УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 2 Физико-математические науки *2009*

УДК 519.95

О НАДЕЖНОСТИ СХЕМ В БАЗИСАХ, СОДЕРЖАЩИХ ФУНКЦИИ НЕ БОЛЕЕ ЧЕМ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

М.А. Алехина, А.В. Васин

Аннотация

Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных элементов в полном базисе B, содержащем функции не более чем трех переменных. Предполагается, что базисные элементы подвержены инверсным неисправностям на выходах, переходят в неисправные состояния независимо друг от друга с вероятностью ε ($\varepsilon \in (0;1/2)$). Найдено множество G функций, существенно зависящих от трех переменных, и доказано, что для почти всех функций ненадежность асимптотически оптимальных схем равна ε (при $\varepsilon \to 0$) тогда и только тогда, когда $G \cap B \neq \emptyset$.

Ключевые слова: ненадежные функциональные элементы, оптимальные схемы, инверсные неисправности, реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов, синтез надежных схем.

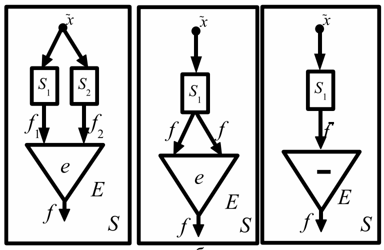
1. Необходимые понятия и вспомогательные утверждения

Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов (ФЭ) в произвольном полном конечном базисе B. Предполагается, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью ε ($\varepsilon \in (0;1/2)$) подвержены инверсным неисправностям на выходах (так же, как у Дж. фон Неймана [1]). Эти неисправности характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему булеву функцию e, а в неисправном – функцию $\bar{e}$.

Считаем, что схема из ненадежных элементов реализует булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если при поступлении на входы схемы набора $\widetilde{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ при отсутствии неисправностей в схеме на ее выходе появляется значение $f(\widetilde{a})$. Обозначим через $P_{\overline{f(\widetilde{a})}}(S, \widetilde{a})$ вероятность ошибки на входном наборе $\widetilde{a}$ схемы A, реализующей функцию f. Число $P(S) = \max\limits_{\widetilde{a}} P_{\overline{f(\widetilde{a})}}(S, \widetilde{a})$ назовем ненадежностью схемы S. Надежность схемы S равна $1 - P(S)$.

Пусть $P_\varepsilon(f) = \inf\limits_S P(S)$, где инфимум берется по всем схемам S из ненадежных элементов, реализующим функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Схема A из ненадежных элементов, реализующая функцию f, называется асимптотически оптимальной по надежности, если $P(A) \sim P_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \to 0$, то есть $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{P_\varepsilon(f)}{P(A)} = 1$.

Теорема 1 [2]. *Пусть f – произвольная функция, отличная от константы, S – любая схема, реализующая f. Пусть подсхема C схемы S содержит выход схемы S и реализует булеву функцию h с ненадежностью $P(C) \le 1/2$. Обозначим через $p_{11}, \ldots, p_{1k}$ всевозможные различные вероятности ошибок на выходе схемы C при нулевых входных наборах $\widetilde{b}$, то есть $h(\widetilde{b}) = 0$. Аналогично, пусть $p_{01}, \ldots, p_{0m}$ – всевозможные различные вероятности ошибок на*



а *б* *в*

Рис. 1. Схема S

выходе схемы C *при единичных входных наборах* $\widetilde{b}$, *то есть* $h(\widetilde{b}) = 1$. *Полагаем* $p^1 = \min\{p_{11}, \ldots, p_{1k}\}$, $p^0 = \min\{p_{01}, \ldots, p_{0m}\}$. *Тогда вероятности ошибок на выходе схемы* S *удовлетворяют неравенствам* $P_1(S, \widetilde{a}) \geq p^1$, *если* $f(\widetilde{a}) = 0$; $P_0(S, \widetilde{a}) \geq p^0$, *если* $f(\widetilde{a}) = 1$.

Следствие 1 [2]. $P(S) \geq p^i$, $i = 0, 1$.

Пусть S – произвольная схема, реализующая булеву функцию f, отличную от константы. Пусть выходному элементу E схемы S приписана функция e, причем первый вход элемента E соединен с выходом некоторой подсхемы S_1, второй вход элемента E – с выходом некоторой подсхемы S_2 и схемы S_1 и S_2 не имеют общих элементов. Обозначим через $P_{\overline{f_i(\widetilde{a})}}(S_i, \widetilde{a})$ вероятность ошибки на входном наборе $\widetilde{a}$ схемы S_i, реализующей функцию f_i, $i = 1, 2$. Справедливы леммы 1–10.

Лемма 1. *Если элементу* E *приписана функция* $e = \rightarrow$ *(импликация), то вероятности ошибок на выходе схемы* S *(рис. 1, а) равны:*

$P_0(S, \widetilde{a}) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)P_1(S_1, \widetilde{a})(1 - P_1(S_2, \widetilde{a}))$, *если набор* $\widetilde{a}$ *является нулевым для функций* f_1 *и* f_2, *то есть* $f_i(\widetilde{a}) = 0$, $i = 1, 2$;

$P_0(S, \widetilde{a}) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)P_1(S_1, \widetilde{a})P_0(S_2, \widetilde{a})$, *если набор* $\widetilde{a}$ *– такой, что* $f_1(\widetilde{a}) = 0$, $f_2(\widetilde{a}) = 1$;

$P_1(S, \widetilde{a}) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)(P_0(S_1, \widetilde{a}) + P_1(S_2, \widetilde{a}) - P_0(S_1, \widetilde{a})P_1(S_2, \widetilde{a}))$, *если набор* $\widetilde{a}$ *– такой, что* $f_1(\widetilde{a}) = 1$, $f_2(\widetilde{a}) = 0$;

$P_0(S, \widetilde{a}) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)(1 - P_0(S_1, \widetilde{a}))P_0(S_2, \widetilde{a})$, *если набор* $\widetilde{a}$ *является единичным для функций* f_1 *и* f_2, *то есть* $f_i(\widetilde{a}) = 1$, $i = 1, 2$.

Доказательство. Пусть набор $\widetilde{a}$ является нулевым для функций f_1 и f_2, то есть $f_i(\widetilde{a}) = 0$, $i = 1, 2$. По формуле полной вероятности вычислим вероятность ошибки на выходе схемы S: $P_0(S, \widetilde{a}) = (1 - P_1(S_1, \widetilde{a}))\varepsilon + P_1(S_1, \widetilde{a})((1 - P_1(S_2, \widetilde{a}))(1 - \varepsilon) + \varepsilon P_1(S_2, \widetilde{a})) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)P_1(S_1, \widetilde{a})(1 - P_1(S_2, \widetilde{a}))$.

Пусть входной набор $\widetilde{a}$ – такой, что $f_1(\widetilde{a}) = 0$, $f_2(\widetilde{a}) = 1$. Вычислим вероятность ошибки на выходе схемы S, используя формулу полной вероятности: $P_0(S, \widetilde{a}) = P_1(S_1, \widetilde{a})P_0(S_2, \widetilde{a})(1 - \varepsilon) + (1 - P_1(S_1, \widetilde{a})P_0(S_2, \widetilde{a}))\varepsilon = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)P_1(S_1, \widetilde{a})P_0(S_2, \widetilde{a})$.

Пусть входной набор $\widetilde{a}$ – такой, что $f_1(\widetilde{a}) = 1$, $f_2(\widetilde{a}) = 0$. По формуле полной вероятности вычислим вероятность ошибки на выходе схемы S: $P_1(S, \widetilde{a}) = (1 - P_0(S_1, \widetilde{a}))(1 - P_1(S_2, \widetilde{a}))\varepsilon + (1 - (1 - P_0(S_1, \widetilde{a}))(1 - P_1(S_2, \widetilde{a})))(1 - \varepsilon) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)(P_0(S_1, \widetilde{a}) + P_1(S_2, \widetilde{a}) - P_0(S_1, \widetilde{a})P_1(S_2, \widetilde{a}))$.

Пусть входной набор $\widetilde{a}$ является единичным для функций f_1 и f_2, то есть $f_i(\widetilde{a}) = 1$, $i = 1, 2$. По формуле полной вероятности вычислим вероятность ошибки на выходе схемы S: $P_0(S, \widetilde{a}) = (1 - P_0(S_1, \widetilde{a}))P_0(S_2, \widetilde{a})(1 - \varepsilon) + (1 - (1 - P_0(S_1, \widetilde{a}))P_0(S_2, \widetilde{a}))\varepsilon = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)(1 - P_0(S_1, \widetilde{a}))P_0(S_2, \widetilde{a})$.

Лемма 1 доказана. □

Леммы 2–10 доказываются аналогично лемме 1.

Лемма 2. *Если элементу E приписана функция $e = \oplus$ (сложение по модулю 2), то есть E – двоичный сумматор, то вероятности ошибок на выходе схемы S (рис. 1, а) равны:*

$P_1(S,\widetilde{a}) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)(P_1(S_1,\widetilde{a}) + P_1(S_2,\widetilde{a}) - 2P_1(S_1,\widetilde{a})P_1(S_2,\widetilde{a}))$, *если набор $\widetilde{a}$ является нулевым для функций f_1 и f_2, то есть $f_i(\widetilde{a}) = 0,\ i = 1,2$;*

$P_0(S,\widetilde{a}) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)(P_1(S_1,\widetilde{a}) + P_0(S_2,\widetilde{a}) - 2P_1(S_1,\widetilde{a})P_0(S_2,\widetilde{a}))$, *если набор $\widetilde{a}$ – такой, что $f_1(\widetilde{a}) = 0,\ f_2(\widetilde{a}) = 1$;*

$P_0(S,\widetilde{a}) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)(P_0(S_1,\widetilde{a}) + P_1(S_2,\widetilde{a}) - 2P_0(S_1,\widetilde{a})P_1(S_2,\widetilde{a}))$, *если набор $\widetilde{a}$ – такой, что $f_1(\widetilde{a}) = 1,\ f_2(\widetilde{a}) = 0$;*

$P_1(S,\widetilde{a}) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)(P_0(S_1,\widetilde{a}) + P_0(S_2,\widetilde{a}) - 2P_0(S_1,\widetilde{a})P_0(S_2,\widetilde{a}))$, *если набор $\widetilde{a}$ является единичным для функций f_1 и f_2, то есть $f_i(\widetilde{a}) = 1,\ i = 1,2$.*

Лемма 3. *Если элементу E приписана функция $e = \&$ (конъюнкция), то вероятности ошибок на выходе схемы S (рис. 1, а) равны:*

$P_1(S,\widetilde{a}) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)P_1(S_1,\widetilde{a})P_1(S_2,\widetilde{a})$,*если набор $\widetilde{a}$ является нулевым для функций f_1 и f_2, то есть $f_i(\widetilde{a}) = 0,\ i = 1,2$;*

$P_1(S,\widetilde{a}) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)P_1(S_1,\widetilde{a})(1 - P_0(S_2,\widetilde{a}))$, *если набор $\widetilde{a}$ – такой, что $f_1(\widetilde{a}) = 0,\ f_2(\widetilde{a}) = 1$;*

$P_1(S,\widetilde{a}) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)(1 - P_0(S_1,\widetilde{a}))P_1(S_2,\widetilde{a})$, *если набор $\widetilde{a}$ – такой, что $f_1(\widetilde{a}) = 1,\ f_2(\widetilde{a}) = 0$;*

$P_0(S,\widetilde{a}) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)(P_0(S_1,\widetilde{a}) + P_0(S_2,\widetilde{a}) - P_0(S_1,\widetilde{a})P_0(S_2,\widetilde{a}))$, *если набор $\widetilde{a}$ является единичным для функций f_1 и f_2, то есть $f_i(\widetilde{a}) = 1,\ i = 1,2$.*

Лемма 4. *Если элементу E приписана функция $e = \sim$ (эквивалентность), то вероятности ошибок на выходе схемы S (рис. 1, а) равны:*

$P_0(S,\widetilde{a}) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)(P_1(S_1,\widetilde{a}) + P_1(S_2,\widetilde{a}) - 2P_1(S_1,\widetilde{a})P_1(S_2,\widetilde{a}))$, *если набор $\widetilde{a}$ является нулевым для функций f_1 и f_2, то есть $f_i(\widetilde{a}) = 0,\ i = 1,2$;*

$P_1(S,\widetilde{a}) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)(P_1(S_1,\widetilde{a}) + P_0(S_2,\widetilde{a}) - 2P_1(S_1,\widetilde{a})P_0(S_2,\widetilde{a}))$, *если набор $\widetilde{a}$ – такой, что $f_1(\widetilde{a}) = 0,\ f_2(\widetilde{a}) = 1$;*

$P_1(S,\widetilde{a}) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)(P_0(S_1,\widetilde{a}) + P_1(S_2,\widetilde{a}) - 2P_0(S_1,\widetilde{a})P_1(S_2,\widetilde{a}))$, *если набор $\widetilde{a}$ – такой, что $f_1(\widetilde{a}) = 1,\ f_2(\widetilde{a}) = 0$;*

$P_0(S,\widetilde{a}) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)(P_0(S_1,\widetilde{a}) + P_0(S_2,\widetilde{a}) - 2P_0(S_1,\widetilde{a})P_0(S_2,\widetilde{a}))$, *если набор $\widetilde{a}$ является единичным для функций f_1 и f_2, то есть $f_i(\widetilde{a}) = 1,\ i = 1,2$.*

Лемма 5. *Если элементу E приписана функция $e = \downarrow$ (стрелка Пирса), то вероятности ошибок на выходе схемы S (рис. 1, а) равны:*

$P_0(S,\widetilde{a}) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)(P_1(S_1,\widetilde{a}) + P_1(S_2,\widetilde{a}) - P_1(S_1,\widetilde{a})P_1(S_2,\widetilde{a}))$,*если набор $\widetilde{a}$ является нулевым для функций f_1 и f_2, то есть $f_i(\widetilde{a}) = 0,\ i = 1,2$;*

$P_1(S,\widetilde{a}) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)(1 - P_1(S_1,\widetilde{a}))P_0(S_2,\widetilde{a})$, *если набор $\widetilde{a}$ – такой, что $f_1(\widetilde{a}) = 0,\ f_2(\widetilde{a}) = 1$;*

$P_1(S,\widetilde{a}) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)P_0(S_1,\widetilde{a})(1 - P_1(S_2,\widetilde{a}))$, *если набор $\widetilde{a}$ – такой, что $f_1(\widetilde{a}) = 1,\ f_2(\widetilde{a}) = 0$;*

$P_1(S,\widetilde{a}) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)P_0(S_1,\widetilde{a})P_0(S_2,\widetilde{a})$, *если набор $\widetilde{a}$ является единичным для функций f_1 и f_2, то есть $f_i(\widetilde{a}) = 1,\ i = 1,2$.*

Лемма 6. *Если элементу E приписана функция $e = |$ (штрих Шеффера), то вероятности ошибок на выходе схемы S (рис. 1, а) равны:*

$P_0(S,\widetilde{a}) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)P_1(S_1,\widetilde{a})P_1(S_2,\widetilde{a})$, *если набор $\widetilde{a}$ является нулевым для функций f_1 и f_2, то есть $f_i(\widetilde{a}) = 0,\ i = 1,2$;*

$P_0(S,\widetilde{a}) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)(1 - P_1(S_1,\widetilde{a}))P_0(S_2,\widetilde{a})$, *если набор $\widetilde{a}$ – такой, что $f_1(\widetilde{a}) = 0,\ f_2(\widetilde{a}) = 1$;*

$P_0(S,\widetilde{a}) = \varepsilon+(1-2\varepsilon)P_0(S_1,\widetilde{a})(1-P_1(S_2,\widetilde{a}))$, *если набор* $\widetilde{a}$ *– такой, что* $f_1(\widetilde{a}) = 1$, $f_2(\widetilde{a}) = 0$;

$P_1(S,\widetilde{a}) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)(P_0(S_1,\widetilde{a}) + P_0(S_2,\widetilde{a}) - P_0(S_1,\widetilde{a})P_0(S_2,\widetilde{a}))$, *если набор* $\widetilde{a}$ *является единичным для функций* f_1 *и* f_2, *то есть* $f_i(\widetilde{a}) = 1$, $i = 1, 2$.

Лемма 7. *Если элементу* E *приписана функция* $e =\nrightarrow$, *то вероятности ошибок на выходе схемы* S *(рис. 1, а) равны:*

$P_1(S,\widetilde{a}) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)P_1(S_1,\widetilde{a})(1-P_1(S_2,\widetilde{a}))$, *если набор* $\widetilde{a}$ *является нулевым для функций* f_1 *и* f_2, *то есть* $f_i(\widetilde{a}) = 0$, $i = 1, 2$;

$P_1(S,\widetilde{a}) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)P_1(S_1,\widetilde{a})P_0(S_2,\widetilde{a})$, *если набор* $\widetilde{a}$ *– такой, что* $f_1(\widetilde{a}) = 0$, $f_2(\widetilde{a}) = 1$;

$P_0(S,\widetilde{a}) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)(P_0(S_1,\widetilde{a}) + P_1(S_2,\widetilde{a}) - P_0(S_1,\widetilde{a})P_1(S_2,\widetilde{a}))$, *если набор* $\widetilde{a}$ *– такой, что* $f_1(\widetilde{a}) = 1$, $f_2(\widetilde{a}) = 0$;

$P_1(S,\widetilde{a}) = \varepsilon+(1-2\varepsilon)(1-P_0(S_1,\widetilde{a}))P_0(S_2,\widetilde{a})$, *если набор* $\widetilde{a}$ *является единичным для функций* f_1 *и* f_2, *то есть* $f_i(\widetilde{a}) = 1$, $i = 1, 2$.

Лемма 8. *Если элемент* E *– дизъюнктор, то есть ему приписана функция* $e = \vee$ *(дизъюнкция), то вероятности ошибок на выходе схемы* S *(рис. 1, а) равны:*

$P_1(S,\widetilde{a}) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)(P_1(S_1,\widetilde{a}) + P_1(S_2,\widetilde{a}) - P_1(S_1,\widetilde{a})P_1(S_2,\widetilde{a}))$, *если набор* $\widetilde{a}$ *является нулевым для функций* f_1 *и* f_2, *то есть* $f_i(\widetilde{a}) = 0$, $i = 1, 2$;

$P_0(S,\widetilde{a}) = \varepsilon+(1-2\varepsilon)P_1(S_1,\widetilde{a})(1-P_0(S_2,\widetilde{a}))$, *если набор* $\widetilde{a}$ *– такой, что* $f_1(\widetilde{a}) = 0$, $f_2(\widetilde{a}) = 1$;

$P_0(S,\widetilde{a}) = \varepsilon+(1-2\varepsilon)(1-P_0(S_1,\widetilde{a}))P_1(S_2,\widetilde{a})$, *если набор* $\widetilde{a}$ *– такой, что* $f_1(\widetilde{a}) = 1$, $f_2(\widetilde{a}) = 0$;

$P_0(S,\widetilde{a}) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)P_0(S_1,\widetilde{a})P_0(S_2,\widetilde{a})$, *если набор* $\widetilde{a}$ *является единичным для функций* f_1 *и* f_2, *то есть* $f_i(\widetilde{a}) = 1$, $i = 1, 2$.

Лемма 9. *Если элементу* E *приписана функция* $e(x_1, x_2)$ *и* $e(x, x) = x^b$, $b \in \{0, 1\}$, *то вероятность ошибок на выходе схемы* S *(рис. 1, б) на наборе* $\widetilde{a}$ *равна* $P_{f^{\bar{b}}(\widetilde{a})}(S,\widetilde{a}) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)P_{\bar{f}(\widetilde{a})}(S_1,\widetilde{a})$.

Лемма 10. *Если элемент* E *– инвертор, то вероятности ошибок на выходе схемы* S *(рис. 1, в) равны:*

$P_0(S,\widetilde{a}) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)P_1(S_1,\widetilde{a})$, *если набор* $\widetilde{a}$ *– такой, что* $\bar{f}(\widetilde{a}) = 0$;

$P_1(S,\widetilde{a}) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)P_0(S_1,\widetilde{a})$, *если набор* $\widetilde{a}$ *– такой, что* $\bar{f}(\widetilde{a}) = 1$.

Пусть B_2 – множество всех булевых функций, зависящих от переменных x_1, x_2.

Из лемм 1–10 следует теорема

Теорема 2. *Если схема* S *(рис. 1, а–в), построенная в базисе* B_2, *содержит ровно 2 элемента, а ее выходному элементу приписана функция* $e(x_1, x_2)$, *отличная от констант и тождественной функции, то существует* $i \in \{0, 1\}$ *такое, что* $p^i = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$.

Доказательство. Пусть выходному элементу E схемы S (рис. 1, *а*) приписана одна из функций $x_1|x_2$, $x_1 \vee x_2$ или $x_1 \to x_2$. Поскольку на схемы S_1 и S_2 (рис. 1, *а*) приходится ровно один элемент, то из лемм 1, 6, 8 следует, что на любом нулевом наборе вероятность ошибки равна $p^1 = p_1 = \varepsilon + (1-2\varepsilon)\varepsilon = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$.

Если выходному элементу E схемы S (рис. 1, *а*) приписана одна из функций $x_1 \downarrow x_2$, $x_1 \& x_2$ или $x_1 \nrightarrow x_2$, то из лемм 3, 5, 7 следует, что на любом единичном наборе вероятность ошибки равна $p^0 = p_0 = \varepsilon + (1-2\varepsilon)\varepsilon = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$.

Если выходному элементу E схемы S (рис. 1, *а*) приписаны функция $x_1 \oplus x_2$ или $x_1 \sim x_2$, то из лемм 2 и 4 получаем, что на любом входном наборе вероятность ошибки равна $2\varepsilon - 2\varepsilon^2$, то есть $p^0 = p^1 = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$.

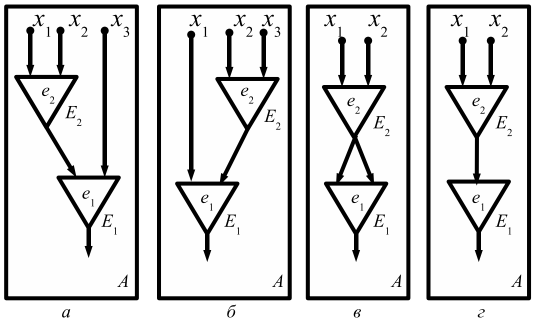


Рис. 2. Возможные варианты схемы A

Если выходному элементу E схемы S (рис. 1, *б*) приписана функция $x_1|x_2$, $x_1 \vee x_2$, $x_1 \to x_2$, $x_1 \downarrow x_2$, $x_1 \& x_2$, $x_1 \nrightarrow x_2$, $x_1 \oplus x_2$ или $x_1 \sim x_2$, то из леммы 9 следует, что на любом входном наборе вероятность ошибки равна $2\varepsilon - 2\varepsilon^2$, то есть $p^0 = p^1 = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$.

Если выходному элементу E схемы S (рис. 1, *в*) приписана функция $\bar{x}$, то из леммы 10 следует, что на любом наборе вероятность ошибки равна $2\varepsilon - 2\varepsilon^2$, то есть $p^0 = p^1 = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$.

Теорема 2 доказана. □

2. Оценки ненадежности схем в базисе B_2

Теорема 3 [3]. *В базисе* $\{x_1 \& x_2, x_1 \oplus x_2, 1\}$ *при* $\varepsilon \le 1/240$ *любую функцию* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *можно реализовать такой схемой* S, *что* $P(S) \le 2\varepsilon + 27\varepsilon^2$.

Поскольку $\{x_1 \& x_2, x_1 \oplus x_2, 1\} \subset B_2$, из теоремы 3 следует

Теорема 4. *В базисе* B_2 *при* $\varepsilon \le 1/240$ *любую булеву функцию* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *можно реализовать такой схемой* S, *что* $P(S) \le 2\varepsilon + 27\varepsilon^2$.

Очевидно, что функции x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ можно реализовать абсолютно надежно (не используя ни одного ФЭ), а функции $\bar{x}_i$, $x_i|x_j$, $x_i \downarrow x_j$, $x_i \sim x_j$, $x_i \to x_j$, $x_i \nrightarrow x_j$, $x_i \oplus x_j$, $x_i \& x_j$, $x_i \vee x_j$ и константы 0, 1 $(i, j = 1, 2, \ldots, n,\ i \ne j)$ – схемами с ненадежностью ε (используя один базисный ФЭ для реализации каждой из указанных функций).

Пусть $K_1(n)$ – множество булевых функций, зависящих от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и отличных от функций 0, 1, x_i, $\bar{x}_i$, $x_i|x_j$, $x_i \downarrow x_j$, $x_i \sim x_j$, $x_i \to x_j$, $x_i \nrightarrow x_j$, $x_i \oplus x_j$, $x_i \& x_j$, $x_i \vee x_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n,\ i \ne j)$. Нетрудно проверить, что $|K_1(n)| = 2^{2^n} - 5n^2 + 3n - 2$.

Замечание 1. Для реализации любой функции из класса $K_1(n)$ схемой в базисе B_2 требуется не менее двух элементов.

Теорема 5. *Пусть* $\varepsilon \le 1/4$, *функция* $f(\widetilde{x}) \in K_1(n)$ *и пусть* S *– любая схема в базисе* B_2, *реализующая функцию* f. *Тогда* $P(S) \ge 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$.

Доказательство. Пусть булева функция $f \in K_1(n)$, а S – любая схема, реализующая эту функцию. В схеме S выделим связную подсхему A, состоящую из двух различных элементов E_1, E_2 причем выход элемента E_1 является выходом схемы S (рис. 2, *а–г*). Схема A удовлетворяет условиям теоремы 2, поэтому найдется такое $i \in \{0, 1\}$, что $p^i \ge 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$. Тогда по следствию 1 верно $P(S) \ge 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$.

Теорема доказана. □

Замечание 2. При доказательстве теорем 2 и 5 число входов элемента E_2 может быть любым, поэтому утверждение теоремы 5 останется верным, если выходной элемент E_1 имеет не более двух входов, а элемент E_2 – k-входов, $k \geq 3$.

Из теорем 4 и 5 следует, что в базисе B_2 асимптотически оптимальные по надежности схемы для почти всех функций (поскольку $|K_1(n)|/2^{2^n} \to 1$ с ростом n) функционируют с ненадежностью, асимптотически равной 2ε при $\varepsilon \to 0$.

3. Об одном классе функций

Пусть B – произвольный полный конечный базис. Рассмотрим три множества: $G_1 = \{x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1}x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3} | \sigma_i \in \{0,1\},\ i \in \{1,2,3\}\}$, G_2 – множество функций, зависящих от переменных x_1, x_2, x_3, и конгруэнтных функциям $x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2} \oplus x_3^{\sigma_3}$, G_3 – множество функций, зависящих от переменных x_1, x_2, x_3, конгруэнтных функциям $x_1^{\sigma_1}x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3}$, где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \{0,1\}$. Полагаем $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$.

Замечание 3. $|G_1| = 8, |G_2| = 24, |G_3| = 24, |G| = 56.$

Обозначим через G^* множество функций, конгруэнтных функциям $x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1}x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3}$, или $x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3}x_4^{\sigma_4}$, или $(x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2}) \cdot (x_3^{\sigma_3} \vee x_4^{\sigma_4})$, где $\sigma_i \in \{0,1\}$, $i = 1,2,3,4$.

С.И. Аксенов [4] доказал, что при инверсных неисправностях на выходах элементов наличие любой из функций множества G^* в заданном конечном полном базисе B гарантирует реализацию произвольной булевой функции схемой S, функционирующей с ненадежностью $P(S) \leq \varepsilon + c\varepsilon^2$, где $\varepsilon \leq d$, c, d – некоторые положительные константы.

Лемма 11 [5]. *В произвольном полном конечном базисе B пяти элементов достаточно для реализации хотя бы одной из функций множества G^*.*

Теорема 6 [3]. *Допустим, что любую функцию можно реализовать схемой с ненадежностью не больше p $(p \leq 1/2)$. Пусть схема S_g реализует функцию $g \in G^*$ с ненадежностью $P(S_g) \leq p$, причем ν^1 и ν^0 – вероятности ошибок схемы S_g на наборах $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3)$ и $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ соответственно, если g зависит от трех переменных, и на наборах $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_4)$ и $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ соответственно, если g зависит от четырех переменных. Тогда произвольную функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно реализовать такой схемой S, что $P(S) \leq \max\{v^0, v^1\} + 6p^2$.*

Следствие 2 [3]. *Если условия теоремы 6 выполнены и базис B содержит функцию $\varphi \in G_1$, то любую булеву функцию можно реализовать такой схемой S, что $P(S) \leq \varepsilon + 6p^2$.*

Лемма 12 [5]. *При $\varepsilon \leq 1/960$ любую функцию f в базисе B можно реализовать схемой A с ненадежностью $P(A) \leq 24\varepsilon$.*

Теорема 7. *При $\varepsilon \leq 1/960$ любую функцию f в базисе B можно реализовать схемой A с ненадежностью $P(A) \leq 5\varepsilon + 182\varepsilon^2 \leq 5,2\varepsilon$.*

Доказательство. Пусть f – произвольная булева функция, а $\varepsilon \leq 1/960$. Возьмем ту функцию g из G^*, для реализации которой достаточно пяти элементов (по лемме 11 это возможно), и построим схему S_g из пяти элементов, ее реализующую. Тогда $\max\{v^0, v^1\} \leq 5\varepsilon$. Пусть функция g существенно зависит от k $(k = 3,4)$ переменных. Возьмем k схем S_{σ_i}, каждая из которых реализует функцию f^{σ_i} $(\sigma_i \in \{0,1\},\ i = 1,2,\ldots,k)$ с ненадежностью не больше 24ε (по лемме

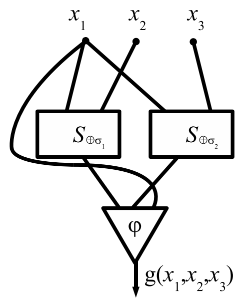


Рис. 3. Схема S_g

12 это возможно). Соединим выход схемы S_{σ_i} с i-м входом схемы S_g. Нетрудно видеть, что построенная таким образом схема реализует функцию f. Обозначим ее $\chi(S_0, S_1)$. По теореме 6 имеем $P(\chi(S_0, S_1)) \leq 5\varepsilon + 6(24\varepsilon)^2 \leq 8.6\varepsilon$, так как $\varepsilon \leq 1/960$. Проделаем еще один шаг итерации: по схеме $\chi(S_0, S_1)$ построим схему $\chi^2(S_0, S_1)$, реализующую f. По теореме 6 получим $P(\chi^2(S_0, S_1)) \leq 5\varepsilon + 6(8.6\varepsilon)^2 \leq 5.5\varepsilon$. Следующий шаг итерации позволяет построить схему $\chi^3(S_0, S_1)$, для которой $P(\chi^3(S_0, S_1)) \leq 5\varepsilon + 6(5.5\varepsilon)^2 = 5\varepsilon + 182\varepsilon^2 \leq 5.2\varepsilon$.

Теорема доказана. □

Теорема 8. *Пусть базис B содержит функцию $\varphi \in G_2$, а $\varepsilon \leq 1/960$. Тогда любую функцию f в этом базисе можно реализовать схемой A с ненадежностью $P(A) \leq \varepsilon + 200\varepsilon^2$.*

Доказательство. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \oplus x_3^{\sigma_3} \in G_2$, где $\sigma_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, 3$. Поскольку B – полный базис, то $(x_1 \oplus x_2)^{\sigma} \in [B]$. Реализуем функции $(x_1 \oplus x_2)^{\sigma_1 \oplus \sigma_3}$ и $(x_1 \oplus x_3)^{\sigma_2 \oplus \sigma_3}$ такими схемами $S_{\oplus\sigma_1}$ и $S_{\oplus\sigma_2}$ соответственно, что $P(S_{\oplus\sigma_1}) \leq 5.2\varepsilon$ и $P(S_{\oplus\sigma_2}) \leq 5.2\varepsilon$ (используя теорему 7). Построим схему S_g (см. рис. 3), которая реализует функцию $\varphi((x_1 \oplus x_2)^{\sigma_1 \oplus \sigma_3}, (x_2 \oplus x_3)^{\sigma_2 \oplus \sigma_3}, x_1) = (x_1 \oplus x_2 \oplus \sigma_3)(x_1 \oplus x_2 \oplus \sigma_3) \oplus x_1^{\sigma_3} = (x_1^{\sigma_3} \oplus x_2)(x_1^{\sigma_3} \oplus x_2) \oplus x_1^{\sigma_3} = x_1^{\sigma_1} x_2 \vee x_1^{\sigma_1} x_3 \vee x_2 x_3$ из множества G_1. Для схемы S_g вычислим вероятности ошибок на наборах $\widetilde{\alpha} = (\bar{\sigma}_1, 0, 0)$ и $\widetilde{\beta} = (\sigma_1, 1, 1)$ соответственно.

Вероятность ошибки v^1 схемы S_g на наборе $\widetilde{\alpha} = (\bar{\sigma}_1, 0, 0)$ удовлетворяет неравенству: $v^1 \leq \varepsilon + 2(5.2\varepsilon)\varepsilon + (5.2\varepsilon)^2 \leq \varepsilon + 37.5\varepsilon^2$.

Аналогично вычисляется и оценивается вероятность ошибки v^0 схемы S_g на наборе $\widetilde{\beta} = (\sigma_1, 1, 1)$: $v^0 \leq \varepsilon + 2(5.2\varepsilon)\varepsilon + (5.2\varepsilon)^2 \leq \varepsilon + 37.5\varepsilon^2$

Тогда по следствию 2 любую булеву функцию можно реализовать схемой A с ненадежностью $P(A) \leq \varepsilon + 37.5\varepsilon^2 + 6(5.2\varepsilon)^2 \leq \varepsilon + 200\varepsilon^2$.

Теорема доказана. □

Теорема 9 [6]. *Пусть базис B содержит функцию $\varphi \in G_3$, а $\varepsilon \leq 1/960$. Тогда любую функцию f в этом базисе можно реализовать схемой A с ненадежностью $P(A) \leq \varepsilon + 8\varepsilon^2$.*

Теорема 10. *Пусть f – любая функция, для реализации которой требуется не менее одного элемента. Тогда для любой схемы S, реализующей f, при $\varepsilon < 1/2$ верно неравенство $P(S) \geq \varepsilon$.*

Для доказательства достаточно выделить выходной элемент и вычислить вероятности ошибок.

Из теорем 8–10 следует, что наличие в базисе функций из классов G_2 и G_3 обеспечивает реализацию почти всех булевых функций асимптотически оптимальными схемами, ненадежность которых равна ε при $\varepsilon \to 0$.

4. О надежности схем в базисе B_3

Пусть B_3 – множество всех булевых функций, зависящих от трех переменных x_1, x_2, x_3.

Теорема 11. *При $\varepsilon \leq 1/240$ любую функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в базисе B_3 можно реализовать схемой A с ненадежностью $P(A) \leq \varepsilon + 27\varepsilon^2$.*

Доказательство. Поскольку $\{x_1 \& x_2, x_1 \oplus x_2, 1\} \subset B_3$, то по теореме 3 любую функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно реализовать схемой S с ненадежностью $P(S) \leq 2\varepsilon + 27\varepsilon^2$. Базис B_3 содержит функцию голосования $x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$, поэтому вероятности ошибок элемента голосования равны $\nu^1 = \nu^0 = \varepsilon$. Применим следствие 2 и получим $P(A) \leq \varepsilon + 6 \cdot (2\varepsilon + 27\varepsilon^2)^2 \leq \varepsilon + 27\varepsilon^2$ при $\varepsilon \leq 1/240$.

Теорема доказана. □

Из теорем 10 и 11 следует, что в базисе B_3 асимптотически оптимальные по надежности схемы для почти всех функций функционируют с ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \to 0$. Этот результат известен [1], мы лишь детализируем его значениями констант $1/240$ и 27 (см. теорему 11) и приводим в этой работе для полноты изложения.

5. О надежности схем в базисе $B_3 \backslash G$

Обозначим $B^* = B_3 \backslash G$. Пусть $K_2(n)$ – множество булевых функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, не представимых в виде $(x_i^a \& h(\widetilde{x}))^b$ или $(x_i^a \& x_j^b \vee x_i^{\bar{a}} \& x_j^{\bar{b}} \& h(\widetilde{x}))^c$, где $h(\widetilde{x})$ – произвольная функция, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $a, b, c \in \{0, 1\}$. Нетрудно заметить, что $K_2(n) \subset K_1(n)$.

Замечание 4. Для реализации любой функции из класса $K_2(n)$ схемой в базисе B^* требуется не менее двух элементов.

Теорема 12. *Пусть $\varepsilon \leq 1/4$, функция $f(\widetilde{x}) \in K_2(n)$ и пусть S – любая схема в базисе B^*, реализующая функцию f. Тогда $P(S) \geq 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$.*

Доказательство. Пусть $f(\widetilde{x}) \in K_2(n)$ и пусть S – любая схема в базисе B^*, реализующая функцию f. В схеме S выделим связную подсхему A, состоящую из двух различных элементов E_1, E_2 и содержащую выход схемы S. Обозначим через E_1 выходной элемент подсхемы A.

Если элемент E_1 – двухвходовый, то по теореме 5 и замечанию 2 утверждение теоремы верно. Если элемент E_1 – трехвходовый, но два или три входа E_1 отождествлены (элемент E_1 в этом случае реализует функцию не более чем от двух переменных), тогда по теореме 5 утверждение теоремы верно.

Пусть выходному элементу E_1 схемы A приписана функция e_1, существенно зависящая от трех переменных, и $\widetilde{u} = (e_1^0, e_1^1, e_1^2, e_1^3, e_1^4, e_1^5, e_1^6, e_1^7)$ – набор ее значений. Возможны следующие случаи.

1. Пусть в наборе $\widetilde{u}$ значений функции e_1 ровно одна единица. Тогда $e_1 = x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3}$, где $a_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, 3$, $e_1(a_1, a_2, a_3) = 1$. Вероятность ошибки на выходе схемы A равна $p^0 = p_0 = \varepsilon(1-\varepsilon) + (1-\varepsilon)\varepsilon = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$. По следствию 1 имеем $P(S) \geq p^0 = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$.

2. Пусть в наборе $\widetilde{u}$ значений функции e_1 ровно две единицы, тогда $e_1 = x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3} \vee x_1^{b_1}x_2^{b_2}x_3^{b_3}$, где $a_i, b_i \in \{0,1\}$, $i = 1,2,3$, $e_1(a_1,a_2,a_3) = 1$ и $e_1(b_1,b_2,b_3) = 1$.

   Возможны два случая.

   (a) $\rho(\widetilde{a},\widetilde{b}) = 1$. Для определенности пусть $a_1 \neq b_1$, тогда $e_1 = x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3} \vee x_1^{\bar{a}_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3} = x_2^{a_2}x_3^{a_3}$, то есть в этом случае функция e_1 зависит от двух переменных, что противоречит ее выбору.

   (b) $\rho(\widetilde{a},\widetilde{b}) \geq 2$. Вероятность ошибки схемы A на каждом (из двух) единичном наборе равна $p^0 = p_0 = \varepsilon(1-\varepsilon) + (1-\varepsilon)\varepsilon = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$. По следствию 1 получаем $P(S) \geq p^0 = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$.

3. Пусть в наборе $\widetilde{u}$ значений функции e_1 ровно три единицы, то есть существуют три различных набора $(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)})$, $i = 1,2,3$, такие, что $e_1(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}) = 1$.

   Возможны три случая:

   (a) Для всех $i, j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$ верно $\rho(\widetilde{a}^{(i)}, \widetilde{a}^{(j)}) \geq 2$. Вероятность ошибки схемы A на каждом единичном наборе равна $p^0 = p_0 = \varepsilon(1-\varepsilon) + (1-\varepsilon)\varepsilon = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$. По следствию 1 получаем $P(S) \geq p^0 = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$.

   (b) Пусть $\rho(\widetilde{a}^{(1)}, \widetilde{a}^{(2)}) = 1$, $\rho(\widetilde{a}^{(3)}, \widetilde{a}^{(i)}) \geq 2$, $i = 1,2$. Будем считать, что наборы $\widetilde{a}^{(1)}$ и $\widetilde{a}^{(2)}$ – соседние по k-й компоненте, $k \in \{1,2,3\}$. Возможны два случая. b1) Выход элемента E_2 соединен с k-м входом элемента E_1 и других элементов в схеме S нет. Тогда $f \notin K_2(n)$, что неверно. Следовательно, если выход элемента E_2 соединен с k-м входом элемента E_1, то в схеме S имеется еще хотя бы один элемент E_3, выход которого соединен с одним из входов элемента E_1. Вероятность ошибки на выходе подсхемы, состоящей из элементов E_1 и E_3, на каждом единичном наборе равна $p^0 = p_0 = \varepsilon(1-\varepsilon) + (1-\varepsilon)\varepsilon = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$. По следствию 1 верно неравенство $P(S) \geq p^0 = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$. b2) Выход элемента E_2 соединен со входом элемента E_1, номер которого не равен k. Вероятность ошибки на выходе схемы A, состоящей из элементов E_1 и E_3, на каждом единичном наборе равна $p^0 = p_0 = \varepsilon(1-\varepsilon) + (1-\varepsilon)\varepsilon = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$. По следствию 1 верно неравенство $P(S) \geq p^0 = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$.

   (c) Пусть $\rho(\widetilde{a}^{(1)}, \widetilde{a}^{(i)}) = 1$, $i = 2,3$. Тогда все три набора имеют одинаковую координату с некоторым номером $m \in \{1,2,3\}$. В этом случае $e_1(x_1,x_2,x_3) = x_m^{\sigma_m} h(x_1,x_2,x_3)$. Следовательно, выход элемента E_2 должен быть соединен с m-м входом элемента E_1 (иначе $f \notin K_2(n)$). Вероятность ошибки на выходе схемы A на каждом единичном наборе равна $p^0 = p_0 = \varepsilon(1-\varepsilon) + (1-\varepsilon)\varepsilon = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$. По следствию 1 верно неравенство $P(S) \geq p^0 = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$.

4. Пусть в наборе $\widetilde{u}$ значений функции e_1 четыре нуля и четыре единицы. Тогда возможны следующие случаи:

   (a) Функция $e_1 = x_i^{\sigma}$, $\sigma \in \{0,1\}$, $i = 1,2,3$, но тогда две другие переменные – фиктивные для функции e_1, что неверно.

   (b) Функция e_1 конгруэнтна функции $x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\bar{\sigma}_1}x_2^{\bar{\sigma}_2}$, $\sigma_i \in \{0,1\}$, $i = 1,2$, то есть существенно зависит от двух переменных, что неверно.

(c) Функция $e_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \sigma$, $\sigma \in \{0,1\}$. Тогда вероятность ошибки схемы A на каждом наборе равна $p^1 = p_1 = p^0 = p_0 = \varepsilon(1-\varepsilon)+(1-\varepsilon)\varepsilon = 2\varepsilon-2\varepsilon^2$. По следствию 1 справедливо неравенство $P(S) \geq p^0 = 2\varepsilon-2\varepsilon^2$, то есть утверждение теоремы верно.

Других функций $e_1 \in B_3\backslash G$, набор значений которых содержит четыре единицы и четыре нуля, нет.

5. Случаи, когда в наборе $\widetilde{u}$ значений функции e_1 пять единиц, шесть единиц или семь единиц аналогичны рассмотренным в п. 3, 2 или 1 доказательства соответственно с заменой & на $\vee$, $\vee$ на &, 1 на 0, 0 на 1.

Всевозможные функции $e_1 \in B_3\backslash G$ рассмотрены.
Теорема доказана. $\square$

Замечание 5. Поскольку $|P_2(n)\backslash K_2(n)| \leq 4 \cdot (2^{2^{n-1}} + (n^2-n)\cdot 2^{2^{n-2}})$, следовательно, $|K_2(n)| \geq 2^{2^n} - 4\cdot(2^{2^{n-1}} + (n^2-n)\cdot 2^{2^{n-2}})$.

Пусть B' – полный базис, содержащий функции не более чем трех переменных.
1) Из теорем 11 и 12 следует, что если $B' \cap G = \emptyset$, то в базисе B' для почти всех булевых функций (поскольку $|K_2(n)|/2^{2^n} \to 1$ с ростом n) асимптотически оптимальные по надежности схемы функционируют с ненадежностью, асимптотически равной 2ε при $\varepsilon \to 0$.
2) Из теорем 7–10 следует, что если $B' \cap G \neq \emptyset$, то в базисе B' для почти всех булевых функций асимптотически оптимальные по надежности схемы функционируют с ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \to 0$.
Таким образом, в базисе B' ненадежность асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) оптимальных схем для почти всех функций равна ε тогда и только тогда, когда $B' \cap G \neq \emptyset$.

Summary

M.A. Alekhina, A.V. Vasin. On Reliability of Combinatorial Circuits in Bases Containing Functions with at Most Three Variables.

We consider the realization of Boolean functions by combinatorial circuits with gates realizing functions from a complete basis B, containing functions with at most three variables. We assume that gates can have inverse faults on the outputs independently with the probability ε ($\varepsilon \in (0;1/2)$). We describe a set G of Boolean functions depending essentially on three variables, and prove that for almost all Boolean functions the unreliability of asymptotically optimal circuits is asymptotically equal to ε (when ε tends to 0) if and only if $G \cap B \neq \emptyset$.

Key words: unreliable functional gates, optimal combinatorial circuits, inverse faults, realization of Boolean functions by combinatorial circuits with unreliable functional gates, synthesis of reliable circuits.

Литература

1. *von Neuman J.* Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components // Automata studies / Eds. C. Shannon, J.Mc. Carthy. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1956. = Автоматы. – М.: Иностр. лит., 1956. – С. 68–139.
2. *Алехина М.А.* Синтез асимптотически оптимальных по надежности схем из ненадежных элементов. – Пенза: Инф.-изд. центр ПГУ, 2006. – 157 с.
3. *Алехина М.А., Шилов А.В.* Верхние оценки ненадежности схем в некоторых базисах при инверсных неисправностях на выходах элементов // Изв. вузов. Поволжский регион. Естеств. науки. – 2006. – № 5 (26). – С. 4–12.

4. *Аксенов С.И.* О надежности схем над произвольной полной системой функций при инверсных неисправностях на выходах элементов // Изв. вузов. Поволжский регион. Естеств. науки. – 2005. – № 6 (21). – С. 42–55.

5. *Алехина М.А.* О надежности схем в базисах, содержащих медиану // Дискретные модели в теории управляющих систем: VIII Междунар. конф., Москва, 6–9 апр. 2009 г. / Отв. ред. В.Б. Алексеев, В.А. Захаров. – М.: Изд. отдел ф-та ВМиК Моск. ун-та; МАКС Пресс, 2009. – С. 13–17.

6. *Васин А.В.* О функциях специального вида // Дискретные модели в теории управляющих систем: VIII Междунар. конф., Москва, 6–9 апр. 2009 г. / Отв. ред. В.Б. Алексеев, В.А. Захаров. – М.: Изд. отдел ф-та ВМиК Моск. ун-та; МАКС Пресс, 2009. – С. 43–46.

Поступила в редакцию
25.03.09

Алехина Марина Анатольевна – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Дискретная математика» Пензенского государственного университета.
E-mail: *ama@sura.ru*, *alehina@pnzgu.ru*

Васин Алексей Валерьевич – аспирант кафедры «Дискретная математика» Пензенского государственного университета.
E-mail: *alvarvasin@mail.ru*