ВИХРИ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ И ПСЕВДОГОЛОМОРФНЫЕ КРИВЫЕ

А.Г.СЕРГЕЕВ

КАЗАНЬ 2021

Лагранжиан Гинзбурга–Ландау

Хорошо известно, что некоторые металлы и сплавы ведут себя при температурах, близких к абсолютному нулю, как сверхпроводники — электрический ток течет по ним практически без сопротивления. Согласно современной теории сверхпроводимости этот эффект объясняется тем, что свободные электроны при столь низких температурах объединяются друг с другом, образуя так называемые пары Купера — новые квазичастицы, обладающие двойным электрическим зарядом и нулевым спином. В противоположность фермионным электронам эти квазичастицы являются бозонами и именно их ток является ответственным за сверхпроводимость.

Допустим, что у нас имеется сверхпроводник во внешнем магнитном поле $\vec{H}$. Согласно известному эффекту Мейснера, это магнитное поле должно выталкиваться из сверхпроводника, так что внутри него $\vec{H}$ равно нулю.

Если мы будем увеличивать поле H, то при некотором критическом значении H^1_{cr} произойдет пробой сверхпроводника и магнитное поле начнет проникать внутрь. На этой стадии внутри сверхпроводника будут возникать трубчатые зоны смешанной проводимости, называемые трубками тока.

Указанные трубки направлены вдоль $\vec{H}$, при этом в их центре, вдоль т.н. абрикосовских нитей проводимость уже обычная, тогда как за их пределами все еще господствует сверхпроводимость. Внутри трубок, но вне абрикосовских нитей, проводимость носит смешанный характер. Если мы будем наращивать уровень магнитного поля, то число трубок тока и их размеры также будут возрастать, пока при втором критическом значении H^2_{cr} они не заполнят весь сверхпроводник, превратив его в обычный проводник.

Математически, смешанное состояние сверхпроводника, возникающее в трубках тока, может быть описано с помощью лагранжиана, предложенного Гинзбургом и Ландау. Для того, чтобы выписать этот лагранжиан, рассмотрим некоторую идеальную модель, в которой сверхпроводник совпадает с целым пространством $\mathbb{R}^3_{(x_1,x_2,x_3)}$ и весь находится в смешанном состоянии за исключением абрикосовских нитей.

Возьмем горизонтальное сечение этого сверхпроводника плоскостью $\mathbb{R}^2_{(x_1,x_2)}$, ортогональной полю $\vec{H}$, направленному вдоль оси (x_3). Лагранжиан Гинзбурга–Ландау, заданный на этой плоскости, имеет вид

$$\mathcal{L}(A,\Phi) = |F_A|^2 + |d_A\Phi|^2 + \frac{\lambda}{4}(1-|\Phi|^2)^2.$$

С физической точки зрения переменная A представляет собой электромагнитный потенциал, а математически является связностью на $\mathbb{R}^2_{(x_1,x_2)}$, задаваемой 1-формой

$$A = A_1 dx_1 + A_2 dx_2$$

с гладкими чисто мнимыми коэффициентами.

Кривизна этой связности F_A, задаваемая 2-формой

$$F_A = dA = \sum_{i,j=1}^{2} F_{ij} dx_i \wedge dx_j = 2F_{12} dx_1 \wedge dx_2$$

с коэффициентами

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i, \quad \partial_j := \partial / \partial x_j,$$

физически интерпретируется как электромагнитное поле, а член $|F_A|^2$ отождествляется с лагранжианом Максвелла.

Величина Φ называется полем Хиггса и задается гладкой комплекснозначной функцией $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$ на $\mathbb{R}^2_{(x_1,x_2)}$. С физической точки зрения, она описывает скалярное поле, взаимодействующее с электромагнитным полем A, и интерпретируется как волновая функция пар Купера.

Ковариантная внешняя производная $d_A\Phi$ во втором члене лагранжиана Гинзбурга–Ландау задается формулой

$$d_A\Phi = d\Phi + A\Phi = \sum_{i=1}^{2}(\partial_i + A_i)\Phi\, dx_i,$$

а член $|d_A\Phi|^2$ отвечает за взаимодействие электромагнитного поля с полем Хиггса Φ.

Главным ингредиентом в лагранжиане Гинзбурга–Ландау является последний член $\frac{\lambda}{4}(1-|\Phi|^2)^2$ с параметром $\lambda > 0$. Этот член отвечает за нелинейный характер "самодействия" поля Φ.

Нули функции Φ отвечают точкам пересечения абрикосовских нитей с плоскостью $\mathbb{R}^2_{(x_1,x_2)}$. На бесконечности требуется, чтобы $|\Phi| \to 1$, физически это означает, что на бесконечности имеется чистая сверхпроводимость.

В окрестности нуля функции $\Phi = \rho e^{i\theta}$ векторное поле $\vec{v} = \nabla\theta$ ведет себя как гидродинамический вихрь, поэтому решения рассматриваемой модели называются вихрями Гинзбурга–Ландау.

Параметр λ отвечает за взаимодействие вихрей. При $\lambda < 1$ вихри притягиваются друг к другу, а при $\lambda > 1$ отталкиваются друг от друга.

При критическом значении $\lambda = 1$ вихри не взаимодействуют и мы можем ожидать, что при таком значении λ можно будет реализовать любую конфигурацию вихрей, т.е. нулей функции Φ. По этой причине мы ограничиваемся в дальнейшем именно случаем $\lambda = 1$.

Вихри Гинзбурга–Ландау

Зададим потенциальную энергию нашей модели интегралом от лагранжиана Гинзбурга–Ландау:

$$U(A,\Phi)=\frac{1}{2}\int \mathcal{L}(A,\Phi)\,d^2x.$$

Из условия $|\Phi|\to 1$ следует, что рассматриваемая задача обладает топологическим инвариантом, задаваемым числом вращения отображения Φ, переводящего окружности достаточно большого радиуса в топологические окружности. Этот инвариант называется вихревым числом и принимает целочисленные значения.

Теперь мы можем дать более строгое определение вихрей. Это пары (A, Φ), на которых реализуется минимум функционала потенциальной энергии $U(A, \Phi) < \infty$ в заданном топологическом классе, выделяемом значением вихревого числа d. Если $d > 0$, то такие пары называются d-вихрями, а при $d < 0$ – $|d|$-антивихрями.

Важной особенностью рассматриваемой модели является то, что функционал потенциальной энергии $U(A, \Phi)$ инвариантен относительно бесконечномерной группы калибровочных преобразований, задаваемых формулой

$$A \longmapsto A + id\chi, \quad \Phi \longmapsto e^{-i\chi}\Phi,$$

где χ – произвольная гладкая вещественнозначная функция на $\mathbb{R}^2_{(x_1,x_2)}$.

Нас интересует пространство модулей d-вихрей, определяемое как факторпространство

$$\mathcal{M}_d = \frac{d\text{-вихри } (A, \Phi)}{\text{калибровочные преобразования}} .$$

Оно описывается следующей теоремой Таубса.

Введем на плоскости $\mathbb{R}^2_{(x_1,x_2)}$ комплексную координату $z = x_1 + ix_2$, отождествляя $\mathbb{R}^2_{(x_1,x_2)}$ с комплексной плоскостью $\mathbb{C}_z$.

Теорема Таубса

Для любого неупорядоченного набора $z_1, \ldots, z_k$ из k точек на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, взятых с кратностями $d_1, \ldots, d_k$ такими, что $d_1 + \ldots + d_k = d$, существует единственный (с точностью до калибровочных преобразований) d-вихрь (A, Φ), такой что отображение Φ обращается в нуль в точности в точках $z_1, \ldots, z_k$ с заданными кратностями $d_1, \ldots, d_k$..

Более того, Таубс показал, что любая критическая точка (A, Φ) функционала $U(A, \Phi) < \infty$ с вихревым числом $d > 0$ калибровочно эквивалентна d-вихрю. Иными словами, все решения уравнений Эйлера–Лагранжа для функционала $U(A, \Phi)$ с конечной энергией и вихревым числом $d > 0$ стабильны и обладают минимальной энергией в своем топологическом классе.

Из теоремы Таубса вытекает, что пространство модулей d-вихрей $\mathcal{M}_d$ можно отождествить с векторным пространством $\mathbb{C}^d$, сопоставляя набору $z_1, \ldots, z_k$ полином со старшим коэффициентом 1, нули которого совпадают с заданным набором точек и их кратностей.

Антивихри с $d < 0$ допускают аналогичное описание. Объединяя эти два результата, можно дать им следующую физическую интерпретацию. Решения уравнений Эйлера–Лагранжа для функционала $U(A, \Phi)$ составлены либо из вихрей, либо из антивихрей. Рассматриваемая система не может содержать одновременно вихри и антивихри — подобные связанные состояния должны были "аннигилировать" до того, как система перешла в статическое состояние.

Динамические уравнения Гинзбурга–Ландау

Включим теперь в нашей модели время, добавив переменную $x_0 = t$. В этом случае поле Хиггса $\Phi = \Phi(t, x_1, x_2)$ будет задаваться гладкой комплекснозначной функцией на пространстве $\mathbb{R}^3_{(t,x_1,x_2)}$, а форма A заменится на форму

$$\mathcal{A} = A_0 dt + A_1 dx_1 + A_2 dx_2,$$

коэффициенты которой $A_\mu = A_\mu(t, x_1, x_2)$, $\mu = 0, 1, 2$, являются гладкими функциями с чисто мнимыми значениями на пространстве $\mathbb{R}^3_{(t,x_1,x_2)}$.

Обозначим временну́ю компоненту формы $\mathcal{A}$ через $A^0 = A_0 dt$, а ее пространственную компоненту по-прежнему через $A = A_1 dx_1 + A_2 dx_2$.

Потенциальная энергия системы будет задаваться той же формулой, что и раньше, иначе говоря

$$U(\mathcal{A}, \Phi) = U(A, \Phi),$$

а **кинетическая энергия** – формулой

$$T(\mathcal{A}, \Phi) = \frac{1}{2} \int \left\{ |F_{01}|^2 + |F_{02}|^2 + |d_{A^0} \Phi|^2 \right\} dx_1 dx_2,$$

где F_{0j}, $j = 1, 2$, задаются той же формулой, что и раньше, т.е.

$$F_{0j} = \partial_0 A_j - \partial_j A_0,$$

а $d_{A^0} \Phi = d\Phi + A_0 \, dt$. Заметим, что формула для кинетической энергии содержит члены, подобные тем, которые входят в формулу для потенциальной энергии, но содержащие производные по времени.

Получившаяся модель управляется функционалом действия Гинзбурга–Ландау:

$$\boldsymbol{S(\mathcal{A}, \Phi) = \int_0^{T_0} \left(T(\mathcal{A}, \Phi) - U(\mathcal{A}, \Phi)\right) dt,}$$

а уравнения Эйлера–Лагранжа для него имеют вид

$$\begin{cases} \partial_1 F_{01} + \partial_2 F_{02} = -i\,\mathrm{Im}(\bar{\Phi}\nabla_{A,0}\Phi) \\ \partial_0 F_{0j} + \sum\limits_{k=1}^{2} \varepsilon_{jk}\partial_k F_{12} = -i\,\mathrm{Im}(\bar{\Phi}\nabla_{A,j}\Phi),\ \ j = 1, 2 \\ (\nabla_{A,0}^2 - \nabla_{A,1}^2 - \nabla_{A,2}^2)\Phi = \frac{1}{2}\Phi(1 - |\Phi|^2), \end{cases}$$

где

$$\nabla_{A,\mu} = \partial_\mu + A_\mu,\ \ \mu = 0, 1, 2; \quad \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1,\ \ \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0.$$

Первое из этих уравнений имеет характер связи, иными словами, оно выполняется при любом t, если выполняется в начальный момент времени. Последнее уравнение, в левой части которого стоит ковариантный даламбертиан, есть нелинейное волновое уравнение.

Уравнения Гинзбурга–Ландау, так же как действие $S(\mathcal{A}, \Phi)$, инвариантны относительно динамических калибровочных преобразований, задаваемых той же формулой, что и в статическом случае

$$A_\mu \longmapsto A_\mu + i\partial_\mu \chi, \quad \Phi \longmapsto e^{-i\chi}\Phi, \quad \mu = 0, 1, 2,$$

только теперь χ есть гладкая вещественнозначная функция на $\mathbb{R}^3_{(t,x_1,x_2)}$.

Нашей главной целью является описание решений уравнений Гинзбурга–Ландау с точностью до динамических калибровочных преобразований. Решения этих уравнений будем для краткости называть просто динамическими решениями (в противоположность статическим решениям, рассмотренным ранее), а фактор пространства динамических решений по модулю калибровочных преобразований — пространством модулей динамических решений.

Адиабатический предел в уравнениях Гинзбурга–Ландау

Для исследования указанных динамических решений удобно выбрать калибровочную функцию χ так, чтобы временнáя компонента потенциала обратилась в нуль, т.е. $A_0 = 0$. Такой выбор χ называется временнóй калибровкой. (Заметим, что после наложения этого условия на калибровочную функцию χ у нас все еще остается калибровочная свобода относительно статических калибровочных преобразований.)

В этой калибровке динамическое решение уравнений Гинзбурга–Ландау можно рассматривать как траекторию вида

$$\gamma : t \longmapsto [A(t), \Phi(t)],$$

где $[A, \Phi]$ обозначает калибровочный класс пары (A, Φ) относительно статических калибровочных преобразований. Указанная траектория лежит в конфигурационном пространстве

$$\mathcal{N}_d = \frac{\{(A,\Phi) \text{ с } U(A,\Phi) < \infty \text{ и вихревым числом } d\}}{\{\text{статические калибровочные преобразования}\}}\ ,$$

которое содержит, в частности, пространство модулей d-вихрей $\mathcal{M}_d$.

Конфигурационное пространство $\mathcal{N}_d$ можно для наглядности представлять себе в виде горизонтального желоба, по которому катается маленький шарик с траекторией $\gamma(t)$. Пространство модулей d-вихревых решений $\mathcal{M}_d$, в которых потенциальная энергия минимальна, соответствует дну желоба.

Чем меньше кинетическая энергия шарика, тем ближе его траектория ко дну. Шарик может даже пересекать его, но, имея ненулевую кинетическую энергию, не может там остановиться и должен снова взбираться на стенку желоба.

Рассмотрим семейство динамических решений γ_ϵ уравнений Гинзбурга–Ландау, зависящих от параметра $\epsilon > 0$, которые задаются траекториями

$$\gamma_\epsilon : t \longmapsto [A_\epsilon(t), \Phi_\epsilon(t)].$$

Предположим, что кинетическая энергия указанных траекторий

$$T(\gamma_\epsilon) := \int_0^{T_0} T(\gamma_\epsilon(t))dt \approx \epsilon$$

стремится к нулю при $\epsilon \to 0$ пропорционально ϵ. Тогда в пределе при $\epsilon \to 0$ траектория γ_ϵ превращается в статическое решение, т.е. в точку на $\mathcal{M}_d$.

Однако, если ввести на γ_ϵ ”медленное время” $\tau = \epsilon t$ и рассмотреть предел ”масштабированных” траекторий $\gamma_\epsilon(\tau)$ при $\epsilon \to 0$, то в указанном пределе мы получим не точку, а траекторию γ_0, лежащую в $\mathcal{M}_d$. Конечно, такая траектория не может быть решением исходных динамических уравнений, поскольку любая ее точка является статическим решением. Однако эти траектории описывают приближенно динамические решения с малой кинетической энергией.

Описанная процедура называется адиабатическим пределом. В этом пределе исходные динамические уравнения сводятся к т.н. адиабатическим уравнениям, решения которых называются адиабатическими траекториями.

Адиабатические траектории допускают следующее внутреннее описание в терминах пространства $\mathcal{M}_d$.

Теорема

Функционал кинетической энергии задает на пространстве $\mathcal{M}_d$ риманову метрику, называемую кинетической или Т-метрикой. Адиабатические траектории γ_0 являются геодезическими этой метрики.

Идея приближенного описания "медленных" динамических решений в терминах пространства модулей статических решений была высказана на эвристическом уровне Мэнтоном, который постулировал следующий адиабатический принцип: для любой геодезической траектории γ_0 на пространстве модулей d-вихрей $\mathcal{M}_d$ найдется последовательность $\{\gamma_\epsilon\}$ динамических решений, сходящаяся к γ_0 в адиабатическом пределе.

Строгая математическая формулировка и доказательство указанного принципа были даны Р.В.Пальвелевым.

Адиабатический принцип сводит задачу о рассеянии вихрей в рассматриваемой нами модели к описанию геодезических на пространстве модулей d-вихрей $\mathcal{M}_d$ в кинетической метрике. Иными словами, к решению уравнения Эйлера для геодезических на пространстве $\mathcal{M}_d$, наделенном T-метрикой.

К сожалению, помимо случая $d = 2$, для указанной метрики не известно никаких явных формул. Причина в том, что сама теорема Таубса не дает явной конструкции для d-вихря с нулями в заданных точках на комплексной плоскости. В ней доказывается только существование такого вихря в окрестности решения линеаризованного уравнения с этими нулями.

Уравнения Зайберга–Виттена

Вихревые уравнения Гинзбурга–Ландау, как выяснилось недавно, тесно связаны с уравнениями Зайберга–Виттена на гладких 4-мерных многообразиях, к описанию которых я перехожу.

Ключевую роль в исследовании 4-мерных римановых многообразий играет Spin^c-структура, которая существует на любом 4-мерном римановом многообразии. Ее можно рассматривать как замену комплексной структуры, лежащей в основе теории римановых поверхностей.

Мы отсылаем за общим определением Spin^c-структуры к книге Лоусона и Микельсон и опишем здесь ее свойства, используемые в теории Зайберга–Виттена.

Пусть (X, g) есть компактное ориентируемое риманово 4-многообразие, снабженное связностью Леви-Чивита. На нем можно определить клиффордово умножение ρ, т.е. представление форм из $\Omega^*(X)$ линейными эндоморфизмами, действующими на гладких сечениях спинорного расслоения $W \to X$. Это комплексное эрмитово векторное расслоение ранга 4, разлагающееся в прямую сумму

$$W = W^+ \oplus W^-$$

полуспинорных расслоений ранга 2.

Спинорное расслоение W можно наделить спинорной связностью ∇, являющейся продолжением связности Леви-Чивита до связности на W. Оператор Дирака на гладких сечениях расслоения W задается композицией $\rho \circ \nabla$ клиффордова умножения со спинорной связностью.

В случае, когда многообразие (X, g) является симплектическим, т.е. наделено симплектической формой ω, совместимой с метрикой g, оно обладает также почти комплексной структурой J, совместимой как с ω, так и с g.

В этом случае имеется каноническая конструкция спинорного расслоения W, отождествляемого с

$$W_{\mathrm{can}} = \Lambda^{0,*}(T^*X) = \bigoplus_{q=0}^{2} \Lambda^{0,q}(T^*X).$$

Соответственно,

$$W_{\mathrm{can}}^{+} = \Lambda^{0,0}(T^*X) \oplus \Lambda^{0,2}(T^*X)\,, \quad W_{\mathrm{can}}^{-} = \Lambda^{0,1}(T^*X).$$

Имеется также явная формула для клиффордова умножения и каноническая конструкция спинорной связности на W_{can}.

Более того, для любого эрмитова линейного расслоения $E \to X$ с эрмитовой связностью B на нем можно построить ассоциированное спинорное расслоение $W_E := W_{\mathrm{can}} \otimes E$ и спинорную связность ∇_A на W_E, где $A = A_E$ есть тензорное произведение канонической спинорной связности на W_{can} и заданной эрмитовой связности B на E.

Оператор Дирака

$$D_A = \rho \circ \nabla_A : \Gamma(X, W^+) \longrightarrow \Gamma(X, W^-)$$

совпадает в этом случае с $\bar{\partial}_B + \bar{\partial}_B^*$, где $\bar{\partial}_B^*$ есть оператор, L^2-сопряженный к оператору $\bar{\partial}_B$.

Введем функционал действия Зайберга–Виттена

$$S(A,\Phi)=\frac{1}{2}\int_X\left\{|F_A|^2+|\nabla_A\Phi|^2+\left(s(g)+|\Phi|^2\right)\frac{|\Phi|^2}{4}\right\}\mathrm{vol},$$

где $s(g)$ есть скалярная кривизна многообразия (X,g), F_A – кривизна связности ∇_A, $\Phi\in\Gamma(X,W)$ – гладкое сечение спинорного расслоения W и vol – элемент объема на (X,g).

Локальные минимумы этого функционала удовлетворяют уравнениям Зайберга–Виттена

$$\begin{cases} D_A\Phi=0,\\ F_A^+=\Phi\otimes\Phi^*-\frac{1}{2}|\Phi|^2\cdot\mathrm{Id},\end{cases}$$

где F_A^+ есть автодуальная компонента кривизны F_A.

Решения этих уравнений задаются парами (A, Φ), где связность $A = A_E$ была описана выше, а Φ есть сечение полуспинорного расслоения W^+, задаваемой парой форм (φ_0, φ_2) с $\varphi_0 \in \Omega^0(X, E)$, $\varphi_2 \in \Omega^{0,2}(X, E)$.

На самом деле, теория Зайберга–Виттена зависит по существу только от комплексного линейного расслоения $E \to X$, наделенного эрмитовой связностью B и в этом смысле является абелевой.

Уравнения Зайберга–Виттена можно рассматривать как 4-мерное обобщение статических уравнений Гинзбурга–Ландау на плоскости $\mathbb{R}^2$. В этом случае функционал действия Зайберга–Виттена сводится к функционалу потенциальной энергии.

Адиабатический предел в уравнениях Зайберга–Виттена

Как и в двумерном случае, уравнения Зайберга–Виттена, а также действие Зайберга–Виттена инвариантны относительно калибровочных преобразований, задаваемых калибровочной функцией $g = e^{i\chi} \in C^{\infty}(X, \mathrm{U}(1))$.

Для того, чтобы гарантировать разрешимость этих уравнений, необходимо наложить на первый класс Черна $c_1(E)$ некоторые топологические ограничения и рассмотреть возмущение этих уравнений посредством добавления во второе уравнение подходящей автодуальной 2-формы η.

Предположим теперь, что X есть компактное симплектическое 4-многообразие, наделенное симплектической 2-формой ω и совместимой почти комплексной структурой J. Рассмотрим эрмитово линейное расслоение $E \to X$ с эрмитовой связностью B и обозначим через $W_E := W_{\mathrm{can}} \otimes E$ спинорное расслоение с спинорной формой связности A, равной тензорному произведению канонической спинорной связности A_{can} на W_{can} и связности B на E.

Оператор Дирака D_A в этом случае совпадает с $\bar\partial_B + \bar\partial_B^*$, а сечение $\Phi \in C^\infty(X, W_E^+)$ задается парой

$$\Phi = (\varphi_0, \varphi_2) \in \Omega^0(X, E) \oplus \Omega^{0,2}(X, E).$$

Комплексифицированное расслоение $\Lambda_+^2 \otimes \mathbb{C}$ автодуальных 2-форм на X в рассматриваемом случае разлагается в прямую сумму подрасслоений

$$\Lambda_+^2 \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{2,0} \oplus \mathbb{C}[\omega] \oplus \Lambda^{0,2}.$$

Соответственно, второе уравнение Зайберга–Виттена для кривизны разлагается в сумму трех уравнений — одно для компоненты, параллельной ω, другое для $(0,2)$-компоненты и третье для $(2,0)$-компоненты, которое сопряжено уравнению для $(0,2)$-компоненты и по этой причине далее не рассматривается.

Уравнения Зайберга–Виттена принимают вид

$$\begin{cases} \bar{\partial}_B \varphi_0 + \bar{\partial}_B^* \varphi_2 = 0, \\ F_B^{0,2} + \eta^{0,2} = \dfrac{\bar{\varphi}_0 \varphi_2}{2}, \\ F_{A_{\mathrm{can}}}^{\omega} + F_B^{\omega} = \dfrac{i}{4}(|\varphi_0|^2 - |\varphi_2|^2) - \eta^{\omega}. \end{cases}$$

Предполагая выполненными топологические условия, упомянутые выше, введем в уравнения Зайберга–Виттена масштабный параметр $\lambda > 0$ и добавим в них возмущение η в форме $\eta = -F_{A_{\mathrm{can}}}^{+} + \pi i \lambda \omega$.

В терминах **перенормированных сечений** $\alpha := \frac{\varphi_0}{\sqrt{\lambda}}$ и $\beta := \frac{\varphi_2}{\sqrt{\lambda}}$ возмущенные уравнения Зайберга–Виттена запишутся в виде

$$\begin{cases} \bar{\partial}_B \alpha + \bar{\partial}_B^* \beta = 0, \\ \dfrac{2}{\lambda} F_B^{0,2} = \bar{\alpha}\beta, \\ \dfrac{4i}{\lambda} F_B^{\omega} = 4\pi + |\beta|^2 - |\alpha|^2. \end{cases}$$

Заметим, что все входящие в них ингредиенты (такие как α, β, B) зависят от λ.

Согласно Таубсу, решения $(\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$ этих уравнений ведут себя следующим образом при $\lambda \to \infty$:

(1) $|\alpha_\lambda| \to 1$ всюду вне множества нулей $\alpha_\lambda^{-1}(0)$;

(2) $|\beta_\lambda| \to 0$ всюду вместе с производными первого порядка.

Обозначим через $C_\lambda := \alpha_\lambda^{-1}(0)$ множество нулей сечения α_λ. Кривые C_λ сходятся в смысле потоков к некоторому псевдоголоморфному дивизору, задаваемому цепью вида $\sum d_k C_k$, состоящей из псевдоголоморфных кривых C_k, взятых с кратностями d_k.

Одновременно, исходные уравнения Зайберга–Виттена редуцируются к семейству вихревых уравнений в комплексных плоскостях, нормальных к кривым C_k. Цепь $\sum d_k C_k$ можно рассматривать как комплексный аналог адиабатических геодезических в (2+1)-мерном случае.

Обратно, для того, чтобы можно было восстановить решение уравнений Зайберга–Виттена по семейству вихревых решений в нормальных плоскостях, это семейство должно удовлетворять нелинейному $\bar{\partial}$-уравнению, которое можно рассматривать как комплексный аналог уравнения Эйлера для адиабатических геодезических с "комплексным временем".

Тем самым, для уравнений Зайберга–Виттена на симплектических 4-многообразиях мы получаем следующее соответствие, устанавливаемое конструкцией адиабатического предела:

$$\left\{\begin{array}{l}\textbf{решения}\\ \textbf{уравнений}\\ \textbf{Зайберга–}\\ \textbf{Виттена}\end{array}\right\} \longmapsto \left\{\begin{array}{l}\textbf{семейства вихревых решений}\\ \textbf{в нормальных плоскостях}\\ \textbf{псевдоголоморфных}\\ \textbf{дивизоров}\end{array}\right\}$$