Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского 2024

Казань, 7 апреля 2024 г.

7 класс

Вариант № 1

1. Всевозможные комбинации из букв *а*, *б*, *в* длины 5 выписаны в один список в алфавитном порядке. (Начало списка таково: *ааааа*, *ааааб*, *ааaaв*, *аааба* и т. д.) Что стоит на 239-м месте?

Ответ. *вввбб*.

Решение. Т.к. при составлении пятибуквенной комбинации на каждую позицию можно поставить одну из трёх букв, то всего в списке $3^5 = 243$ таких буквосочетания. Первые пять комбинаций с конца таковы: *ввввв*, *вввvб*, *вввва*, *вввбв*, *вввбб*. Искомое буквосочетание – пятое с конца.

2. Алина умеет умножать число на два, или менять цифры в числе произвольным образом (главное, чтобы не начиналось на 0). Может ли она из 2 получить 94?

Ответ. Не может.

Решение. Число 94 может быть получено либо из 47, либо из 49. Число 49 может быть получено лишь из 94, а 47 – только из 74. Число 74 может быть получено только из 47 или 37, а 37 получается лишь из 73, которое, в свою очередь, получается лишь из 37. Таким образом, множество чисел, из которых может быть получено 94, не содержит двойку.

3. Длины двух сторон треугольника равны 2024 и 7. Чему может быть равна длина третьей стороны, если она также является целым числом?

Ответ. Любым целым числом от 2018 до 2030.

Решение. Из трёх отрезков можно составить треугольник в точности тогда, когда длина любого из них меньше суммы двух других. В частности, длина третьей стороны должна быть больше $2024 - 7 = 2017$ и меньше $2024 + 7 = 2031$. Нетрудно видеть, что все целые числа от 2018 до 2030 подходят в качестве искомого значения.

4. На Турнир юных математиков приехали 123 семиклассника. У каждого из них не более двух лучших друзей. Организаторы должны рассадить участников по аудиториям, но знают, что если два лучших друга окажутся в одной аудитории, то непременно найдут способ списывать друг у друга. Сколько аудиторий потребуется организатором Турнира юных математиков, чтобы гарантированно рассадить всех семиклассников и не допустить списывания?

Ответ. 3 аудитории.

Решение. Ясно, что если среди семиклассников есть трое, которые дружат между собой, то их необходимо рассадить в разные аудитории.

Для того чтобы рассадить семиклассников по трём аудиториям, достаточно каждый раз брать произвольного семиклассника, который ещё не сидит в аудитории, и сажать его в аудиторию, в которой на данный момент нет его лучших друзей. (Если таких аудиторий несколько, то сажаем в любую из них.) Так как лучших друзей у семиклассника не более двух, а аудиторий три, то требуемая аудитория всегда найдётся.

5. Докажите, что начиная с некоторого натурального n количество составных чисел, не превосходящих $6n$, будет не менее а) $3n$, б) $4n$.

Решение. Приведём сразу решение пункта б). Среди чисел от 1 до $6n$ есть $3n$ чётных чисел, $2n$ чисел, кратных трём, и n чисел, кратных 6. Тогда чисел, кратных двум или трём, всего $3n + 2n - n = 4n$. (Вычитаем n, т.к. числа, кратные 6, посчитаны дважды.)

Среди чисел, кратных двум или трём, составными являются все числа, кроме 2 и 3, т.е. от 1 до $6n$ составных чисел не менее $4n - 2$. Наконец, при $n \geq 6$ составными также будут числа 25 и 35, откуда получаем требуемое.

Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского 2024

Казань, 7 апреля 2024 г.

7 класс

Вариант № 2

---

1. Всевозможные комбинации из букв *а*, *б*, *в*, *г* длины 4 выписаны в один список в алфавитном порядке. (Начало списка таково: *аааа*, *аааб*, *ааав*, *аааг*, *ааба* и т. д.) Что стоит на 251-м месте?

Ответ. *ггвв*.

Решение. Т.к. при составлении четырёхбуквенной комбинации на каждую позицию можно поставить одну из четырёх букв, то всего в списке $4^4 = 256$ таких буквосочетаний. Первые шесть комбинаций с конца таковы: *гггг*, *гггв*, *гггб*, *ггга*, *ггвг*, *ггвв*. Искомое буквосочетание – шестое с конца.

2. Алина умеет умножать число на два, или менять цифры в числе произвольным образом (главное, чтобы не начиналось на 0). Может ли она из 4 получить 94?

Ответ. Не может.

Решение. Число 94 может быть получено либо из 47, либо из 49. Число 49 может быть получено лишь из 94, а 47 – только из 74. Число 74 может быть получено только из 47 или 37, а 37 получается лишь из 73, которое, в свою очередь, получается лишь из 37. Таким образом, множество чисел, из которых может быть получено 94, не содержит четвёрку.

3. Длины двух сторон треугольника равны 2030 и 7. Чему может быть равна длина третьей стороны, если она также является целым числом?

Ответ. Любым целым числом от 2024 до 2036.

Решение. Из трёх отрезков можно составить треугольник в точности тогда, когда длина любого из них меньше суммы двух других. В частности, длина третьей стороны должна быть больше $2030 - 7 = 2023$ и меньше $2030 + 7 = 2037$. Нетрудно видеть, что все целые числа от 2024 до 2036 подходят в качестве искомого значения.

4. На Турнир юных математиков приехали 135 семиклассников. У каждого из них не более двух лучших друзей. Организаторы должны рассадить участников по аудиториям, но знают, что если два лучших друга окажутся в одной аудитории, то непременно найдут способ списывать друг у друга. Сколько аудиторий потребуется организатором Турнира юных математиков, чтобы гарантированно рассадить всех семиклассников и не допустить списывания?

Ответ. 3 аудитории.

Решение. Ясно, что если среди семиклассников есть трое, которые дружат между собой, то их необходимо рассадить в разные аудитории.

Для того чтобы рассадить семиклассников по трём аудиториям, достаточно каждый раз брать произвольного семиклассника, который ещё не сидит в аудитории, и сажать его в аудиторию, в которой на данный момент нет его лучших друзей. (Если таких аудиторий несколько, то сажаем в любую из них.) Так как лучших друзей у семиклассника не более двух, а аудиторий три, то требуемая аудитория всегда найдётся.

5. Докажите, что начиная с некоторого натурального n количество составных чисел, не превосходящих $6n$, будет не менее а) $3n$, б) $4n$.

Решение. Приведём сразу решение пункта б). Среди чисел от 1 до $6n$ есть $3n$ чётных чисел, $2n$ чисел, кратных трём, и n чисел, кратных 6. Тогда чисел, кратных двум или трём, всего $3n + 2n - n = 4n$. (Вычитаем n, т.к. числа, кратные 6, посчитаны дважды.)

Среди чисел, кратных двум или трём, составными являются все числа, кроме 2 и 3, т.е. от 1 до $6n$ составных чисел не менее $4n - 2$. Наконец, при $n \geq 6$ составными также будут числа 25 и 35, откуда получаем требуемое.

Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского 2024

Казань, 7 апреля 2024 г.

7 класс

Вариант № 3

---

1. Всевозможные комбинации из букв *а*, *б*, *в* длины 6 выписаны в один список в алфавитном порядке. (Начало списка таково: *аааааа*, *аааааб*, *ааааав*, *ааааба* и т. д.) Что стоит на 725-м месте?

Ответ. *ввввбб*.

Решение. Т.к. при составлении шестибуквенной комбинации на каждую позицию можно поставить одну из трёх букв, то всего в списке $3^6 = 729$ таких буквосочетаний. Первые пять комбинаций с конца таковы: *вввввв*, *вввввб*, *вввввa*, *ввввбв*, *ввввбб*. Искомое буквосочетание – пятое с конца.

2. Алина умеет умножать число на два, или менять цифры в числе произвольным образом (главное, чтобы не начиналось на 0). Может ли она из 4 получить 94?

Ответ. Не может.

Решение. Число 94 может быть получено либо из 47, либо из 49. Число 49 может быть получено лишь из 94, а 47 – только из 74. Число 74 может быть получено только из 47 или 37, а 37 получается лишь из 73, которое, в свою очередь, получается лишь из 37. Таким образом, множество чисел, из которых может быть получено 94, не содержит четвёрку.

3. Длины двух сторон треугольника равны 7 и 2024. Чему может быть равна длина третьей стороны, если она также является целым числом?

Ответ. Любым целым числом от 2018 до 2030.

Решение. Из трёх отрезков можно составить треугольник в точности тогда, когда длина любого из них меньше суммы двух других. В частности, длина третьей стороны должна быть больше $2024 - 7 = 2017$ и меньше $2024 + 7 = 2031$. Нетрудно видеть, что все целые числа от 2018 до 2030 подходят в качестве искомого значения.

4. На Турнир юных математиков приехали 147 семиклассников. У каждого из них не более двух лучших друзей. Организаторы должны рассадить участников по аудиториям, но знают, что если два лучших друга окажутся в одной аудитории, то непременно найдут способ списывать друг у друга. Сколько аудиторий потребуется организатором Турнира юных математиков, чтобы гарантированно рассадить всех семиклассников и не допустить списывания?

Ответ. 3 аудитории.

Решение. Ясно, что если среди семиклассников есть трое, которые дружат между собой, то их необходимо рассадить в разные аудитории.

Для того чтобы рассадить семиклассников по трём аудиториям, достаточно каждый раз брать произвольного семиклассника, который ещё не сидит в аудитории, и сажать его в аудиторию, в которой на данный момент нет его лучших друзей. (Если таких аудиторий несколько, то сажаем в любую из них.) Так как лучших друзей у семиклассника не более двух, а аудиторий три, то требуемая аудитория всегда найдётся.

5. Докажите, что начиная с некоторого натурального n количество составных чисел, не превосходящих $6n$, будет не менее а) $3n$, б) $4n$.

Решение. Приведём сразу решение пункта б). Среди чисел от 1 до $6n$ есть $3n$ чётных чисел, $2n$ чисел, кратных трём, и n чисел, кратных 6. Тогда чисел, кратных двум или трём, всего $3n + 2n - n = 4n$. (Вычитаем n, т.к. числа, кратные 6, посчитаны дважды.)

Среди чисел, кратных двум или трём, составными являются все числа, кроме 2 и 3, т.е. от 1 до $6n$ составных чисел не менее $4n - 2$. Наконец, при $n \geq 6$ составными также будут числа 25 и 35, откуда получаем требуемое.

Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского 2023

Казань, 7 апреля 2024 г.

7 класс

Вариант № 4

---

1. Всевозможные комбинации из букв *а*, *б*, *в*, *г*, *д* длины 4 выписаны в один список в алфавитном порядке. (Начало списка таково: *аааа*, *аааб*, *ааав*, *аааг*, *ааад*, *ааба* и т. д.) Что стоит на 620-м месте?

Ответ. *ддгд.*

Решение. Т.к. при составлении четырёхбуквенной комбинации на каждую позицию можно поставить одну из пяти букв, то всего в списке $5^4 = 625$ таких буквосочетаний. Первые шесть комбинаций с конца таковы: *дддд*, *дддг*, *дддв*, *дддб*, *ддда*, *ддгд.* Искомое буквосочетание – шестое с конца.

2. Алина умеет умножать число на два, или менять цифры в числе произвольным образом (главное, чтобы не начиналось на 0). Может ли она из 2 получить 94?

Ответ. Не может.

Решение. Число 94 может быть получено либо из 47, либо из 49. Число 49 может быть получено лишь из 94, а 47 – только из 74. Число 74 может быть получено только из 47 или 37, а 37 получается лишь из 73, которое, в свою очередь, получается лишь из 37. Таким образом, множество чисел, из которых может быть получено 94, не содержит двойку.

3. Длины двух сторон треугольника равны 2018 и 7. Чему может быть равна длина третьей стороны, если она также является целым числом?

Ответ. Любым целым числом от 2012 до 2024.

Решение. Из трёх отрезков можно составить треугольник в точности тогда, когда длина любого из них меньше суммы двух других. В частности, длина третьей стороны должна быть больше $2018 - 1 = 2011$ и меньше $2018 + 7 = 2025$. Нетрудно видеть, что все целые числа от 2012 до 2024 подходят в качестве искомого значения.

4. На Турнир юных математиков приехали 159 семиклассников. У каждого из них не более двух лучших друзей. Организаторы должны рассадить участников по аудиториям, но знают, что если два лучших друга окажутся в одной аудитории, то непременно найдут способ списывать друг у друга. Сколько аудиторий потребуется организатором Турнира юных математиков, чтобы гарантированно рассадить всех семиклассников и не допустить списывания?

Ответ. 3 аудитории.

Решение. Ясно, что если среди семиклассников есть трое, которые дружат между собой, то их необходимо рассадить в разные аудитории.

Для того чтобы рассадить семиклассников по трём аудиториям, достаточно каждый раз брать произвольного семиклассника, который ещё не сидит в аудитории, и сажать его в аудиторию, в которой на данный момент нет его лучших друзей. (Если таких аудиторий несколько, то сажаем в любую из них.) Так как лучших друзей у семиклассника не более двух, а аудиторий три, то требуемая аудитория всегда найдётся.

5. Докажите, что начиная с некоторого натурального n количество составных чисел, не превосходящих $6n$, будет не менее а) $3n$, б) $4n$.

Решение. Приведём сразу решение пункта б). Среди чисел от 1 до $6n$ есть $3n$ чётных чисел, $2n$ чисел, кратных трём, и n чисел, кратных 6. Тогда чисел, кратных двум или трём, всего $3n + 2n - n = 4n$. (Вычитаем n, т.к. числа, кратные 6, посчитаны дважды.)

Среди чисел, кратных двум или трём, составными являются все числа, кроме 2 и 3, т.е. от 1 до $6n$ составных чисел не менее $4n - 2$. Наконец, при $n \geq 6$ составными также будут числа 25 и 35, откуда получаем требуемое.