Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2019, №1, с. 49–62 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

М.К. ПОТАПОВ, Б.В. СИМОНОВ

НЕРАВЕНСТВА РАЗЛИЧНЫХ МЕТРИК ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Аннотация. Для тригонометрических полиномов хорошо известны неравенства С.М. Никольского в разных метриках. В данной работе доказываются неравенства для сумм тригонометрических полиномов, обобщающие эти неравенства.

Ключевые слова: неравенство Никольского, метрика, тригонометрические полиномы.

УДК: 517.5

1. Обозначим через L_p, $1 \le p \le \infty$, множество измеримых 2π-периодических функций $f(x)$ одного переменного, для которых $\|f\|_p<\infty$, где $\|f\|_p=\left(\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, если $1 \le p < \infty$, $\|f\|_p = \sup\limits_{0\le x\le 2\pi} \text{vrai}\,|f(x)|$, если $p = \infty$.

Через $C, C_1, \dots$ обозначим произвольные положительные постоянные, вообще говоря, разные в разных формулах.

Лемма 1 (неравенство Никольского [1], с. 243)**.** *Пусть $T_n(x)$ — тригонометрический полином порядка $n \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le q \le \infty$. Тогда*

$$\|T_n\|_q \le 2n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|T_n\|_p.$$

В работе получено следующее обобщение неравенства Никольского.

Теорема 1. *Пусть функция T_{2^n} — тригонометрический полиномом порядка 2^n, $1 \le p < q \le \infty$, $q^* = q$, если $q < \infty$, $q^* = 1$, если $q = \infty$. Тогда*

$$\left\| \sum_{n=N_1}^{N_2} T_{2^n} \right\|_q \le C \left(\sum_{n=N_1}^{N_2} 2^{nq^*(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|T_{2^n}\|_p^{q^*} \right)^{\frac{1}{q}^*},$$

где постоянная C не зависит от N_1, N_2 и T_{2^n}.

Доказательство будет проводиться методом Харди–Литтлвуда–Пэли.

а) Пусть $1 \le p < q < \infty$, $J \equiv \left\| \sum\limits_{\nu=N_1}^{N_2} T_{2^\nu} \right\|_q \le \left(\int\limits_0^{2\pi} \Big(\sum\limits_{\nu=N_1}^{N_2} |T_{2^\nu}(x)| \Big)^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$.

Поступила в редакцию 03.12.2017. После доработки 03.12.2017. Принята к публикации 22.03.2018

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 19-01-00457.

Оценим $J_1 \equiv \int\limits_0^{2\pi} \Big(\sum\limits_{\nu=N_1}^{N_2} |T_{2^\nu}(x)| \Big)^q dx = \int\limits_0^{2\pi} \left[\Big(\sum\limits_{\nu=N_1}^{N_2} |T_{2^\nu}(x)| \Big)^{\frac{q}{m}} \right]^m dx$, где $m = [q]+1$, $[a]$ — целая часть числа a.

Применяя неравенство

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\beta} \Big)^{\frac{1}{\beta}} \le \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\alpha} \Big)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{1}$$

где $a_k \ge 0$, $0 < \alpha < \beta < \infty$ (например, [2], с. 43), имеем

$$J_1 \le \int_0^{2\pi} \left[\sum_{\nu=N_1}^{N_2} |T_{2^\nu}|^{\frac{q}{m}} \right]^m dx = \int_0^{2\pi} \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^{m} |T_{2^{\nu_k}}|^{\frac{q}{m}} dx =$$

(здесь и далее принята условная форма записи:

$$\prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=i+1}^{m} \alpha_i \beta_j = \prod_{i=1}^{m-1} \gamma_i, \quad \gamma_i = (\alpha_i\beta_{i+1})(\alpha_i\beta_{i+2}) \cdots (\alpha_i\beta_m) \Big)$$

$$= \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^{m} |T_{2^{\nu_k}} T_{2^{\nu_l}}|^{\frac{q}{m(m-1)}} dx.$$

Применяя неравенство Гёльдера ([3], с. 19) с показателями $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$, где $\mathcal{P} = \frac{1}{2} m(m-1)$, получаем

$$J_1 \le \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^{m} \Big(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_k}} T_{2^{\nu_l}}|^{\frac{q}{2}} dx \Big)^{\frac{1}{\mathcal{P}}}.$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $\alpha = \frac{q+p}{p}$ и $\alpha_1 = \frac{q+p}{q}$, имеем

$$J_1 \le \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^{m} \Big(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_k}}|^{\frac{q\alpha}{2}} dx \Big)^{\frac{1}{\alpha\mathcal{P}}} \Big(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_l}}|^{\frac{q\alpha_1}{2}} dx \Big)^{\frac{1}{\alpha_1\mathcal{P}}} \equiv$$

$$\equiv \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^{m} \beta_k \widehat{\beta}_l. \tag{2}$$

Оценим β_k. Применяя неравенство Никольского, имеем

$$\beta_k = \Big(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_k}}|^{\frac{q\alpha}{2}} dx \Big)^{\frac{1}{\alpha\mathcal{P}}} = \|T_{2^{\nu_k}}\|_{\frac{\alpha q}{2}}^{\frac{q}{2\mathcal{P}}} \le C_1 \Big\{ \|T_{2^{\nu_k}}\|_p 2^{\nu_k(\frac{1}{p} - \frac{2}{\alpha q})} \Big\}^{\frac{q}{2\mathcal{P}}} =$$

$$= C_1 \Big\{ \|T_{2^{\nu_k}}\|_p 2^{\nu_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} 2^{\nu_k(\frac{1}{q} - \frac{2}{q\alpha})} \Big\}^{\frac{q}{2\mathcal{P}}} = C_1 \{ \|T_{2^{\nu_k}}\|_p 2^{\nu_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \}^{\frac{q}{2\mathcal{P}}} 2^{\nu_k(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha})\frac{1}{\mathcal{P}}}.$$

Аналогично,

$$\widehat{\beta}_l \le C_2 \Big\{ \|T_{2^{\nu_l}}\|_p 2^{\nu_k(\frac{1}{p} - \frac{2}{\alpha_1 q})} \Big\}^{\frac{q}{2\mathcal{P}}} = C_2 \Big\{ \|T_{2^{\nu_l}}\|_p 2^{\nu_l(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \Big\}^{\frac{q}{2\mathcal{P}}} 2^{\nu_l(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1})\frac{1}{\mathcal{P}}} =$$

$$= C_2 \Big\{ \|T_{2^{\nu_l}}\|_p 2^{\nu_l(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \Big\}^{\frac{q}{2\mathcal{P}}} 2^{\nu_l(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{\alpha})\frac{1}{\mathcal{P}}} = C_2 \Big\{ \|T_{2^{\nu_l}}\|_p 2^{\nu_l(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \Big\}^{\frac{q}{2\mathcal{P}}} 2^{-\nu_l(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha})\frac{1}{\mathcal{P}}},$$

где постоянные C_1 и C_2 не зависят от ν_k, ν_l. Тогда

$$\prod_{k=1}^{m-1}\prod_{l=k+1}^{m}\beta_k\widehat{\beta}_l \le C_3\prod_{k=1}^{m-1}\prod_{l=k+1}^{m}\left\{\left[\|T_{2^{\nu_k}}\|_p 2^{\nu_k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|T_{2^{\nu_l}}\|_p 2^{\nu_l(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\right]^{\frac{q}{2\mathcal{P}}} 2^{(\nu_k-\nu_l)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{\mathcal{P}}}\right\}.$$

Если $\nu_k \le \nu_l$, то получаем

$$\prod_{k=1}^{m-1}\prod_{l=k+1}^{m}\beta_k\widehat{\beta}_l \le C_3\prod_{k=1}^{m-1}\prod_{l=k+1}^{m}\left\{\left[\|T_{2^{\nu_k}}\|_p 2^{\nu_k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|T_{2^{\nu_l}}\|_p 2^{\nu_l(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\right]^{\frac{q}{2\mathcal{P}}} 2^{(\nu_k-\nu_l)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{\mathcal{P}}}\right\}.$$

Если $\nu_k > \nu_l$, то в формуле (2), применяя неравенство Гёльдера с показателями α_1 и α (в отличии от α и α_1 в (2)), имеем

$$\prod_{k=1}^{m-1}\prod_{l=k+1}^{m}\beta_k\widehat{\beta}_l \le C_3\prod_{k=1}^{m-1}\prod_{l=k+1}^{m}\left\{\left[\|T_{2^{\nu_k}}\|_p 2^{\nu_k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|T_{2^{\nu_l}}\|_p 2^{\nu_l(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\right]^{\frac{q}{2\mathcal{P}}} 2^{(\nu_k-\nu_l)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha_1})\frac{1}{\mathcal{P}}}\right\} =$$
$$=\prod_{k=1}^{m-1}\prod_{l=k+1}^{m}\left\{\left[\|T_{2^{\nu_k}}\|_p 2^{\nu_k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|T_{2^{\nu_l}}\|_p 2^{\nu_l(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\right]^{\frac{q}{2\mathcal{P}}} 2^{(\nu_k-\nu_l)(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{\alpha})\frac{1}{\mathcal{P}}}\right\} =$$
$$=\prod_{k=1}^{m-1}\prod_{l=k+1}^{m}\left\{\left[\|T_{2^{\nu_k}}\|_p 2^{\nu_k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|T_{2^{\nu_l}}\|_p 2^{\nu_l(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\right]^{\frac{q}{2\mathcal{P}}} 2^{(-\nu_k+\nu_l)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{\mathcal{P}}}\right\}.$$

Тогда

$$\prod_{k=1}^{m-1}\prod_{l=k+1}^{m}\beta_k\widehat{\beta}_l \le C_3\prod_{k=1}^{m}\left\{\|T_{2^{\nu_k}}\|_p^q 2^{\nu_k q(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\prod_{l=1}^{m}2^{-|\nu_k-\nu_l|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{m-1}}\right\}^{\frac{1}{m}}.$$

Теперь получаем

$$J_1 \le \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2}\cdots\sum_{\nu_m=N_1}^{N_2}\prod_{k=1}^{m-1}\prod_{l=k+1}^{m}\beta_k\widehat{\beta}_l \le$$
$$\le C_3\sum_{\nu_1=N_1}^{N_2}\cdots\sum_{\nu_m=N_1}^{N_2}\prod_{k=1}^{m}\left\{\|T_{2^{\nu_k}}\|_p^q 2^{\nu_k q(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\prod_{l=1}^{m}2^{-|\nu_k-\nu_l|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{m-1}}\right\}^{\frac{1}{m}} =$$
$$= C_3\sum_{\nu_1=N_1}^{N_2}\cdots\sum_{\nu_m=N_1}^{N_2}\prod_{k=1}^{m}\left\{\left[\|T_{2^{\nu_k}}\|_p 2^{\nu_k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\right]^{\frac{q}{m}}\prod_{l=1}^{m}2^{-|\nu_k-\nu_l|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{2\mathcal{P}}}\right\}.$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_m=m$, имеем

$$J_1 \le C_3\prod_{k=1}^{m}\left\{\sum_{\nu_1=N_1}^{N_2}\cdots\sum_{\nu_m=N_1}^{N_2}\|T_{2^{\nu_k}}\|_p^q 2^{\nu_k q(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\prod_{l=1}^{m}2^{-|\nu_k-\nu_l|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{m}{2\mathcal{P}}}\right\}^{\frac{1}{m}} \equiv C_3\prod_{k=1}^{m}M_k^{\frac{1}{m}}.$$

Рассмотрим

$$M_k=\sum_{\nu_k=N_1}^{N_2}\|T_{2^{\nu_k}}\|_p^q 2^{\nu_k q(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\sum_{\nu_1=N_1}^{N_2}\cdots\sum_{\nu_{k-1}=N_1}^{N_2}\sum_{\nu_{k+1}=N_1}^{N_2}\cdots\sum_{\nu_m=N_1}^{N_2}\prod_{l=1}^{m}2^{-|\nu_k-\nu_l|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{m-1}} =$$

$$= \sum_{\nu_k=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu_k}}\|_p^q 2^{\nu_k q(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \left[\sum_{\nu=N_1}^{N_2} 2^{-|\nu_k-\nu|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{m-1}}\right]^{m-1} \leq$$

$$\leq \sum_{\nu_k=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu_k}}\|_p^q 2^{\nu_k q(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \left[\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} 2^{-|\lambda|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{m-1}}\right]^{m-1} \leq C_4 \sum_{\nu_k=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu_k}}\|_p^q 2^{\nu_k q(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Таким образом,

$$J \leq C_5 \left(\left\{\prod_{k=1}^{m} \sum_{\nu_k=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu_k}}\|_p^q 2^{\nu_k q(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\right\}^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{q}} = C_5 \left(\sum_{\nu=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu}}\|_p^q 2^{\nu q(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

b) Пусть $1 \leq p < q = \infty$. Тогда, применяя свойства нормы функции и неравенство Никольского, имеем

$$J = \left\|\sum_{\nu=N_1}^{N_2} T_{2^{\nu}}\right\|_q \leq \sum_{\nu=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu}}(x)\|_\infty \leq C \sum_{\nu=N_1}^{N_2} 2^{\nu\frac{1}{p}} \|T_{2^{\nu}}(x)\|_p. \qquad \square$$

2. Обозначим через $L_{p_1p_2}$, $1 \leq p_i \leq \infty$, $i = 1, 2$, множество измеримых функций двух переменных $f(x_1, x_2)$, 2π-периодических по каждому переменному, для которых $\|f\|_{p_1,p_2} = \|\{\|f\|_{p_1}\}\|_{p_2} < \infty$, где $\|F\|_{p_i} = \left(\int\limits_0^{2\pi} |F|^{p_i} dx_i\right)^{\frac{1}{p_i}}$, если $1 \leq p_i < \infty$, $\|F\|_{p_i} = \sup\limits_{0\leq x_i\leq 2\pi} \mathrm{vrai}\,|F|$, если $p_i = \infty$.

Лемма 2 (неравенство Никольского [4], с. 133; [5])**.** *Пусть $T_{n_1n_2}(x_1, x_2)$ — тригонометрический полином порядка n_1 по переменной x_1 и порядка n_2 $(n_1, n_2 \in \mathbb{N})$ по переменной x_2, $1 \leq p_i \leq q_i \leq \infty$ $(i = 1, 2)$. Тогда*

$$\|T_{n_1n_2}(x_1, x_2)\|_{q_1q_2} \leq C n_1^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}} n_2^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}} \|T_{n_1,n_2}(x_1, x_2)\|_{p_1p_2},$$

где постоянная C не зависит от n_1 и n_2.

В работе получены следующие обобщения неравенства Никольского.

Теорема 2. *Пусть функция $T_{2^{n_1},\infty} \in L_{p_1p_2}$, $1 \leq p_i \leq \infty$ $(i = 1, 2)$, и является тригонометрическим полиномом порядка 2^{n_1} по переменной x_1, $1 \leq p_1 < q_1 \leq \infty$, $q_1^* = q_1$, если $q_1 < \infty$, $q_1^* = 1$, если $q_1 = \infty$. Тогда*

$$\left\|\sum_{n_1=N_1}^{N_2} T_{2^{n_1},\infty}\right\|_{q_1p_2} \leq C\left(\sum_{n_1=N_1}^{N_2} 2^{n_1q_1^*(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})} \|T_{2^{n_1},\infty}\|_{p_1p_2}^{q_1^*}\right)^{\frac{1}{q_1^*}},$$

где постоянная C не зависит от N_1, N_2 и $T_{2^{n_1},\infty}$.

Доказательство. a) Пусть $1 \leq p_1 < q_1 < \infty$ и $1 \leq p_2 < \infty$, тогда $q_1^* = q_1$. Обозначим $[q_1] + 1 = m$, где $[a]$ — целая часть числа a, $\mathcal{P} = \frac{1}{2}m(m-1)$. Тогда

$$J_1 \equiv \left\|\sum_{n_1=N_1}^{N_2} T_{2^{n_1},\infty}\right\|_{q_1p_2} = \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left|\sum_{\nu=N_1}^{N_2} T_{2^{\nu},\infty}\right|^{q_1} dx_1\right)^{\frac{p_2}{q_1}} dx_2\right)^{\frac{1}{p_2}} \leq$$

$$\leq \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=N_1}^{N_2} |T_{2^\nu,\infty}| \right)^{q_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{q_1}} dx_2 \right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

Рассмотрим

$$B_1 = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=N_1}^{N_2} |T_{2^\nu,\infty}| \right)^{q_1} dx_1 = \int_0^{2\pi} \left[\left(\sum_{\nu=N_1}^{N_2} |T_{2^\nu,\infty}| \right)^{\frac{q_1}{m}} \right]^m dx_1.$$

В силу неравенства (1)

$$B_1 \leq \int_0^{2\pi} \left[\sum_{\nu=N_1}^{N_2} |T_{2^\nu,\infty}|^{\frac{q_1}{m}} \right]^m dx_1 = \int_0^{2\pi} \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^{m} |T_{2^{\nu_k},\infty}|^{\frac{q_1}{m}} dx_1 =$$

$$= \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^{m} |T_{2^{\nu_k},\infty} T_{2^{\nu_l},\infty}|^{\frac{q_1}{m(m-1)}} dx_1.$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$, где $\mathcal{P} = \frac{1}{2}m(m-1)$, получаем

$$B_1 \leq \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^{m} \left(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_k},\infty} T_{2^{\nu_l},\infty}|^{\frac{q_1}{2}} dx_1 \right)^{\frac{1}{\mathcal{P}}}.$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $\alpha = \frac{q_1+p_1}{p_1}$ и $\alpha_1 = \frac{q_1+p_1}{q_1}$, получаем

$$B_1 \leq \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^{m} \left(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_k},\infty}|^{\frac{q_1\alpha}{2}} dx_1 \right)^{\frac{1}{\alpha\mathcal{P}}} \left(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_l},\infty}|^{\frac{q_1\alpha_1}{2}} dx_1 \right)^{\frac{1}{\alpha_1\mathcal{P}}} \equiv$$

$$\equiv \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^{m} a_k \widehat{a}_l = \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^{m} a_k^{m-k} \widehat{a}_k^{k-1} = \prod_{k=1}^{m} \sum_{\nu_k=N_1}^{N_2} a_k^{m-k} \widehat{a}_k^{k-1}. \quad (3)$$

Тогда

$$J_1^{p_2} \leq \int_0^{2\pi} \left(\prod_{k=1}^{m} \sum_{\nu_k=N_1}^{N_2} a_k^{m-k} \widehat{a}_k^{k-1} \right)^{\frac{p_2}{q_1}} dx_2.$$

Согласно неравенству Гёльдера с показателями $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = m$ имеем

$$J_1^{p_2} \leq \prod_{k=1}^{m} \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\sum_{\nu_k=N_1}^{N_2} a_k^{m-k} \widehat{a}_k^{k-1} \right]^{\frac{p_2 m}{q_1}} dx_2 \right\}^{\frac{1}{m}}.$$

Ввиду неравенства Минковского

$$J_1^{p_2} \leq \prod_{k=1}^{m} \left\{ \sum_{\nu_k=N_1}^{N_2} \left[\int_0^{2\pi} \left(a_k^{m-k} \widehat{a}_k^{k-1} \right)^{\frac{p_2 m}{q_1}} dx_2 \right]^{\frac{q_1}{p_2 m}} \right\}^{\frac{p_2}{q_1}} =$$

$$= \left\{ \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \cdots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^{m} \left[\int_0^{2\pi} \left(a_k^{m-k} \widehat{a}_k^{k-1} \right)^{\frac{p_2 m}{q_1}} dx_2 \right]^{\frac{q_1}{p_2 m}} \right\}^{\frac{p_2}{q_1}} \equiv \left\{ \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \cdots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} A_{\nu_1 \ldots \nu_m} \right\}^{\frac{p_2}{q_1}}. \tag{4}$$

В силу неравенства Гёльдера с показателями $\alpha_1 = \frac{m-1}{m-k}$ и $\alpha_2 = \frac{m-1}{k-1}$

$$A_{\nu_1 \ldots \nu_m} \leq \prod_{k=1}^{m} \left(\int_0^{2\pi} a_k^{\frac{p_2 m(m-1)}{q_1}} dx_2 \right)^{\frac{q_1}{p_2 m} \frac{m-k}{m-1}} \left(\int_0^{2\pi} \widehat{a}_k^{\frac{p_2 m(m-1)}{q_1}} dx_2 \right)^{\frac{q_1}{p_2 m} \frac{k-1}{m-1}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^{m} \left[\left(\int_0^{2\pi} a_k^{\frac{p_2 m(m-1)}{q_1}} dx_2 \right)^{\frac{q_1}{p_2 m(m-1)}} \left(\int_0^{2\pi} \widehat{a}_l^{\frac{p_2 m(m-1)}{q_1}} dx_2 \right)^{\frac{q_1}{p_2 m(m-1)}} \right] \equiv \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^{m} \gamma_k \widehat{\gamma}_l.$$

Оценим γ_k и $\widehat{\gamma}_l$. Применяя неравенство Никольского, имеем

$$\gamma_k = \left(\int_0^{2\pi} a_k^{\frac{p_2 m(m-1)}{q_1}} dx_2 \right)^{\frac{q_1}{p_2 m(m-1)}} = \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_k},\infty}|^{\frac{q_1 \alpha}{2}} dx_1 \right)^{\frac{1}{\alpha \mathcal{P}} \frac{p_2 m(m-1)}{q_1}} dx_2 \right)^{\frac{q_1}{p_2 m(m-1)}} =$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_k},\infty}|^{\frac{q_1 \alpha}{2}} dx_1 \right)^{\frac{2p_2}{\alpha q_1}} dx_2 \right)^{\frac{q_1}{2p_2 \mathcal{P}}} = \|T_{2^{\nu_k},\infty}\|_{\frac{\alpha q_1}{2}, p_2}^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} \leq$$

$$\leq C_1 \left\{ \|T_{2^{\nu_k},\infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_k \left(\frac{1}{p_1} - \frac{2}{q_1 \alpha}\right)} \right\}^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} = C_1 \left\{ \|T_{2^{\nu_k},\infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_k \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right)} 2^{\nu_k \left(\frac{1}{q_1} - \frac{2}{q_1 \alpha}\right)} \right\}^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} =$$

$$= C_1 \left\{ \|T_{2^{\nu_k},\infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_k \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right)} \right\}^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} 2^{\nu_k \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{1}{\mathcal{P}}}, \tag{5}$$

$$\widehat{\gamma}_l = \left(\int_0^{2\pi} \widehat{a}_l^{\frac{p_2 m(m-1)}{q_1}} dx_2 \right)^{\frac{q_1}{p_2 m(m-1)}} = \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_l},\infty}|^{\frac{q_1 \alpha_1}{2}} dx_1 \right)^{\frac{1}{\alpha_1 \mathcal{P}} \frac{p_2 m(m-1)}{q_1}} dx_2 \right)^{\frac{q_1}{p_2 m(m-1)}} =$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_l},\infty}|^{\frac{q_1 \alpha_1}{2}} dx_1 \right)^{\frac{2p_2}{\alpha_1 q_1}} dx_2 \right)^{\frac{q_1}{2p_2 \mathcal{P}}} = \|T_{2^{\nu_l},\infty}\|_{\frac{\alpha_1 q_1}{2}, p_2}^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} \leq$$

$$\leq C_2 \left\{ \|T_{2^{\nu_l},\infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_l \left(\frac{1}{p_1} - \frac{2}{q_1 \alpha_1}\right)} \right\}^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} = C_2 \left\{ \|T_{2^{\nu_l},\infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_l \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right)} 2^{\nu_l \left(\frac{1}{q_1} - \frac{2}{q_1 \alpha_1}\right)} \right\}^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} =$$

$$= C_2 \left\{ \|T_{2^{\nu_l},\infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_l \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right)} \right\}^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} 2^{\nu_l \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) \frac{1}{\mathcal{P}}} = C_2 \left\{ \|T_{2^{\nu_l},\infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_l \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right)} \right\}^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} 2^{\nu_l \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{\alpha}\right) \frac{1}{\mathcal{P}}} =$$

$$= C_2 \left\{ \|T_{2^{\nu_l},\infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_l \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right)} \right\}^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} 2^{-\nu_l \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{1}{\mathcal{P}}}. \tag{6}$$

Тогда для величины $A_{\nu_1 \ldots \nu_m}$ (см. (4)), используя неравенства (5) и (6), имеем

$$A_{\nu_1 \ldots \nu_m} \leq C_2 \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^{m} \left[\|T_{2^{\nu_k},\infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_k \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right)} \|T_{2^{\nu_l},\infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_l \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right)} \right]^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} 2^{(\nu_k - \nu_l)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{1}{\mathcal{P}}}.$$

Если $\nu_k \le \nu_l$, то

$$A_{\nu_1\dots\nu_m} \le C_2 \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^{m} \left[\|T_{2^{\nu_k},\infty}\|_{p_1p_2} 2^{\nu_k(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})} \|T_{2^{\nu_l},\infty}\|_{p_1p_2} 2^{\nu_l(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})}\right]^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} 2^{(\nu_k-\nu_l)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{\mathcal{P}}}.$$

Если $\nu_k > \nu_l$, то в формуле (3) в силу неравенства Гёльдера с показателями α_1 и α (а было по α и α_1)

$$A_{\nu_1\dots\nu_m} \le C_2 \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^{m} \left[\|T_{2^{\nu_k},\infty}\|_{p_1p_2} 2^{\nu_k(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})} \|T_{2^{\nu_l},\infty}\|_{p_1p_2} 2^{\nu_l(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})}\right]^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} 2^{(-\nu_k+\nu_l)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{\mathcal{P}}}.$$

Следовательно,

$$A_{\nu_1\dots\nu_m} \le C_2 \prod_{k=1}^{m} \left\{ \left[\|T_{2^{\nu_k},\infty}\|_{p_1p_2} 2^{\nu_k(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})}\right]^{\frac{q_1}{m}} \prod_{l=1}^{m} 2^{-|\nu_k-\nu_l|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{2\mathcal{P}}} \right\}.$$

Теперь получаем

$$J_1^{q_1} \le \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} A_{\nu_1\dots\nu_m} \le$$
$$\le C_2 \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^{m} \left\{ \left[\|T_{2^{\nu_k},\infty}\|_{p_1p_2} 2^{\nu_k(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})}\right]^{\frac{q_1}{m}} \prod_{l=1}^{m} 2^{-|\nu_k-\nu_l|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{2\mathcal{P}}} \right\}.$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = m$, имеем

$$J_1^{q_1} \le C_2 \prod_{k=1}^{m} \left\{ \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu_k},\infty}\|_{p_1p_2}^{q_1} 2^{\nu_k q_1(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})} \prod_{l=1}^{m} 2^{-|\nu_k-\nu_l|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{m}{2\mathcal{P}}} \right\}^{\frac{1}{m}} \equiv C_2 \prod_{k=1}^{m} M_k^{\frac{1}{m}}. \tag{7}$$

Оценим

$$M_k = \sum_{\nu_k=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu_k},\infty}\|_{p_1p_2}^{q_1} 2^{\nu_k q_1(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})} \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_{k-1}=N_1}^{N_2} \sum_{\nu_{k+1}=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{l=1}^{m} 2^{-|\nu_k-\nu_l|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{m-1}} =$$
$$= \sum_{\nu_k=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu_k},\infty}\|_{p_1p_2}^{q_1} 2^{\nu_k q_1(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})} \left[\sum_{\nu=N_1}^{N_2} 2^{-|\nu_k-\nu|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{m-1}} \right]^{m-1} \le$$
$$\le \sum_{\nu_k=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu_k},\infty}\|_{p_1p_2}^{q_1} 2^{\nu_k q_1(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})} \left[\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} 2^{-|\lambda|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{m-1}} \right]^{m-1} \le C_3 \sum_{\nu_k=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu_k},\infty}\|_{p_1p_2}^{q_1} 2^{\nu_k q_1(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})}. \tag{8}$$

Таким образом, из (7) и (8) получаем

$$J_1 \le C_4 \left(\left\{ \prod_{k=1}^{m} \sum_{\nu_k=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu_k},\infty}\|_{p_1p_2}^{q_1} 2^{\nu_k q_1(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})} \right\}^{\frac{1}{m}} \right)^{\frac{1}{q_1}} = C_4 \left(\sum_{\nu=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu},\infty}\|_{p_1p_2}^{q_1} 2^{\nu q_1(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})} \right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

b) Пусть $q_1 = p_2 = \infty$. Применяя неравенство Никольского, получаем

$$J_1 \equiv \max_{x_1,x_2} \Big| \sum_{\nu=N_1}^{N_2} T_{2^\nu,\infty} \Big| \le \sum_{\nu=N_1}^{N_2} \|T_{2^\nu,\infty}\|_{q_1 p_2} \le C \sum_{\nu=N_1}^{N_2} 2^{\nu \frac{1}{p_1}} \|T_{2^\nu,\infty}\|_{p_1 p_2}.$$

c) Пусть $1 \le p_1 < q_1 = \infty, 1 \le p_2 < \infty$. Введем обозначение

$$J_1 = \Big\| \sum_{\nu=N_1}^{N_2} T_{2^\nu,\infty} \Big\|_{\infty,p_2} = \left(\int_0^{2\pi} \left(\max_{x_1} \Big| \sum_{\nu=N_1}^{N_2} \Delta_{\nu\infty} \Big| \right)^{p_2} dx_2 \right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

Отсюда

$$J_1^{p_2} \le \int_0^{2\pi} \left(\max_{x_1} \sum_{\nu=N_1}^{N_2} |T_{2^\nu,\infty}| \right)^{p_2} dx_2 \le \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=N_1}^{N_2} \max_{x_1} |T_{2^\nu,\infty}| \right)^{p_2} dx_2.$$

В силу неравенства Минковского

$$J_1 \le \sum_{\nu=N_1}^{N_2} \left(\int_0^{2\pi} \left(\max_{x_1} |T_{2^\nu,\infty}| \right)^{p_2} dx_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} = \sum_{\nu=N_1}^{N_2} \|T_{2^\nu,\infty}\|_{\infty,p_2}.$$

Применяя неравенство Никольского, получаем

$$J_1 \le C_1 \sum_{\nu=N_1}^{N_2} 2^{\nu \frac{1}{p_1}} \|T_{2^\nu,\infty}\|_{p_1 p_2}.$$

d) Пусть $1 \le p_1 < q_1 < \infty$, $p_2 = \infty$,

$$J \equiv \Big\| \sum_{\nu=N_1}^{N_2} T_{2^\nu,\infty} \Big\|_{q_1 p_2} = \max_{x_2} \left(\int_0^{2\pi} \Big| \sum_{\nu=N_1}^{N_2} T_{2^\nu,\infty}(x_1,x_2) \Big|^{q_1} dx_1 \right)^{\frac{1}{q_1}} \le$$

$$\le \max_{x_2} \left(\int_0^{2\pi} \Big(\sum_{\nu=N_1}^{N_2} |T_{2^\nu,\infty}(x_1,x_2)| \Big)^{q_1} dx_1 \right)^{\frac{1}{q_1}}. \quad (9)$$

Оценим интеграл

$$J_1(x_2) \equiv \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{\nu=N_1}^{N_2} |T_{2^\nu,\infty}(x_1,x_2)| \Big)^{q_1} dx_1 = \int_0^{2\pi} \left[\Big(\sum_{\nu=N_1}^{N_2} |T_{2^\nu,\infty}(x_1,x_2)| \Big)^{\frac{q_1}{m}} \right]^m dx_1,$$

где, как и в п. а), $m = [q_1] + 1$.

Согласно неравенству (1)

$$J_1(x_2) \le \int_0^{2\pi} \left[\sum_{\nu=N_1}^{N_2} |T_{2^\nu,\infty}|^{\frac{q_1}{m}} \right]^m dx_1 = \int_0^{2\pi} \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \cdots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^{m} |T_{2^{\nu_k},\infty}|^{\frac{q_1}{m}} dx_1 =$$

$$= \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \cdots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^{m} |T_{2^{\nu_k},\infty} T_{2^{\nu_l},\infty}|^{\frac{q_1}{m(m-1)}} dx_1.$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$, где $\mathcal{P} = \frac{1}{2}m(m-1)$, получаем

$$J_1(x_2) \le \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^{m} \left(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_k},\infty} T_{2^{\nu_l},\infty}|^{\frac{q_1}{2}} dx_1 \right)^{\frac{1}{\mathcal{P}}}.$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $\alpha = \frac{q_1+p_1}{p_1}$ и $\alpha_1 = \frac{q_1+p_1}{q_1}$, имеем

$$J_1(x_2) \le \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^{m} \left(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_k},\infty}|^{\frac{q_1\alpha}{2}} dx_1 \right)^{\frac{1}{\alpha\mathcal{P}}} \left(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_l},\infty}|^{\frac{q_1\alpha_1}{2}} dx_1 \right)^{\frac{1}{\alpha_1\mathcal{P}}} \equiv$$
$$\equiv \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^{m} \beta_k \widehat{\beta}_l. \quad (10)$$

Оценим β_k. В силу неравенства Никольского имеем

$$\beta_k = \left(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_k},\infty}|^{\frac{q_1\alpha}{2}} dx \right)^{\frac{1}{\alpha\mathcal{P}}} \le \|T_{2^{\nu_k},\infty}\|_{\frac{\alpha q_1}{2},\infty}^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} \le C_1 \Big\{ \|T_{2^{\nu_k},\infty}\|_{p_1,\infty} 2^{\nu_k(\frac{1}{p_1} - \frac{2}{\alpha q_1})} \Big\}^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}},$$

аналогично,

$$\widehat{\beta}_l \le C_2 \Big\{ \|T_{2^{\nu_l},\infty}\|_{p_1,\infty} 2^{\nu_k(\frac{1}{p_1} - \frac{2}{\alpha_1 q_1})} \Big\}^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}},$$

где постоянные C_1 и C_2 не зависят от ν_k, ν_l. Тогда

$$\prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^{m} \beta_k \widehat{\beta}_l \le C_3 \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^{m} \left\{ \left[\|T_{2^{\nu_k},\infty}\|_{p_1p_2} 2^{\nu_k(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \|T_{2^{\nu_l},\infty}\|_{p_1p_2} 2^{\nu_l(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \right]^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} 2^{(\nu_k-\nu_l)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{\mathcal{P}}} \right\}.$$

Меняя роль β_k и $\widehat{\beta}_l$ и проведя аналогичные рассуждения, приходим к неравенству

$$\prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^{m} \beta_k \widehat{\beta}_l \le C_3 \prod_{k=1}^{m} \left\{ \|T_{2^{\nu_k},\infty}\|_{p_1p_2}^{q_1} 2^{\nu_k q_1(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \prod_{l=1}^{m} 2^{-|\nu_k-\nu_l|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{m-1}} \right\}^{\frac{1}{m}}.$$

Отсюда на основании (10) получаем оценку

$$J_1(x_2) \le \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^{m} \beta_k \widehat{\beta}_l \le$$
$$\le C_3 \prod_{k=1}^{m} \left\{ \|T_{2^{\nu_k},\infty}\|_{p_1p_2}^{q_1} 2^{\nu_k q_1(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \prod_{l=1}^{m} 2^{-|\nu_k-\nu_l|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{m-1}} \right\}^{\frac{1}{m}}.$$

Применяя теперь неравенство Гёльдера с показателями $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = m$ и проводя оценки, как в случае а), получаем

$$J_1(x_2) \le C_4 \sum_{\nu=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu},\infty}\|_{p_1p_2}^{q_1} 2^{\nu q_1(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})}.$$

Отсюда и из (9) имеем

$$J \le C_5 \left(\sum_{\nu=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu},\infty}\|_{p_1p_2}^{q_1} 2^{\nu q_1(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \right)^{\frac{1}{q_1}}. \qquad \square$$

Теорема 3. *Пусть функция $T_{\infty,2^{n_2}} \in L_{p_1p_2}$, $1 \le p_i \le \infty$ $(i = 1, 2)$, и является тригонометрическим полиномом порядка 2^{n_2} по переменной x_2, $1 \le p_2 < q_2 \le \infty$, $q_2^* = q_2$, если $q_2 < \infty$, $q_2^* = 1$, если $q_2 = \infty$. Тогда*

$$\Big\| \sum_{n_2=M_1}^{M_2} T_{\infty,2^{n_2}} \Big\|_{p_1q_2} \le C \left(\sum_{n_2=M_1}^{M_2} 2^{n_2q_2^*(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2})} \|T_{\infty,2^{n_2}}\|_{p_1p_2}^{q_2^*} \right)^{\frac{1}{q_2^*}},$$

где постоянная C не зависит от M_1, M_2 и $T_{\infty,2^{n_2}}$.

Доказательство. а) Пусть $1 \le p_2 < q_2 < \infty$. Тогда при $1 \le p_1 < \infty$

$$J_1 \equiv \Big\| \sum_{\mu=M_1}^{M_2} T_{\infty,2^{\mu}} \Big\|_{p_1q_2}^{q_2} \le \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \Big(\sum_{\mu=M_1}^{M_2} |T_{\infty,2^{\mu}}(x_1,x_2)| \Big)^{p_1} dx_1 \right]^{\frac{q_2}{p_1}} dx_2 =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \Big[\Big(\sum_{\mu=M_1}^{M_2} |T_{\infty,2^{\mu}}(x_1,x_2)| \Big)^{\frac{p_1}{m}} \Big]^m dx_1 \right\}^{\frac{q_2}{p_1}} dx_2,$$

где $m = [p_1] + 1$.

Возведя в степень m, получаем

$$J_1 \le \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \Big[\Big(\sum_{\mu=M_1}^{M_2} |T_{\infty,2^{\mu}}(x_1,x_2)| \Big)^{\frac{p_1}{m}} \Big]^m dx_1 \right\}^{\frac{q_2}{p_1}} dx_2 =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{\mu_1=M_1}^{M_2} \cdots \sum_{\mu_m=M_1}^{M_2} \int_0^{2\pi} \Big(\prod_{i=1}^{m} |T_{\infty,2^{\mu_i}}(x_1,x_2)| \Big)^{\frac{p_1}{m}} dx_1 \right\}^{\frac{q_2}{p_1}} dx_2.$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = m$, имеем

$$J_1 \le \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{\mu_1=M_1}^{M_2} \cdots \sum_{\mu_m=M_1}^{M_2} \prod_{i=1}^{m} \Big(\int_0^{2\pi} |T_{\infty,2^{\mu_i}}(x_1,x_2)|^{p_1} dx_1 \Big)^{\frac{1}{m}} \right\}^{\frac{q_2}{p_1}} dx_2.$$

1) Если $q_2/p_1 \le 1$, то в силу неравенства (1)

$$J_1 \le \sum_{\mu_1=M_1}^{M_2} \cdots \sum_{\mu_m=M_1}^{M_2} \int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^{m} \Big(\int_0^{2\pi} |T_{\infty,2^{\mu_i}}(x_1,x_2)|^{p_1} dx_1 \Big)^{\frac{q_2}{mp_1}} dx_2. \tag{11}$$

2) Если $q_2/p_1 > 1$, то, обозначая $[q_2/p_1] + 1 = \gamma$, имеем

$$J_1 \le \int_0^{2\pi} \left[\left\{ \sum_{\mu_1=M_1}^{M_2} \cdots \sum_{\mu_m=M_1}^{M_2} \prod_{i=1}^{m} \Big(\int_0^{2\pi} |T_{\infty,2^{\mu_i}}(x_1,x_2)|^{p_1} dx_1 \Big)^{\frac{1}{m}} \right\}^{\frac{q_2}{p_1\gamma}} \right]^{\gamma} dx_2.$$

Далее, ввиду неравенства (1)

$$J_1 \le \int_0^{2\pi} \left[\sum_{\mu_1=M_1}^{M_2} \cdots \sum_{\mu_m=M_1}^{M_2} \prod_{i=1}^{m} \Big(\int_0^{2\pi} |T_{\infty,2^{\mu_i}}(x_1,x_2)|^{p_1} dx_1 \Big)^{\frac{q_2}{p_1\gamma m}} \right]^{\gamma} dx_2 =$$

$$= \sum_{\mu_1^{(1)}=M_1}^{M_2} \dots \sum_{\mu_m^{(1)}=M_1}^{M_2} \sum_{\mu_1^{(2)}=M_1}^{M_2} \dots \sum_{\mu_m^{(2)}=M_1}^{M_2} \dots$$

$$\dots \sum_{\mu_1^{(\gamma)}=M_1}^{M_2} \dots \sum_{\mu_m^{(\gamma)}=M_1}^{M_2} \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^{m} \prod_{i_k=1}^{\gamma} \Big(\int_0^{2\pi} |T_{\infty,2^{\mu_i}}(x_1,x_2)|^{p_1} dx_1 \Big)^{\frac{q_2}{p_1 \gamma m}} dx_2.$$

Обозначая $\gamma m = m_1$, получаем

$$J_1 \le \sum_{\mu_1=M_1}^{M_2} \dots \sum_{\mu_{m_1}=M_1}^{M_2} \int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^{m_1} \Big(\int_0^{2\pi} |T_{\infty,2^{\mu_i}}(x_1,x_2)|^{p_1} dx_1 \Big)^{\frac{q_2}{p_1 m_1}} dx_2.$$

Теперь очевидно, что дальнейшие оценки для J_1 в случаях 1) и 2) должны быть одинаковыми с той лишь разницей, что в случае 1) участвует число m, а в случае 2) — число m_1. Поэтому оценки для J_1 проведем при $q_2/p_1 \le 1$.

Оценим интеграл

$$J_2 \equiv \int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^{m} \Big(\int_0^{2\pi} |T_{\infty,2^{\mu_i}}(x_1,x_2)|^{p_1} dx_1 \Big)^{\frac{q_2}{m p_1}} dx_2 =$$

$$= \int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=i+1}^{m} \Big(\int_0^{2\pi} |T_{\infty,2^{\mu_i}}(x_1,x_2)|^{p_1} dx_1 \Big)^{\frac{q_2}{m(m-1)p_1}} \Big(\int_0^{2\pi} |T_{\infty,2^{\mu_j}}(x_1,x_2)|^{p_1} dx_1 \Big)^{\frac{q_2}{m(m-1)p_1}} dx_2.$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$, где $\mathcal{P} = \frac{1}{2}m(m-1)$, имеем

$$J_2 \le \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=i+1}^{m} \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\Big(\int_0^{2\pi} |T_{\infty,2^{\mu_i}}(x_1,x_2)|^{p_1} dx_1 \Big) \Big(\int_0^{2\pi} |T_{\infty,2^{\mu_j}}(x_1,x_2)|^{p_1} dx_1 \Big) \right]^{\frac{q_2}{2p_1}} dx_2 \right\}^{\frac{1}{\mathcal{P}}}.$$

Применяя затем неравенство Гёльдера с показателями $\beta = \frac{q_2+p_2}{p_2}$ и $\beta_1 = \frac{q_2+p_2}{q_2}$, находим

$$J_2 \le \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=i+1}^{m} \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} |T_{\infty,2^{\mu_i}}(x_1,x_2)|^{p_1} dx_1 \right]^{\frac{q_2\beta}{2p_1}} dx_2 \right\}^{\frac{1}{\beta\mathcal{P}}} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} |T_{\infty,2^{\mu_j}}(x_1,x_2)|^{p_1} dx_1 \right]^{\frac{q_2\beta_1}{2p_1}} dx_2 \right\}^{\frac{1}{\beta_1\mathcal{P}}} \equiv \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=i+1}^{m} \lambda_i \widehat{\lambda} j. \quad (12)$$

Оценим λ_i и $\widehat{\lambda} j$. В силу неравенства Никольского имеем

$$\lambda_i = \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} |T_{\infty,2^{\mu_i}}(x_1,x_2)|^{p_1} dx_1 \right]^{\frac{q_2\beta}{2p_1}} dx_2 \right\}^{\frac{1}{\beta\mathcal{P}}} = \|T_{\infty,2^{\mu_i}}\|_{p_1,\frac{q_2\beta}{2}}^{\frac{q_2}{2\mathcal{P}}} \le$$

$$\le C_1 \left\{ \|T_{\infty,2^{\mu_i}}\|_{p_1,p_2} 2^{\mu_i(\frac{1}{p_2}-\frac{2}{\beta q_2})} \right\}^{\frac{q_2}{2\mathcal{P}}} = C_1 \left\{ \|T_{\infty,2^{\mu_i}}\|_{p_1,p_2} 2^{\mu_i(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2})} 2^{\mu_i(\frac{1}{q_2}-\frac{2}{\beta q_2})} \right\}^{\frac{q_2}{2\mathcal{P}}} =$$

$$= C_1 \left\{ \|T_{\infty,2^{\mu_i}}\|_{p_1,p_2} 2^{\mu_i(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2})} \right\}^{\frac{q_2}{2\mathcal{P}}} 2^{\mu_i(\frac{1}{2}-\frac{2}{\beta})\frac{1}{\mathcal{P}}}. \quad (13)$$

Аналогично,

$$\widehat{\lambda}_j \le C_2\Big\{\|T_{\infty,2^{\mu_j}}\|_{p_1,p_2} 2^{\mu_j(\frac{1}{p_2}-\frac{2}{\beta_1 q_2})}\Big\}^{\frac{q_2}{2\mathcal{P}}} = C_2\left\{\|T_{\infty,2^{\mu_j}}\|_{p_1 p_2} 2^{\mu_j(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2})}\right\}^{\frac{q_2}{2\mathcal{P}}} 2^{\mu_j(\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta_1})\frac{1}{\mathcal{P}}} =$$

$$= C_2\left\{\|T_{\infty,2^{\mu_j}}\|_{p_1,p_2} 2^{\mu_j(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2})}\right\}^{\frac{q_2}{2\mathcal{P}}} 2^{\mu_j(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{\beta})\frac{1}{\mathcal{P}}} = C_2\left\{\|T_{\infty,2^{\mu_j}}\|_{p_2} 2^{\mu_j(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2})}\right\}^{\frac{q_2}{2\mathcal{P}}} 2^{-\mu_j(\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta})\frac{1}{\mathcal{P}}}, \tag{14}$$

где постоянные C_1 и C_2 не зависят от ν_k, ν_l.

Тогда, подставляя в соотношение (12) неравенства (13) и (14), получаем

$$J_2 \le C_3 \prod_{i=1}^{m-1}\prod_{j=i+1}^{m}\left\{\left[\|T_{\infty,2^{\mu_i}}\|_{p_1,p_2} 2^{\mu_i(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2})}\|T_{\infty,2^{\mu_j}}\|_{p_1,p_2} 2^{\mu_j(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2})}\right]^{\frac{q_2}{2\mathcal{P}}} 2^{(\mu_i-\mu_j)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta})\frac{1}{\mathcal{P}}}\right\}.$$

Можно провести аналогичные рассуждения, меняя роль λ_i и $\widehat{\lambda}_j$. Тем самым приходим к неравенству

$$J_2 \le C_3 \prod_{i=1}^{m-1}\prod_{j=i+1}^{m}\left\{\left[\|T_{\infty,2^{\mu_i}}\|_{p_1,p_2} 2^{\mu_i(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2})}\|T_{\infty,2^{\mu_j}}\|_{p_1,p_2} 2^{\mu_j(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2})}\right]^{\frac{q_2}{2\mathcal{P}}} 2^{-|\mu_i-\mu_j|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta})\frac{1}{\mathcal{P}}}\right\}.$$

Отсюда на основании (11)

$$J_1 \le C_3 \sum_{\mu_1=M_1}^{M_2}\cdots\sum_{\mu_m=M_1}^{M_2}\int_0^{2\pi}\prod_{k=1}^{m}\left\{\|T_{\infty,2^{\mu_k}}\|_{p_1,p_2}^{q_2} 2^{\mu_k q_2(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2})}\prod_{l=1}^{m} 2^{-|\mu_k-\mu_l|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta})\frac{1}{m-1}}\right\}^{\frac{1}{m}} =$$

$$= C_3 \sum_{\mu_1=M_1}^{M_2}\cdots\sum_{\mu_m=M_1}^{M_2}\prod_{k=1}^{m}\left\{\left[\|T_{\infty,2^{\mu_k}}\|_{p_1,p_2} 2^{\mu_k(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2})}\right]^{\frac{q_2}{m}}\prod_{l=1}^{m} 2^{-|\mu_k-\mu_l|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta})\frac{1}{2\mathcal{P}}}\right\}.$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = m$, имеем

$$J_1 \le C_3 \prod_{k=1}^{m}\left\{\sum_{\mu_1=M_1}^{M_2}\cdots\sum_{\mu_m=M_1}^{M_2}\|T_{\infty,2^{\mu_k}}\|_{p_1,p_2}^{q_2} 2^{\mu_k q_2(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2})}\prod_{l=1}^{m} 2^{-|\mu_k-\mu_l|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta})\frac{m}{2\mathcal{P}}}\right\}^{\frac{1}{m}} \equiv C_3\prod_{k=1}^{m} M_k^{\frac{1}{m}}. \tag{15}$$

Оценим

$$M_k = \sum_{\mu_k=M_1}^{M_2}\|T_{\infty,2^{\mu_k}}\|_{p_1,p_2}^{q_2} 2^{\mu_k q_2(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2})}\sum_{\mu_1=M_1}^{M_2}\cdots\sum_{\mu_{k-1}=M_1}^{M_2}\sum_{\mu_{k+1}=M_1}^{M_2}\cdots\sum_{\mu_m=M_1}^{M_2}\times$$

$$\times\prod_{l=1}^{m} 2^{-|\mu_k-\mu_l|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta})\frac{1}{m-1}} = \sum_{\mu_k=M_1}^{M_2}\|T_{\infty,2^{\mu_k}}\|_{p_1,p_2}^{q_2} 2^{\mu_k q_2(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2})}\left[\sum_{\mu=M_1}^{M_2} 2^{-|\mu_k-\mu|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta})\frac{1}{m-1}}\right]^{m-1} \le$$

$$\le \sum_{\mu_k=M_1}^{M_2}\|T_{\infty,2^{\mu_k}}\|_{p_1,p_2}^{q_2} 2^{\mu_k q_2(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2})}\left[\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} 2^{-|\lambda|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta})\frac{1}{m-1}}\right]^{m-1} \le$$

$$\le C_4 \sum_{\mu_k=M_1}^{M_2}\|T_{\infty,2^{\mu_k}}\|_{p_1,p_2}^{q_2} 2^{\mu_k q_2(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2})}. \tag{16}$$

Таким образом, из (15), (16) получаем

$$\Big\| \sum_{\mu=M_1}^{M_2} T_{\infty,2^\mu} \Big\|_{p_1,q_2} \le C_5 \left(\left\{ \prod_{k=1}^{m} \sum_{\mu_k=M_1}^{M_2} \|T_{\infty,2^{\mu_k}}\|_{p_1,p_2}^{q_2} 2^{\mu_k q_2 (\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2})} \right\}^{\frac{1}{m}} \right)^{\frac{1}{q_2}} =$$

$$= C_5 \left(\sum_{\mu=M_1}^{M_2} 2^{\mu q_2(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2})} \|T_{\infty,2^\mu}\|_{p_1,p_2}^{q_2} \right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

b) Пусть $1 \le p_2 < q_2 = \infty$. В силу неравенства Никольского при $1 \le p_1 < \infty$ получаем

$$J_1 = \| \sum_{\mu=M_1}^{M_2} T_{\infty,2^\mu} \|_{p_1\infty} \le \max_{0\le x_2 \le 2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \Big(\sum_{\mu=M_1}^{M_2} |T_{\infty,2^\mu}(x_1,x_2)| \Big)^{p_1} dx_1 \right]^{\frac{1}{p_1}} \le$$

$$\le \sum_{\mu=M_1}^{M_2} \max_{0\le x_2\le 2\pi} \left[\int_0^{2\pi} |T_{\infty,2^\mu}(x_1,x_2)|^{p_1} dx_1 \right]^{\frac{1}{p_1}} \le C_1 \sum_{\mu=M_1}^{M_2} 2^{\mu \frac{1}{p_2}} \|T_{\infty,2^\mu}\|_{p_1,p_2}.$$

Доказательство при $p_1 = \infty$ проводится аналогично. □

Теорема 4. *Пусть функция $T_{2^{n_1},2^{n_2}}$ является тригонометрическим полиномом порядка 2^{n_1} по переменной x_1 и порядка 2^{n_2} по переменной x_2, $1 \le p_i < q_i \le \infty$, $q_i^* = q_i$, если $q_i < \infty$, $q_i^* = 1$, если $q_i = \infty$ $(i = 1, 2)$. Тогда*

$$\Big\| \sum_{n_2=M_1}^{M_2} \sum_{n_1=N_1}^{N_2} T_{2^{n_1},2^{n_2}} \Big\|_{q_1q_2} \le C \Big(\sum_{n_2=M_1}^{M_2} 2^{n_2 q_2^*(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2})} \Big(\sum_{n_1=N_1}^{N_2} 2^{n_1 q_1^*(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})} \|T_{2^{n_1},2^{n_2}}\|_{p_1p_2}^{q_1^*} \Big)^{\frac{q_2^*}{q_1^*}} \Big)^{\frac{1}{q_2^*}},$$

где постоянная C не зависит от N_1, N_2, M_1, M_2 и $T_{2^{n_1},2^{n_2}}$.

Доказательство проведем на основании теорем 2 и 3.

Сначала применяем теорему 3 для $p_1 = q_1$:

$$\Big\| \sum_{n_2=M_1}^{M_2} \sum_{n_1=N_1}^{N_2} T_{2^{n_1},2^{n_2}} \Big\|_{q_1q_2} = \Big\| \sum_{n_2=M_1}^{M_2} \Big\{ \sum_{n_1=N_1}^{N_2} T_{2^{n_1},2^{n_2}} \Big\} \Big\|_{q_1q_2} \le$$

$$\le C_1 \left(\sum_{n_2=M_1}^{M_2} 2^{n_2 q_2^*(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2})} \Big\| \Big\{ \sum_{n_1=N_1}^{N_2} T_{2^{n_1},2^{n_2}} \Big\} \Big\|_{q_1p_2}^{q_2^*} \right)^{\frac{1}{q_2^*}},$$

затем к выражению $\Big\| \Big\{ \sum_{n_1=N_1}^{N_2} T_{2^{n_1},2^{n_2}} \Big\} \Big\|_{q_1p_2}^{q_2^*}$ применяем теорему 2:

$$\Big\| \sum_{n_2=M_1}^{M_2} \sum_{n_1=N_1}^{N_2} T_{2^{n_1},2^{n_2}} \Big\|_{q_1q_2} \le C_2 \Big(\sum_{n_2=M_1}^{M_2} 2^{n_2 q_2^*(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2})} \Big(\sum_{n_1=N_1}^{N_2} 2^{n_1 q_1^*(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})} \Big\| T_{2^{n_1},2^{n_2}} \Big\|_{p_1p_2}^{q_1^*} \Big)^{\frac{q_2^*}{q_1^*}} \Big)^{\frac{1}{q_2^*}}.$$

□

Литература

[1] Тиман М.Ф. *Теория приближения функций действительного переменного* (Физматгиз, М., 1960).

[2] Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Полиа Г. *Неравенства* (Ин. лит., М., 1948).

[3] Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения* (Наука, М., 1975).

[4] Никольский С.М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения* (Наука, М., 1977).

[5] Унинский А.П. *Неравенства в смешанной норме для тригонометрических полиномов и целых функций конечной степени*: Матер. Всесоюз. симпозиума по теоремам вложения. Баку, 1966, с. 212–218.

Михаил Константинович Потапов

Московский государственный университет,
ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия,

e-mail: mkpotapov@mail.ru

Борис Витальевич Симонов

Волгоградский государственный технический университет,
пр. Ленина, д. 28, г. Волгоград, 400005, Россия,

e-mail: simonov-b2002@yandex.ru

M.K. Potapov and B.V. Simonov

Nikolskii inequalities for trigonometric polynomes in different metrics

Abstract. S.M. Nikolskii inequalities for trigonometric polynomes in different metrics are well-known. We generalize the inequalities for the sums of trigonometric polynomes.

Keywords: Nikolskii inequality, metric, trigonometric polynomes.

Mikhail Konstantinovich Potapov

Moscow State University,
GSP-1, Leninskiye Gory, Moscow, 119991 Russia,

e-mail: mkpotapov@mail.ru

Boris Vital'evich Simonov

Volgograd State Technical University,
28 Lenin Ave., Volgograd, 400005 Russia,

e-mail: simonov-b2002@yandex.ru