{\mathbb{B}}(y) = 0$  и  $(x, y)^{s+1} = (x^{s+1}, y^{s+1}) = 0$ , если  $s = \max\{p, q\}$ , где  $p$  – высота алгебры  $\mathbb{A}$ ,  $q$  – высота алгебры  $\mathbb{B}$ . Отсюда следует, что  $\mathring{\mathbb{A}} \oplus \mathring{\mathbb{B}} \subset Rd(\mathbb{A} \oplus_{\omega} \mathbb{B})$ . Следовательно,  $Rd(\mathbb{A} \oplus_{\omega} \mathbb{B}) = \mathring{\mathbb{A}} \oplus \mathring{\mathbb{B}}$ .  $\square$

**Предложение 1.9.** Алгебра  $\mathbb{A} \oplus_{\omega} \mathbb{B}$  является алгеброй Вейля.

**Доказательство.** Проверим выполнимость условий (1)–(3) определения алгебры Вейля.

Условие (1) выполняется, так как алгебра  $\mathbb{A} \oplus_{\omega} \mathbb{B}$  является подалгеброй алгебры  $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$ , которая коммутативна и ассоциативна, единицей этой алгебры является пара  $(\delta, \delta) = (1, 1)$ .

Проверим выполнимость условия (2). Пусть  $s = \max\{p, q\}$ , где  $p$  – высота алгебры  $\mathbb{A}$ ,  $q$  – высота алгебры  $\mathbb{B}$ . Тогда  $(\mathring{\mathbb{A}} \oplus \mathring{\mathbb{B}})^s \neq 0$ , а  $(\mathring{\mathbb{A}} \oplus \mathring{\mathbb{B}})^{s+1} = 0$ . Кроме того, алгебра  $\mathring{\mathbb{A}} \oplus \mathring{\mathbb{B}}$  является идеалом алгебры  $\mathbb{A} \oplus_{\omega} \mathbb{B}$ .

Рассмотрим факторалгебру  $\mathbb{A} \oplus_{\omega} \mathbb{B}$ .

Если  $(a, b) \equiv (c, d)(\text{mod } \mathring{\mathbb{A}} \oplus \mathring{\mathbb{B}})$ , то  $a \equiv c(\text{mod } \mathring{\mathbb{A}})$  и  $b \equiv d(\text{mod } \mathring{\mathbb{B}})$ . Верно и обратное утверждение.

Из этих сравнений следуют равенства  $\pi_{\mathbb{A}}(a) = \pi_{\mathbb{A}}(c)$  и  $\pi_{\mathbb{B}}(b) = \pi_{\mathbb{B}}(d)$ . Так как  $(a, b) \in \mathbb{A} \oplus_{\omega} \mathbb{B}$  и  $(c, d) \in \mathbb{A} \oplus_{\omega} \mathbb{B}$ , то  $\pi_{\mathbb{A}}(a) = \pi_{\mathbb{B}}(b)$ ,  $\pi_{\mathbb{A}}(c) = \pi_{\mathbb{B}}(d)$ . Значит,  $\pi_{\mathbb{A}}(a) = \pi_{\mathbb{A}}(c) = \pi_{\mathbb{B}}(b) = \pi_{\mathbb{B}}(d) = a_0$ . Отсюда  $(a, b) = (a_0 + a_1, a_0 + b_1) = (a_0, a_0) + (a_1, b_1)$ , где  $a_1 \in \mathring{\mathbb{A}}$ ,  $b_1 \in \mathring{\mathbb{B}}$ . Значит,  $(a, b) \equiv a_0(1, 1)(\text{mod } \mathring{\mathbb{A}} \oplus \mathring{\mathbb{B}})$ .

Элементы факторалгебры  $\mathbb{A} \oplus_{\omega} \mathbb{B}$  представляют собой классы эквивалентности  $\overline{(a, b)} = a_0(\overline{1, 1})$ . Соответствие  $a_0(\overline{1, 1}) \xrightarrow{\psi} a_0$  является изоморфизмом. Действительно, для любых  $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\psi(a_0(\overline{1, 1}) + b_0(\overline{1, 1})) &= \psi((a_0 + b_0)(\overline{1, 1})) = a_0 + b_0 = \psi(a_0(\overline{1, 1})) + \psi(b_0(\overline{1, 1})); \\ \psi(t(a_0(\overline{1, 1}))) &= \psi((ta_0)(\overline{1, 1})) = ta_0 = t(\psi(a_0(\overline{1, 1}))), \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Далее

$$\psi((a_0(\overline{1, 1}))(b_0(\overline{1, 1}))) = \psi(a_0b_0(\overline{1, 1})) = a_0b_0 = \psi(a_0(\overline{1, 1})) \cdot \psi(b_0(\overline{1, 1})).$$

Кроме того,  $\psi$  – биекция. Таким образом, факторалгебра  $\mathbb{A} \oplus_{\omega} \mathbb{B}$  изоморфна полю действительных чисел  $\mathbb{R}$ , то есть условие (3) также выполнено.  $\square$

Доказанное предложение позволяет ввести следующее

**Определение 1.7.** Алгебра Вейля  $\mathbb{A} \oplus_{\omega} \mathbb{B}$  называется суммой Уитни алгебр Вейля  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$ .

Из рассмотренного выше следует, что сумма Уитни алгебр Вейля  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$  представляет собой алгебру Вейля с радикалом, равным прямой сумме радикалов алгебр  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$ .

## 2. Расслоения Вейля

Алгебры Вейля могут быть использованы для построения расслоений над гладкими многообразиями. [1, 3].

Пусть  $\mathbb{A}$  – алгебра Вейля,  $\mathring{\mathbb{A}} = Rd \mathbb{A}$ , а  $M_n$  – гладкое класса  $C^{\infty}$  многообразие размерности  $n$ . Обозначим через  $C^{\infty}(M_n)$  алгебру гладких функций класса  $C^{\infty}$ , заданных на  $M_n$ .

**Определение 2.1.** Гомоморфизм  $j_x : C^{\infty}(M_n) \rightarrow M_n$  называется  $\mathbb{A}$ -близким к точке  $x \in M_n$ , если для любой функции  $f \in C^{\infty}(M_n)$  выполнено условие

$$j_x(f) \equiv f(x)(\text{mod } \mathring{\mathbb{A}})$$

Множество всех точек,  $\mathbb{A}$ -близких к  $x$ , обозначим через  $(M_n^\mathbb{A})_x$ . Обозначим через  $M_n^\mathbb{A}$  объединение  $\bigcup_{x \in M_n} (M_n^\mathbb{A})_x$ . Естественным образом определяется каноническая проекция  $\pi : M_n^\mathbb{A} \rightarrow M_n$ , а именно,  $\pi(j_x) = x$ . Гладкая структура на  $M_n$  позволяет ввести на  $M_n^\mathbb{A}$  структуру гладкого многообразия над алгеброй  $\mathbb{A}$  и гладкую структуру класса  $C^\infty$  над алгеброй действительных чисел. Тройка  $(M_n^\mathbb{A}, \pi, M_n)$  называется расслоением Вейля.

Приведем некоторые способы продолжения объектов, заданных на  $M_n$ , в расслоение  $M_n^\mathbb{A}$  (точнее, в топическое пространство расслоения Вейля).

Для каждой функции  $f \in C^\infty(M_n)$  на расслоении Вейля можно определить функцию  $f^\mathbb{A} : M_n^\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  по правилу  $f^\mathbb{A}(j_x) = j_x(f)$ . Функция  $f^\mathbb{A}$  называется естественным  $\mathbb{A}$ -продолжением функции  $f \in C^\infty(M_n)$  на  $M_n^\mathbb{A}$ .

Прямые вычисления позволяют убедиться в справедливости следующих равенств:

$$(f + g)^\mathbb{A} = f^\mathbb{A} + g^\mathbb{A}, \quad (tf)^\mathbb{A} = tf^\mathbb{A}, \quad (fg)^\mathbb{A} = f^\mathbb{A} \cdot g^\mathbb{A}$$

для любых  $f, g \in C^\infty(M_n)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Обозначим через  $\mathbb{A}^*$  векторное над  $\mathbb{R}$  пространство линейных форм, заданных на  $\mathbb{A}$  и принимающих значения в  $\mathbb{R}$ . Для каждого  $a^* \in \mathbb{A}^*$  и  $f \in C^\infty(M_n)$  определим функцию  $f_{(a^*)} = a^* \circ f^\mathbb{A}$ .

Определим операцию умножения элементов векторного пространства  $\mathbb{A}^*$  на элементы алгебры  $\mathbb{A}$  посредством равенства  $a^* \cdot b = a^* \circ L_b$ , где  $L_a$  – линейный оператор, определенный условием  $L_a(b) = ab$  для любого элемента  $b \in \mathbb{A}$ .

Для любого векторного поля  $X \in \mathfrak{X}_0^1(M_n)$  и любого элемента  $a \in \mathbb{A}$  существует на  $M_n^\mathbb{A}$  единственное векторное поле  $X^{(a)}$ , удовлетворяющее условию

$$X^{(a)} f_{(b^*)} = (Xf)_{(b^* \cdot a)}$$

для любых  $f \in C^\infty(M_n)$  и  $b^* \in \mathbb{A}^*$ .

Пусть  $M_n^\mathbb{A}$  снабжено структурой  $\mathbb{A}$ -гладкого многообразия и  $\mathfrak{X}_0^1(M_n^\mathbb{A})$  –  $\mathbb{A}$ -модуль векторных полей на  $M_n^\mathbb{A}$ . Наличие единицы в алгебре  $\mathbb{A}$  позволяет ввести умножение векторных полей из  $\mathfrak{X}_0^1(M_n^\mathbb{A})$  на действительные числа следующим образом: для любого  $t \in \mathbb{R}$  положим

$$t\tilde{X} = (t\delta)\tilde{X}, \quad \tilde{X} \in \mathfrak{X}_0^1(M_n^\mathbb{A}).$$

Тогда  $V = \mathfrak{X}_0^1(M_n^\mathbb{A})$  с операциями сложения векторных полей и умножения на действительные числа будет векторным пространством над полем  $\mathbb{R}$ .

Пусть на  $M_n^\mathbb{A}$  наряду с  $\mathbb{A}$ -гладкой структурой многообразия выбрана естественная структура  $\mathbb{R}$ -гладкого многообразия  $(M_n^\mathbb{A})^\mathbb{R}$ . Тогда естественным образом возникает векторное пространство над  $\mathbb{R}$  векторных полей, заданных на  $(M_n^\mathbb{A})^\mathbb{R}$ , которые обозначим через  $\mathfrak{X}_0^1((M_n^\mathbb{A})^\mathbb{R}) = V^\mathbb{R}$ .

Рассмотрим отображение  $F^\mathbb{R} : V \rightarrow V^\mathbb{R}$ , определенное условием

$$F^\mathbb{R} \tilde{X} (f_{(b^*)}) = (\tilde{X} f^\mathbb{A})_{(b^*)}$$

для любых  $f \in C^\infty(M_n)$ ,  $b^* \in \mathbb{A}^*$ . Вместо  $F^\mathbb{R} \tilde{X}$  будем использовать выражение  $\tilde{X}^\mathbb{R}$ , и это векторное поле будем называть вещественной реализацией векторного поля  $\tilde{X}$ , а  $F^\mathbb{R}$  – оператором вещественной реализации векторных полей из  $V$  в  $V^\mathbb{R}$ . Оператор  $F^\mathbb{R}$  является  $\mathbb{R}$ -изоморфизмом.

**Предложение 2.1.** Для любого векторного поля  $\tilde{X} \in V$  и любого элемента  $a \in \mathbb{A}$  имеет место равенство

$$(a\tilde{X})^\mathbb{R} = I^{(a)}(\tilde{X}^\mathbb{R}),$$

где  $I^{(a)}$  – алгебра, действующий на  $V^{\mathbb{R}}$  и удовлетворяющий условию  $I^{(a)}(Z^{(b)}) = Z^{(ab)}$  для любых  $Z \in \mathfrak{X}_0^1(M_n)$ ,  $b \in \mathbb{A}$ .

**Доказательство.** Из определения оператора  $F^{\mathbb{R}}$  следует, что

$$(a\tilde{X})^{\mathbb{R}} f_{(b^*)} = ((a\tilde{X})f^{\mathbb{A}})_{(b^*)} = b^*(a(\tilde{X}f^{\mathbb{A}})) = b^* \circ L_a(\tilde{X}f^{\mathbb{A}}) = (\tilde{X}f^{\mathbb{A}})_{(b^* \cdot a)}.$$

Для вычисления  $I^{(a)}(\tilde{X}^{\mathbb{R}})f_{(b^*)}$  воспользуемся локальными картами. Пусть в карте  $(\pi^{-1}(U), x_{\alpha}^i)$   $\tilde{X}^{\mathbb{R}}$  имеет следующее представление

$$\tilde{X}^{\mathbb{R}} = \tilde{X}_{\alpha}^i \partial_i^{\alpha}.$$

Здесь  $\partial_i^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}^i} = (\frac{\partial}{\partial x^i})^{(e^{\alpha})}$ . Поэтому  $I^{(a)}(\tilde{X}^{\mathbb{R}}) = \tilde{X}_{\alpha}^i (\partial_i)^{(ae^{\alpha})}$ . Тогда

$$I^{(a)}(\tilde{X}^{\mathbb{R}})f_{(b^*)} = \tilde{X}_{\alpha}^i (\partial_i^{(ae^{\alpha})}) f_{(b^*)} = \tilde{X}_{\alpha}^i (\partial_i f)_{(b^* \cdot a) \cdot e^{\alpha}}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} (\tilde{X}f^{\mathbb{A}})_{(b^* \cdot a)} &= (b^* \cdot a) \cdot (\tilde{X}^i (\frac{\partial}{\partial x^i} f^{\mathbb{A}})) = (b^* \cdot a) \cdot ((\tilde{X}_{\alpha}^i e^{\alpha}) \cdot (\partial_i f)^{\mathbb{A}}) = \\ &= \tilde{X}_{\alpha}^i (((b^* \cdot a) \cdot e^{\alpha}) \cdot (\partial_i f)^{\mathbb{A}}) = \tilde{X}_{\alpha}^i (\partial_i f)_{(b^* \cdot a) \cdot e^{\alpha}}. \end{aligned}$$

Значит,  $I^{(a)}(\tilde{X}^{\mathbb{R}})f_{(b^*)} = (\tilde{X}f^{\mathbb{A}})_{(b^* \cdot a)}$ . Таким образом,  $(a\tilde{X})^{\mathbb{R}} = I^{(a)}(\tilde{X}^{\mathbb{R}})$ .  $\square$

### 3. Автоморфизмы алгебр Вейля

Пусть  $\mathbb{A}$  – алгебра Вейля ранга  $k+1$  над полем действительных чисел,  $e_1, e_2, \dots, e_m$  – элементы псевдобазиса, и единица этой алгебры отождествлена с единицей поля  $\mathbb{R}$  действительных чисел.

Для любого автоморфизма  $\varphi \in \text{Aut } \mathbb{A}$  имеем  $\varphi(1) = 1$  и  $\varphi(e_i) \in Rd \mathbb{A}$ . Последнее утверждение можно доказать следующим образом.

Если  $\varphi(e_i) = a_0 + a_1$ , где  $a_0 \in \mathbb{R}$ ,  $a_1 \in Rd \mathbb{A}$ , то  $\varphi(e_i^s) = (\varphi(e_i))^s = a_0^s + b$ ,  $b \in Rd \mathbb{A}$ . Для  $s = p+1$  будем иметь  $\varphi(e_i^{p+1}) = 0$ , поэтому  $a_0^{p+1} + b = 0$ . Отсюда  $a_0 = 0$  и  $b = 0$ . Таким образом,  $\varphi(e_i) \in Rd \mathbb{A}$ .

Выберем базис радикала, состоящий из элементов вида

$$e^{\lambda} = e_1^{\lambda_1} e_2^{\lambda_2} \dots e_m^{\lambda_m},$$

и положим  $\varphi(e_i) = t_{i\lambda} e^{\lambda}$ ,  $\lambda \neq 0$ . Образ любого базисного элемента  $e^{\tau}$  при действии на него автоморфизмом  $\varphi$  можно легко найти:

$$\begin{aligned} \varphi(e^{\tau}) &= (\varphi(e_1))^{\tau_1} (\varphi(e_2))^{\tau_2} \dots (\varphi(e_m))^{\tau_m} = \\ &= (t_{1\lambda} e^{\lambda})^{\tau_1} (t_{2\lambda} e^{\lambda})^{\tau_2} \dots (t_{m\lambda} e^{\lambda})^{\tau_m} = \varphi_{\mu}^{\tau} e^{\mu}, \end{aligned}$$

где  $\tau, \mu \in \Lambda \setminus \{0\}$ , а  $\varphi_{\mu}^{\tau}$  – однородные многочлены степени  $|\tau|$  относительно переменных  $t_{i\lambda}$ . Эти переменные, вообще говоря, независимыми не являются. Они должны удовлетворять соотношениям

$$\varphi(e^{\tau^*}) = a_{\mu}^{\tau^*} \varphi(e^{\mu}),$$

полученным из определяющих соотношений алгебры  $\mathbb{A}$ .

Найдем размерность группы автоморфизмов  $\text{Aut } \mathbb{A}$  алгебры  $\mathbb{A}$ . Для этого достаточно найти размерность алгебры Ли дифференцирований  $\text{Der } \mathbb{A}$ .

Пусть  $D \in \text{Der } \mathbb{A}$  – произвольное дифференцирование. Оно однозначно определяется заданием образов элементов псевдабазиса алгебры  $\mathbb{A}$ :

$$D(e_i) = x_{i\lambda} e^\lambda, \quad \lambda \in \Lambda \setminus \{0\}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Число переменных  $x_{i\lambda}$  равно  $mk$ . Для нахождения условий, которым удовлетворяют эти переменные, подействуем дифференцированием  $D$  на элементы  $e^{\tau^*}$  и воспользуемся определяющими соотношениями алгебры:

$$D(e^{\tau^*}) - a_\mu^{\tau^*} D(e^\mu) = 0.$$

В развернутом виде эти соотношения имеют вид

$$\sum_{i=1}^m (\tau_i^* e^{\tau^* - \varepsilon_i} e^\lambda - a_\mu^{\tau^*} \mu_i e^{\mu - \varepsilon_i} e^\lambda) x_{i\lambda} = 0. \quad (3.1)$$

В этих соотношениях  $\varepsilon_i$  обозначает вектор стандартного базиса пространства  $\mathbb{R}^m$ , то есть  $\varepsilon_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , где 1 стоит на  $i$ -м месте.

Пусть  $e_\alpha$ ,  $\alpha \in \Lambda$ , – ковекторы дуального базиса. Тогда из системы уравнений (3.1) получим следующую систему однородных линейных уравнений относительно переменных  $x_{i\lambda}$ :

$$\sum_{i=1}^m e^\alpha (\tau_i^* e^{\tau^* - \varepsilon_i} e^\lambda - a_\mu^{\tau^*} \mu_i e^{\mu - \varepsilon_i} e^\lambda) x_{i\lambda} = 0. \quad (3.2)$$

Пусть ранг системы (3.2) равен  $r$ . Тогда размерность пространства решений системы (3.2) равна  $mk - r$ . Таким образом, доказана

**Теорема 3.1.** *Размерность группы автоморфизмов алгебры Вейля ширины  $m$ , ранга  $k+1$  равна  $mk - r$ , где  $r$  – ранг системы (3.2).*

Системе (3.2) можно придать другой вид. Для этого определим линейные операторы  $D^{i\lambda}$  условиями

$$D^{i\lambda}(1) = 0, \quad D^{i\lambda}(e^\alpha) = \varepsilon^i(\alpha) e^{\alpha - \varepsilon_i} e^\lambda, \quad \alpha \neq 0.$$

Здесь  $\varepsilon^i$  – ковекторы, дуальные векторам  $\varepsilon_i$ :  $\varepsilon^i(\varepsilon_j) = \delta_j^i$ . Тогда систему (3.2) можно представить следующим образом:

$$e^\alpha (D^{i\lambda}(e^{\tau^*}) - a_\mu^{\tau^*} D^{i\lambda}(e^\mu)) x_{i\lambda} = 0. \quad (3.3)$$

Рассмотрим матрицу  $T$ , элементами которой являются коэффициенты системы (3.3):

$$T(\alpha\tau^* | i\lambda) = e^\alpha (D^{i\lambda}(e^{\tau^*}) - a_\mu^{\tau^*} D^{i\lambda}(e^\mu)). \quad (3.4)$$

Размерность алгебры Ли дифференцирований алгебры  $\mathbb{A}$  не зависит от выбора базиса. Поэтому, выбрав другой псевдабазис  $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_m$  радикала  $\text{Rd } \mathbb{A}$ , получим, что ранг матрицы  $\hat{T}$  будет равен числу  $mk - \dim(\text{Der } \mathbb{A}) = \text{rank } T$ . Следовательно, число  $r = \text{rank } T$  не зависит от выбора псевдабазиса алгебры  $\mathbb{A}$ . Этот факт позволяет ввести еще одну числовую характеристику алгебры Вейля – индекс алгебры.

**Определение 3.1.** Ранг матрицы  $T$  с элементами (3.4) называется индексом алгебры Вейля  $\mathbb{A}$ .

Используя понятие индекса, на основании теоремы 3.1, заключаем, что справедлива

**Теорема 3.2.** *Размерность группы автоморфизмов алгебры Вейля ранга  $k+1$ , ширины  $m$  и индекса  $r$  равна  $mk - r$ .*

#### 4. Действие группы автоморфизмов Вейля на расслоениях Вейля

Пусть  $M_n^{\mathbb{A}}$  – расслоение Вейля над гладким классом  $C^\infty$  многообразием  $M_n$ , порожденное алгеброй Вейля  $\mathbb{A}$ . На расслоении  $M_n^{\mathbb{A}}$  можно построить два естественных действия группы  $\text{Aut } \mathbb{A}$  автоморфизмов алгебры  $\mathbb{A}$ .

Первое действие  $\rho : \text{Aut } \mathbb{A} \times M_n^{\mathbb{A}} \rightarrow M_n^{\mathbb{A}}$  определим условием

$$\rho(\varphi, j_x) = \varphi \circ j_x.$$

**Предложение 4.1.** *Действие  $\rho$  является левым и эффективным.*

**Доказательство.** Для любых автоморфизмов  $\varphi$  и  $\psi$  алгебры  $\mathbb{A}$  имеем

$$\rho(\varphi \circ \psi, j_x) = (\varphi \circ \psi) \circ j_x = \varphi \circ (\psi \circ j_x) = \rho(\varphi, \rho(\psi, j_x)).$$

Это означает, что действие  $\rho$  – левое.

Пусть  $\rho(\varphi, j_x) = j_x$  для любой точки  $j_x \in M_n^{\mathbb{A}}$ . Тогда для любой функции  $f \in C^\infty(M_n)$  получим

$$\varphi \circ j_x(f) = j_x(f).$$

Отсюда

$$\varphi(j_x(f)) = j_x(f).$$

Это равенство можно переписать следующим образом:

$$\varphi(f_{(\alpha)}(j_x)e^\alpha) = f_{(\alpha)}(j_x)e^\alpha.$$

Отсюда

$$f_{(\alpha)}(j_x)(\varphi(e^\alpha) - e^\alpha) = 0. \quad (4.1)$$

Пусть  $(U, x^i)$  – карта гладкой структуры на  $M_n$ ,  $(\pi^{-1}(U), x_\alpha^i)$  – карта естественной гладкой структуры на  $M_n^{\mathbb{A}}$ . Из соотношений (4.1) получим тождества  $x_\alpha^i(\varphi(e^\alpha) - e^\alpha) = 0$ , если в качестве функции  $f$  возьмем координатные функции  $x^i$ . Продифференцировав полученные тождества по  $x_\beta^j$ , получим  $\delta_j^i(\varphi(e^\beta) - e^\beta) = 0$ . Отсюда следует, что  $\varphi(e^\beta) = e^\beta$ , то есть,  $\varphi = id_{\mathbb{A}}$ . Таким образом, действие  $\rho$  является эффективным.  $\square$

Второе действие  $\rho' : \text{Aut } \mathbb{A} \times M_n^{\mathbb{A}} \rightarrow M_n^{\mathbb{A}}$  определим условием

$$\rho'(\varphi, j_x) = \varphi^{-1} \circ j_x.$$

**Предложение 4.2.** *Действие  $\rho'$  является правым и эффективным.*

**Доказательство.** Для любых автоморфизмов  $\varphi$  и  $\psi$  имеем

$$\rho'(\varphi \circ \psi, j_x) = (\varphi \circ \psi)^{-1} \circ j_x = (\psi^{-1} \circ \varphi^{-1}) \circ j_x = \psi^{-1} \circ (\varphi^{-1} \circ j_x) = \rho'(\psi, \rho'(\varphi, j_x)).$$

Следовательно,  $\rho'$  действует на  $M_n^{\mathbb{A}}$  справа.

Эффективность действия  $\rho'$  доказывается так же, как эффективность действия  $\rho$ .  $\square$

**Предложение 4.3.** *Преобразования  $\rho_\varphi : M_n^{\mathbb{A}} \rightarrow M_n^{\mathbb{A}}$ ,  $\rho'_\varphi : M_n^{\mathbb{A}} \rightarrow M_n^{\mathbb{A}}$ , порожденные левым и правым действиями  $\rho$  и  $\rho'$  по правилам  $\rho_\varphi(j_x) = \rho(\varphi, j_x)$ ,  $\rho'_\varphi(j_x) = \rho'(\varphi, j_x)$  соответственно, являются автоморфизмами расслоения  $M_n^{\mathbb{A}}$ , отображающими каждый слой на себя.*

**Доказательство.** Достаточно доказать коммутативность диаграмм

$$\begin{array}{ccc} M_n^{\mathbb{A}} & \xrightarrow{\rho_{\varphi}} & M_n^{\mathbb{A}} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M_n & \xrightarrow{id} & M_n \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} M_n^{\mathbb{A}} & \xrightarrow{\rho'_{\varphi}} & M_n^{\mathbb{A}} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M_n & \xrightarrow{id} & M_n. \end{array}$$

Рассмотрим композицию  $\pi \circ \rho_{\varphi}$ . Для любой точки  $j_x \in M_n^{\mathbb{A}}$  имеем  $\pi \circ \rho_{\varphi}(j_x) = \pi(\varphi \circ j_x)$ . Пусть  $f \in C^{\infty}(M_n)$ . Тогда

$$(\varphi \circ j_x)(f) = \varphi(j_x(f)) = \varphi(f(x) + f_{\lambda}(j_x)e^{\lambda}), \quad \lambda \neq 0.$$

Так как  $\varphi$  – автоморфизм, то  $\varphi(1) = 1, \varphi(e^{\lambda}) \in Rd \mathbb{A}$ , поэтому

$$(\varphi \circ j_x)(f) = f(x) + f_{\lambda}(j_x)\varphi(e^{\lambda}).$$

Отсюда следует, что  $\varphi \circ j_x(f) \equiv f(x) (\text{mod } \mathring{\mathbb{A}})$ , значит,

$$\pi(\varphi \circ j_x) = x = \pi(j_x) = id_{M_n} \circ \pi(j_x).$$

Таким образом,  $\pi \circ \varphi = id_{M_n} \circ \pi$ .

Коммутативность первой диаграммы доказана. Аналогично доказывается коммутативность второй диаграммы.  $\square$

## 5. Локальные представления действий групп автоморфизмов алгебры Вейля $\mathbb{A}$ на расслоении $M_n^{\mathbb{A}}$

Пусть  $\varphi(e^{\alpha}) = \varphi_{\beta}^{\alpha}e^{\beta}$ ,  $\alpha, \beta \in \Lambda$ ,  $\varphi \in \text{Aut } \mathbb{A}$ . Рассмотрим преобразование  $\rho_{\varphi}$ , порожденное действием  $\rho$  и автоморфизмом  $\varphi$ . Для любой точки  $j_x \in M_n^{\mathbb{A}}$  положим  $\rho_{\varphi}(j_x) = \tilde{j}_x$ . Выберем произвольную карту  $(\pi^{-1}(U), x_{\alpha}^i)$ , содержащую  $j_x$ . Тогда  $\tilde{j}_x(x^i) = \varphi \circ j_x(x^i) = \varphi(j_x(x^i))$ . Отсюда

$$\tilde{x}_{\alpha}^i e^{\alpha} = x_{\beta}^i \varphi(e^{\beta}) = (\varphi_{\alpha}^{\beta} x_{\beta}^i) e^{\alpha}.$$

Из этого равенства получим

$$\tilde{x}_{\alpha}^i = \varphi_{\alpha}^{\beta} x_{\beta}^i.$$

Из результатов §3 следует, что  $\varphi_0^{\beta} = \delta_0^{\beta}$ , поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0^i &= x_0^i, \\ \tilde{x}_{\alpha}^i &= \varphi_{\alpha}^{\beta} x_{\beta}^i, \quad \alpha \neq 0 \text{ и } \beta \neq 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Эти формулы представляют собой представление преобразования  $\rho_{\varphi}$ .

Если в формулах (5.1) заменить  $\varphi_{\alpha}^{\beta}$  на элементы матрицы  $\|\varphi_{\alpha}^{\beta}\|^{-1}$ , обратной к матрице  $\|\varphi_{\alpha}^{\beta}\|$ , то получим формулы, выражающие локальное представление преобразования  $\rho'_{\varphi}$ , порожденного правым действием  $\rho'$  группы  $\text{Aut } \mathbb{A}$  и преобразованием  $\varphi$ .

Остановимся на изучении алгебр Ли групп преобразований, индуцированных левым и правым действиями группы  $\text{Aut } \mathbb{A}$  на расслоении  $M_n^{\mathbb{A}}$ .

Пусть  $D$  – дифференцирование алгебры Вейля  $\mathbb{A}$ ,  $D(e^{\lambda}) = a_{\tau}^{\lambda} e^{\tau}$ ,  $\lambda, \tau \in \Lambda$ . Заметим еще раз, что  $a_{\tau}^0 = 0$ ,  $a_0^{\lambda} = 0$ . Дифференцирование  $D$  порождает однопараметрическую подгруппу  $\{\varphi_t\}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , где  $\varphi_t = \exp(tD)$ , группы автоморфизмов  $\text{Aut } \mathbb{A}$ . Левое действие  $\rho$  группы автоморфизмов порождает однопараметрическую

подгруппу  $\{\rho_{\varphi_t}\}$  группы преобразований многообразия  $M_n^{\mathbb{A}}$ . В локальной карте  $(\pi^{-1}(U), x_\alpha^i)$  преобразование этой группы задается формулами

$$\tilde{x}_0^i = x_0^i, \quad \tilde{x}_\alpha^i = \varphi_\alpha^\beta(t)x_\beta^i, \quad \alpha, \beta \neq 0.$$

Тогда  $\frac{d\tilde{x}_0^i}{dt} \Big|_{t=0} = 0$ ,  $\frac{d\tilde{x}_\alpha^i}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d\varphi_\alpha^\beta}{dt} \Big|_{t=0} x_\beta^i$ . Так как

$$\exp tD = id_{\mathbb{A}} + \frac{t}{1!}D + \frac{t^2}{2!}D^2 + \dots,$$

то  $\exp tD(e^\lambda) = \varphi_\alpha^\lambda e^\alpha$ , поэтому  $\frac{d\varphi_\alpha^\beta}{dt} \Big|_{t=0} = a_\alpha^\beta$ . Отсюда получим, что инфинитезимальное преобразование  $\tilde{D}$  группы  $\{\rho_{\varphi_t}\}$ , порожденное дифференцированием  $D$ , имеет следующее локальное представление:

$$\tilde{D} = a_\alpha^\beta x_\beta^i \partial_i^\alpha.$$

**Предложение 5.1.** *Отображение  $h$ , определенное условием  $h(D) = \tilde{D}$ , является инъективным гомоморфизмом алгебры Ли дифференцирований  $\text{Der } \mathbb{A}$  алгебры  $\mathbb{A}$  в алгебру, противоположную вещественной алгебре Ли векторных полей на  $M_n^{\mathbb{A}}$ .*

**Доказательство.** Для любых дифференцирований  $D_1, D_2$  справедливы равенства

$$h(D_1 + D_2) = h(D_1) + h(D_2), \quad h(sD_1) = sh(D_1), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Если  $h(D) = 0$ , то  $a_\alpha^\beta x_\beta^i = 0$ . Отсюда  $a_\alpha^\beta = 0$ . Значит,  $\text{Ker } h = 0$ .

Пусть  $D_1(e^\lambda) = b_\alpha^\lambda e^\alpha$ ,  $D_2(e^\lambda) = c_\alpha^\lambda e^\alpha$ . Тогда

$$[D_1, D_2](e^\lambda) = D_1(c_\alpha^\lambda e^\alpha) - D_2(b_\alpha^\lambda e^\alpha) = (c_\alpha^\lambda b_\tau^\alpha - b_\alpha^\lambda c_\tau^\alpha)e^\tau.$$

Далее,  $h(D_1) = b_\alpha^\beta x_\beta^i \partial_i^\alpha$ ,  $h(D_2) = c_\alpha^\beta x_\beta^i \partial_i^\alpha$ . Поэтому

$$[h(D_1), h(D_2)] = (b_\alpha^\lambda c_\tau^\alpha - c_\alpha^\lambda b_\tau^\alpha)x_\lambda^i \partial_i^\tau = -[D_1, D_2]_\tau^\lambda x_\lambda^i \partial_i^\tau = -h([D_1, D_2]).$$

Таким образом,  $h([D_1, D_2]) = -[h(D_1), h(D_2)]$ . Предложение 5.1 доказано.  $\square$

Из предложения 5.1 следует, что если  $(D_1, \dots, D_l)$  – базис алгебры дифференцирований, то  $(h(D_1), \dots, h(D_l))$  будет базисом алгебры Ли группы преобразований расслоения  $M_n^{\mathbb{A}}$ , порожденной левым действием группы автоморфизмов  $\text{Aut } \mathbb{A}$  на расслоении  $M_n^{\mathbb{A}}$ .

Для правого действия группы имеет место предложение, аналогичное предложению 5.1.

Пусть  $D \in \mathbb{A}$  – произвольное дифференцирование алгебры Вейля  $\mathbb{A}$ . Поскольку  $(\exp(tD))^{-1} = \exp(-tD)$ , то инфинитезимальное преобразование  $\hat{D}$  группы  $\{\rho'_\varphi\}$ , порожденное дифференцированием  $D$  и правым действием  $\rho'$  группы  $\text{Aut } \mathbb{A}$  на расслоении  $M_n^{\mathbb{A}}$ , будет иметь следующее локальное представление:

$$\hat{D} = -a_\alpha^\beta x_\beta^i \partial_i^\alpha.$$

**Предложение 5.2.** *Отображение  $h'$ , определенное условием  $h'(D) = \hat{D}$ , является инъективным гомоморфизмом алгебры Ли дифференцирований  $\text{Der } \mathbb{A}$  алгебры  $\mathbb{A}$  в алгебру Ли вещественных векторных полей на  $M_n^{\mathbb{A}}$ .*

**Доказательство.** Заметим, что  $h'(D) = -h(D)$ . Поэтому  $h'$  – линейное и  $\text{Ker } h' = 0$ . Далее,

$$h'([D_1, D_2]) = -h([D_1, D_2]) = [h(D_1), h(D_2)] = [h'(D_1), h'(D_2)].$$

Отсюда следует, что  $h'$  – гомоморфизм. Предложение 5.2 доказано.  $\square$

Из этого предложения вытекает следствие, аналогичное следствию из предложения 5.1: если  $(D_1, \dots, D_l)$  – базис алгебры дифференцирований  $\text{Der } \mathbb{A}$ , то  $(h'(D_1), \dots, h'(D_l))$  – базис алгебры Ли группы преобразований расслоения  $M_n^{\mathbb{A}}$ , порожденной правым действием группы автоморфизмов  $\text{Aut } \mathbb{A}$  на  $M_n^{\mathbb{A}}$ .

Рассмотрим сдвиг  $L_a$  алгебры  $\mathbb{A}$ , порожденный элементом  $a \in \mathbb{A}$  по правилу  $L_a(x) = ax$ .

**Предложение 5.3.** Для любого дифференцирования  $D \in \text{Der } \mathbb{A}$  эндоморфизм  $L_a \circ D$  является дифференцированием алгебры  $\mathbb{A}$ .

**Доказательство.** Для любых элементов  $x, y \in \mathbb{A}$  в силу ассоциативности и коммутативности алгебры  $\mathbb{A}$  имеем

$$L_a \circ D(x, y) = L_a(D(x)y + xD(y)) = (L_a \circ D(x))y + x(L_a \circ D(y)).$$

Отсюда  $L_a \circ D \in \text{Der } \mathbb{A}$ .  $\square$

**Предложение 5.4.** Для любых  $a, b \in \mathbb{A}$  и  $D_1, D_2 \in \text{Der } \mathbb{A}$  имеет место равенство

$$[L_a \circ D_1, L_b \circ D_2] = L_{aD_1(b)} \circ D_2 - L_{bD_2(a)} \circ D_1 + L_{ab} \circ [D_1, D_2].$$

**Доказательство.** Для произвольного элемента  $x \in \mathbb{A}$  получим

$$\begin{aligned} [L_a \circ D_1, L_b \circ D_2](x) &= L_a \circ D_1(L_b \circ D_2(x)) - L_b \circ D_2(L_a \circ D_1(x)) = \\ &= L_a \circ D_1(bD_2(x)) - L_b \circ D_2(aD_1(x)) = a(D_1(bD_2(x))) - b(D_2(aD_1(x))) = \\ &= (a(D_1(b))D_2(x) + ab(D_1D_2(x)) - (bD_2(a))D_1(x) - ba(D_2D_1(x)) = \\ &= L_{aD_1(b)} \circ D_2(x) - L_{bD_2(a)} \circ D_1(x) + L_{ab} \circ [D_1, D_2](x). \end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость соотношения указанного в предложении.  $\square$

**Предложение 5.5.** Для любых  $a \in \mathbb{A}$  и  $D \in \text{Der } \mathbb{A}$  имеют место равенства

$$h(L_a \circ D) = I^{(a)}(h(D)), \quad h'(L_a \circ D) = I^{(a)}(h'(D)).$$

**Доказательство.** Пусть  $a = a_\tau e^\tau$ ,  $\tau \in \Lambda$ . Тогда для базисных элементов  $e^\mu$  алгебры  $\mathbb{A}$  будем иметь

$$L_a \circ D(e^\mu) = (a_\tau e^\tau) a_\alpha^\mu e^\alpha = a_\tau a_\alpha^\mu e^\tau e^\alpha = a_\tau a_\alpha^\mu \gamma_\nu^{\tau\alpha} e^\nu,$$

где  $\gamma_\nu^{\tau\alpha}$  – структурные константы алгебры  $\mathbb{A}$ . Отсюда следует, что дифференцирование  $L_a \circ D$  определяется компонентами

$$(L_a \circ D)_\nu^\mu = a_\tau a_\alpha^\mu \gamma_\nu^{\tau\alpha},$$

поэтому

$$h(L_a \circ D) = a_\tau a_\alpha^\mu \gamma_\nu^{\tau\alpha} x_\mu^i \partial_i^\nu. \quad (5.2)$$

Найдем  $I^{(a)}(h(D))$ :

$$I^{(a)}(h(D)) = I^{(a)}(a_\alpha^\beta x_\beta^i \partial_i^\alpha) = a_\alpha^\beta x_\beta^i I^{(a)}(\partial_i^{(e^\alpha)}) = a_\alpha^\beta x_\beta^i \partial_i^{(a_\tau e^\tau e^\alpha)} = a_\tau \gamma_\nu^{\tau\alpha} a_\alpha^\beta x_\beta^i \partial_i^\nu. \quad (5.3)$$

Из равенств (5.2) и (5.3) следует справедливость равенства

$$h(L_a \circ D) = I^{(a)}(h(D)).$$

Второе равенство следует из первого в силу того, что  $h' = -h$ . □

Это предложение, предложение 5.4 и введенные гомоморфизмы  $h$  и  $h'$  позволяют доказать

**Предложение 5.6.** Для любых элементов  $a, b \in \mathbb{A}$  и произвольных дифференцирований  $D_1, D_2$  алгебры  $\mathbb{A}$  имеют место равенства

$$\begin{aligned} [I^{(a)}(h(D_1)), I^{(b)}(h(D_2))] &= I^{(ab)}([h(D_1), h(D_2)]) - \\ &\quad - I^{(aD_1(b))}(h(D_2)) + I^{(bD_2(a))}(h(D_1)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [I^{(a)}(h'(D_1)), I^{(b)}(h'(D_2))] &= I^{(ab)}([h'(D_1), h'(D_2)]) + \\ &\quad + I^{(aD_1(b))}(h'(D_2)) - I^{(bD_2(a))}(h'(D_1)). \end{aligned}$$

### Summary

A.Ya. Sultanov. Actions of automorphisms groups on Weil bundles.

In this work the irreducibility of the Weil algebra is proved and the notion of the Whitney sum of the Weil algebra is introduced. It is proved that if  $m$  is a width,  $k$  – a radical dimension,  $r$  – a Weil algebra index, then the dimension of automorphism group of this algebra equals  $mk - r$ . The left and right actions of the automorphism group of the Weil algebra are constructed on the Weil bundle.

### Литература

1. Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В. Пространства над алгебрами. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1985. – 263 с.
2. Постников М.М. Группы и алгебры Ли. – М.: Наука, 1982. – 447 с.
3. Morimoto A. Prolongation of connections to bundles of infinitely near points // J. Diff. Geom. – 1976. – No 4. – P. 479–498.

Поступила в редакцию  
29.11.04

---

Султанов Адгам Яхиевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры Пензенского государственного педагогического университета.