УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2021, Т. 163, кн. 3–4
С. 250–260

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.6

doi: 10.26907/2541-7746.2021.3-4.250-260

О СХОДИМОСТИ НЕЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ НАСЫЩЕННОЙ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ С ПРЕДЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ

В.Л. Гнеденкова, М.Ф. Павлова, Е.В. Рунг

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Работа посвящена исследованию сходимости неявной разностной схемы для одномерной начально-краевой задачи, моделирующей процесс фильтрационной консолидации с предельным градиентом. С математической точки зрения эта модель представляет собой систему уравнений в частных производных относительно перемещений упругой среды и давления жидкости, уравнение относительно давления – вырождающееся с нелинейностью в пространственном операторе, порождающей негладкость решения. В связи с этим исследование сходимости проводилось при минимальных условиях на гладкость исходных данных. Оно основано на получении ряда априорных оценок, позволяющих в дальнейшем с помощью метода монотонности установить сходимость кусочно-постоянных восполнений разностного решения к обобщенному решению рассматриваемой задачи. Аппроксимация пространственного оператора осуществлялась с помощью метода сумматорных тождеств.

Ключевые слова: фильтрация, фильтрационная консолидация, разностная схема, сходимость разностной схемы

---

1. Постановка задачи

Рассматривается начально-краевая задача для системы нелинейных уравнений в частных производных следующего вида:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}=f(x,t), \quad 0<x<L, \quad 0<t<T, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(g\left(\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right|\right)\frac{\partial p}{\partial x}\right)=0, \quad 0<x<L, \quad 0<t<T. \tag{2}$$

Полагаем, что при $t \in (0,T]$ выполнены следующие краевые условия

$$u(0,t)=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)+\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(L,t)=0, \tag{4}$$

$$p(0,t)=p(L,t)=0. \tag{5}$$

Начальные условия при $x \in [0,L]$ задаются в виде

$$u(x,0)=u_0(x), \quad p(x,0)=p_0(x). \tag{6}$$

Задача (1)–(6) носит прикладной характер: соотношения (1)–(6) могут быть использованы для описания одномерного процесса фильтрационной консолидации с предельным градиентом (см., например, [1]). При этом функция p определяет поровое давление, u – перемещение частиц скелета, функция g задает закон фильтрации, f – плотность массовых сил.

В настоящей работе рассматривается задача фильтрационной консолидации с предельным градиентом в случае, когда функция g, определяющая закон фильтрации, имеет вид

$$g(|\xi|) = \begin{cases} 0, & |\xi| \le \xi_0, \\ 1, & |\xi| > \xi_0. \end{cases}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что для функций $g(\xi)$, $f(x,t)$ выполнены следующие условия.

$\mathbf{A_1}$. $g(\xi)\xi$, $\xi \ge 0$, – абсолютно непрерывная по ξ, неотрицательная, неубывающая функция, и существуют такие $\xi_0 \ge 0$, η, $\mu > 0$, что при $\xi \ge \xi_0$ выполняется неравенство

$$\eta(\xi - \xi_0) \le g(|\xi|)\xi \le \mu(\xi - \xi_0). \tag{7}$$

$\mathbf{A_2}$. Функция $f(x,t)$ непрерывна при $(x,t) \in Q_T$, где $Q_T = (0,L) \times (0,T]$.

Условия, налагаемые на функцию g, означают, что скорость фильтрации будет равна нулю при малых значениях модуля градиента.

Основы теории фильтрационной консолидации заложены в работах [2–5], где, в частности, построены математические модели для задач фильтрационной консолидации, проведены исследования этих моделей с позиций механики сплошной среды. Более строгое исследование математических моделей фильтрационной консолидации проведено в работах [6–8], где устанавливается разрешимость этих задач в классе обобщенных функций. Экспериментальному исследованию (с помощью численных методов) посвящены работы [9–11].

2. Обобщенная постановка задачи

Пусть $\overset{\circ}{V}$ – замыкание гладких функций, равных нулю при $x = 0$, в норме пространства $W_2^{(1)}(0,L)$, $\overset{\circ}{V}_1$ – замыкание гладких функций, равных нулю на границе отрезка $[0,L]$, в норме того же пространства.

Определение 1. Обобщенным решением задачи (1)–(6) назовем функции (u,p), для которых справедливы следующие условия:

$$u \in W_2^{(1)}(0,T;\overset{\circ}{V}), \quad p \in L_2(0,T;\overset{\circ}{V}_1),$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad p(x,0) = p_0(x) \quad \text{п. в.} \quad \text{при} \quad x \in (0,L),$$

для любых функций $v \in W_2^{(1)}(0,T;\overset{\circ}{V})$, $z \in L_2(0,T;\overset{\circ}{V}_1)$ имеет место равенство

$$\int_0^T \int_0^L \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} - p \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} z + \right.$$
$$\left. + g\left(\left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \right) \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} \right\} dx\, dt = \int_0^T \int_0^L f(x,t) \frac{\partial v}{\partial t}\, dx\, dt. \tag{8}$$

3. Построение разностной схемы

Построим на отрезке $[0,L]$ равномерную сетку с шагом h

$$\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = 0,1,\ldots,n,\ nh = L\}.$$

Пусть V_h – пространство сеточных функций, определенных на $\overline{\omega}_h$. Обозначим через $\overset{\circ}{V}_h$, $\overset{\circ}{V}_{h1}$ множества сеточных функций из V_h, удовлетворяющих условиям (3) и (5) соответственно.

Введем переменную r, которая может принимать значения ± 1. Для сеточной функции y определим разностные соотношения $\partial_r y$ по формуле

$$\partial_r y = \begin{cases} y_x, & r = 1, \\ y_{\bar{x}}, & r = -1. \end{cases}$$

Для $x \in \overline{\omega}_h$ обозначим через $H_r(x)$ ячейку сетки $\overline{\omega}_h$, которая содержит все точки сетки, участвующие в записи оператора $\partial_r y(x)$. Через ω_r обозначим множество точек $x \in \overline{\omega}_h$, в которых определен оператор $\partial_r y(x)$.

В пространстве V_h введем следующие нормы и скалярные произведения:

$$(y,z)_1 = h\sum_{i=0}^{n-1} y(x_i)z(x_i), \quad (y,z)_{-1} = h\sum_{i=1}^{n} y(x_i)z(x_i), \quad [y,z] = \frac{1}{2}\sum_r (y,z)_r.$$

$$\| y \|^2 = \left[|y|^2,\, 1\right], \quad \| v \|_+^2 = \frac{1}{2}\sum_r \left(|\partial_r y|^2,\, 1\right)_r.$$

На отрезке $[0,T]$ построим равномерную сетку с шагом τ

$$\overline{\omega}_\tau = \{t = k\tau,\ k = 0,1,\ldots,M,\ M\tau = T\}, \quad \omega_\tau = \overline{\omega}_\tau \setminus \{0\}.$$

Определим кусочно-постоянные восполнения по x и t

$$\Pi_r z(x) = \{z(x'), x' \in \omega_r :\ x \in H_r(x')\},$$
$$\Pi^+\omega(t') = \{\omega(k\tau) :\ k\tau \le t' < (k+1)\tau\},$$
$$\Pi^-\omega(t') = \{\omega(k\tau) :\ (k-1)\tau \le t' < k\tau\}.$$

Используя введенные выше обозначения, нетрудно доказать, что для любых сеточных функций y, $v \in V_h$ выполняется следующее очевидное равенство:

$$(y,v)_r = \int_0^L \Pi_r y\, \Pi_r v\, dx. \tag{9}$$

Определение 2. Функции $(\widehat{y}(t),\, \widehat{w}(t))$ назовем решением неявной разностной схемы, если

$$\widehat{y}(t) \in \overset{\circ}{V}_h, \quad \widehat{w}(t) \in \overset{\circ}{V}_{h1} \quad \forall\, t \in \omega_\tau,$$
$$y(x,0) = y_0(x), \quad w(x,0) = w_0(x) \quad \forall\, x \in \overline{\omega}_h$$

и для любых функций $v^h \in \overset{\circ}{V}_h$, $z^h \in \overset{\circ}{V}_{h1}$ имеет место равенство

$$\frac{1}{2}\sum_r \left(\partial_r\widehat{y} + \partial_r y_t - \widehat{w},\, \partial_r v_t^h\right)_r + \frac{1}{2}\sum_r \left(\partial_r y_t,\, \widehat{z}^h\right)_r + \\ + \frac{1}{2}\sum_r \left(g\left(|\partial_r\widehat{w}\,|\right)\partial_r\widehat{w},\, \partial_r\widehat{z}^h\right)_r = \left[\widehat{f}(x,t),\, v_t^h\right]. \tag{10}$$

Здесь $\widehat{v}=v(t+\tau)$, $v_t=\dfrac{\widehat{v}-v}{\tau}$, а y_0, w_0 – сеточные функции такие, что

$$\Pi_r y_0 \to u_0, \quad \Pi_r w_0 \to p_0 \quad \text{в} \quad L_2(0,L).$$

Теорема 1. *Решение разностной схемы* (10) *существует.*

Доказательство. Очевидно, достаточно установить существование $\widehat{y}$, $\widehat{w}$, удовлетворяющих (10), в предположении, что y, w известны.

Пусть $\mathbf{H}(\zeta):R^{2n}\to R^{2n}$ – нелинейный оператор, такой что уравнение

$$\mathbf{H}(\widehat{\zeta})=0$$

эквивалентно (10). Докажем, что существует такая сфера $S(0,R)$ с центром в точке нуль конечного радиуса, на которой

$$\Big(\mathbf{H}(\widehat{\zeta}),\widehat{\zeta}\Big)_{R^{2n}}\geq 0.$$

Имеем

$$\Big(\mathbf{H}(\widehat{\zeta}),\widehat{\zeta}\Big)_{R^{2n}}=\frac{1}{2}\sum_r\big(\partial_r\widehat{y}+\partial_r y_t,\,\partial_r y_t\big)_r+ \\ +\frac{1}{2}\sum_r\big(g\left(|\partial_r\widehat{w}|\right)\partial_r\widehat{w},\,\partial_r\widehat{w}\big)_r-\big[\widehat{f}(x,t),\,y_t\big]. \quad (11)$$

Первое слагаемое правой части равенства (11) можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{2}\sum_r\big(\partial_r\widehat{y}+\partial_r y_t,\,\partial_r y_t\big)_r=\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau^2}\right)\parallel\widehat{y}\parallel_+^2- \\ -\left(\frac{1}{2\tau}+\frac{1}{\tau^2}\right)\sum_r\big(\partial_r\widehat{y},\,\partial_r y\big)_r+\frac{1}{\tau^2}\parallel y\parallel_+^2. \quad (12)$$

Используя неравенство Коши – Буняковского вида

$$(x,y)\leq\delta\|x\|^2+\frac{1}{4\delta}\|y\|^2, \quad (13)$$

из (12) нетрудно получить следующую оценку

$$\frac{1}{2}\sum_r\Big(\partial_r\widehat{y}+\partial_r y_t,\,\partial_r y_t\Big)_r\geq\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau^2}-\delta\right)\|\widehat{y}\|_+^2-\frac{1}{4\delta}\left(\frac{1}{\tau}+\frac{2}{\tau^2}\right)^2\parallel y\parallel_+^2.$$

Второе слагаемое в правой части равенства (11) оценим с помощью неравенств (7) и (13). В результате будем иметь

$$\frac{1}{2}\sum_r\big(g\left(|\partial_r\widehat{w}\,|\right),\,(\partial_r\widehat{w})^2\big)_r\geq(\eta-\delta)\|\widehat{w}\|_+^2-\frac{\eta^2\xi_0^2L^2}{4\delta}.$$

Для оценки последнего слагаемого (11) воспользуемся ограниченностью функции $f(\xi)$, неравенством (13) и неравенством Фридрихса. В результате получим

$$\Big|\Big[\widehat{f}(x,t)\,,\,y_t\Big]\Big|\leq\delta\|\widehat{y}\|_+^2+\frac{C^2C_F^2L^2}{4\delta\tau^2}+\frac{CC_F}{\tau}\|y\|_+^2.$$

Здесь C_F – постоянная неравенства Фридрихса, C – постоянная такая, что

$$|f(\xi,\zeta)| \le C \quad \forall\, \xi \in [0,L], \quad \forall\, \zeta \in [0,T].$$

Подставляя полученные оценки в (11), будем иметь

$$(\mathbf{H}(\zeta),\zeta)_{R^{2n}} \ge \overline{K}(\delta)\left(\|\widehat{y}\|_+^2 + \|\widehat{w}\|_+^2\right) - \overline{R}(\delta), \tag{14}$$

где

$$\overline{K}(\delta) = \min\left\{\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau^2} - 2\delta\right), \eta - \delta\right\},$$

$$\overline{R}(\delta) = \left(\frac{CC_F}{\tau} + \frac{1}{4\delta}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{2}{\tau^2}\right)^2\right) |\ y\|_+{}^2 + \frac{C^2C_F^2L^2}{4\delta\tau^2} + \frac{\eta^2\xi_0^2L^2}{4\delta}.$$

Пусть δ^* – постоянная такая, что для всех $0 < \delta \le \delta^*$ имеет место неравенство

$$\overline{K}(\delta) \ge \beta = \mathrm{const} > 0,$$

а $S \subset R^{2n}$ – сфера с центром в нуле, на которой правая часть неравенства (14) неотрицательна. Тогда по топологической лемме [12, с. 66] внутри этой сферы существует хотя бы одно решение. Теорема 1 доказана. □

Лемма 1. *Для решения разностной схемы* (10) *справедливы следующие априорные оценки:*

$$\max_{t'}\|y(t')\|_+^2 \le C, \quad \sum_{t=0}^{t'} \tau\|w(t)\|_+^2 \le C, \quad t' \in \omega_\tau, \tag{15}$$

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau\,\|y_t(t)\|_+^2 \le C, \quad \sum_{t=0}^{t'} \tau\,\|\partial_r y_t(t)\|^2 \le C, \quad t' \in \omega_\tau, \tag{16}$$

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau\,\|g\left(|\partial_r\widehat{w}(t)|\right)\partial_r\widehat{w}(t)\|^2 \le C, \quad t' \in \omega_\tau, \tag{17}$$

где C – постоянная, значение которой не зависит от τ, h, $t' \in \omega_\tau$.

Доказательство. Запишем (10) при $v^h = y$, $z^h = w$, в результате получим

$$\frac{1}{2}\sum_r \left(\partial_r\widehat{y} + \partial_r y_t,\, \partial_r y_t\right)_r + \frac{1}{2}\sum_r \left(g\left(|\partial_r\widehat{w}\,|\right)\partial_r\widehat{w},\, \partial_r\widehat{w}\right)_r = \left[\widehat{f}(x,t),\, y_t\right]. \tag{18}$$

Заметим, что

$$\tau\,\partial_r\widehat{y}\,\partial_r y_t = \tau\,\partial_r\widehat{y}\,\partial_r\left(\frac{\widehat{y}-y}{\tau}\right) = \partial_r\widehat{y}\,\left(\partial_r\widehat{y} - \partial_r y\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\partial_r\widehat{y}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\partial_r y\right)^2 + \frac{\tau^2}{2}\left(\partial_r y_t\right)^2. \tag{19}$$

С помощью (19) преобразуем равенство (18), результат умножим на τ и просуммируем полученное соотношение по t от 0 до $t'-\tau$, в итоге будем иметь

$$\frac{1}{2}\|y(t')\|_+^2 - \frac{1}{2}\|y(0)\|_+^2 + \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau^2\|y_t(t)\|_+^2 + \sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\,\|\partial_r y_t\|^2 +$$
$$+ \sum_{t=0}^{t'-\tau}\frac{\tau}{2}\sum_r\left(g\left(|\partial_r\widehat{w}|\right)\partial_r\widehat{w},\, \partial_r\widehat{w}\right)_r = \sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\left[\widehat{f}(x,t),\, y_t\right]. \tag{20}$$

Из (20) и неравенства (7) следуют априорные оценки (15)–(16). Оценку (17) нетрудно получить, учитывая, что

$$\|g\left(|\partial_r \widehat{w}|\right) \partial_r \widehat{w}\|^2 \leq \|\partial_r \widehat{w}\|^2 .$$

Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Пусть* $(y,\ w)$ *– решения разностной схемы* (7)*. Тогда существуют функции*

$$u \in W_2^{(1)}(0,T;\overset{\circ}{V}), \quad p \in L_2(0,T;\overset{\circ}{V}_1)$$

и последовательности $\{\tau\}, \{h\}$*, такие что при* $\tau,\ h \to 0$

$$\Pi_r^{\pm} y \rightharpoonup u, \quad \Pi_r^{\pm} y_t \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t} \quad \textit{в} \quad L_2(Q_T), \tag{21}$$

$$\Pi_r^{\pm} \partial_r y_t \rightharpoonup \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \quad \textit{в} \quad L_2(Q_T), \tag{22}$$

$$\Pi_r^{\pm} w \rightharpoonup p \quad \textit{в} \quad L_2(Q_T). \tag{23}$$

Доказательство. Справедливость утверждений (21), (23) следует из априорных оценок (15)–(16) и слабой компактности ограниченных множеств в рефлексивном банаховом пространстве. □

Теорема 2. *Функции* $u,\ p$*, удовлетворяющие соотношениям* (21)*–*(23)*, являются обобщенным решением задачи* (1)*–*(6)*.*

Доказательство. Пусть функции $u,\ p$ удовлетворяют соотношениям (21)–(23), докажем, что $u,\ p$ удовлетворяют тождеству (8).

Пусть $\widetilde{v}$ – функция из $C^\infty(0,T;C^\infty(0,L))$, равная нулю при $x=0$, $\widetilde{z}$ – функция из $C^\infty(0,T;C^\infty(0,L))$, равная нулю на концах отрезка $[0,L]$. Пусть также $v,\ z$ – снос функций $\widetilde{v},\ \widetilde{z}$ соответственно в точки сетки $\overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$. Умножим (10) на τ, просуммируем по t от 0 до $T-\tau$. Результат, используя оператор восполнения $\Pi_r^{\pm}$, запишем в виде

$$\int_0^T \int_0^L \left\{ \left(\frac{\partial \Pi_r^{\pm} \widehat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_r^{\pm} y_t}{\partial x} \right) \frac{\partial \Pi_r^{\pm} v_t}{\partial x} - \Pi_r^{\pm} \widehat{w} \frac{\partial \Pi_r^{\pm} v_t}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_r^{\pm} y_t}{\partial x} \Pi_r^{\pm} \widehat{z} + \right.$$
$$\left. + g\left(\left| \frac{\partial \Pi_r^{\pm} \widehat{w}}{\partial x} \right| \right) \frac{\partial \Pi_r^{\pm} \widehat{w}}{\partial x} \frac{\partial \Pi_r^{\pm} \widehat{z}}{\partial x} \right\} dx\, dt = \int_0^T \int_0^L \widehat{f}(x,t)\, \Pi_r^{\pm} v_t\, dx\, dt. \tag{24}$$

Из ограниченности g и оценки (17) следует существование функции χ из пространства $L_2(0,T;L_2(0,L))$ такой, что

$$g\left(\left| \frac{\partial \Pi_r^{\pm} \widehat{w}}{\partial x} \right| \right) \frac{\partial \Pi_r^{\pm} \widehat{w}}{\partial x} \rightharpoonup \chi \quad \text{в} \quad L_2(0,T;L_2(0,L)). \tag{25}$$

С учетом (21)–(23), (25) в равенстве (24) перейдем к пределу по $\tau, h \to 0$, получим

$$\int_0^T \int_0^L \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} - p \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} z + \chi \frac{\partial z}{\partial x} \right\} dx\, dt =$$
$$= \int_0^T \int_0^L f(x,t) \frac{\partial v}{\partial t}\, dx\, dt. \tag{26}$$

Для доказательства равенства $\chi = g\left(\left|\dfrac{\partial p}{\partial x}\right|\right)\dfrac{\partial p}{\partial x}$ воспользуемся методом монотонности. Запишем очевидное неравенство

$$\sum_{t=0}^{T-\tau}\frac{\tau}{2}\sum_{r}\left(\left(\partial_r y-\partial_r v^h\right)_t,\,\partial_r\widehat{y}-\partial_r\widehat{v}^h\right)_r\geq$$
$$\geq\frac{1}{2}\left\|y(T)-v^h(T)\right\|_+^2-\frac{1}{2}\left\|y(0)-v^h(0)\right\|_+^2\geq-\frac{1}{2}\left\|y_0-v^h(x,0)\right\|_+^2,$$

где v^h – произвольная гладкая функция $v\in C^\infty(Q_T)$, равная нулю при $x=0$. Из этого неравенства и монотонности функции $g(\xi)$ следует

$$\sum_{t=0}^{T-\tau}\frac{\tau}{2}\sum_{r}\Big(\left(\partial_r y-\partial_r v^h\right)_t,\,\partial_r\widehat{y}-\partial_r\widehat{v}^h\Big)_r+\sum_{t=0}^{T-\tau}\frac{\tau}{2}\sum_{r}\Big(g\left(\left|\partial_r\widehat{w}\right|\right)\partial_r\widehat{w}-$$
$$-g\left(\left|\partial_r\widehat{z}^h\right|\right)\partial_r\widehat{z}^h,\,\partial_r\left(\widehat{w}-\widehat{z}^h\right)\Big)_r\geq-\frac{1}{2}\left\|y_0-v^h(x,0)\right\|_+{}^2.$$

Последнее соотношение эквивалентно следующему интегральному неравенству

$$I_{\tau,h}=\int_0^T\int_0^L\left(\frac{\partial\Pi_r^\pm y_t}{\partial x}-\frac{\partial\Pi_r^\pm v_t^h}{\partial x}\right)\frac{\partial\Pi_r^\pm\left(\widehat{y}-\widehat{v}^h\right)}{\partial x}\,dx\,dt+$$
$$+\int_0^T\int_0^L g\left(\left|\frac{\partial\Pi_r^\pm\widehat{w}}{\partial x}\right|\right)\frac{\partial\Pi_r^\pm\widehat{w}}{\partial x}\frac{\partial\Pi_r^\pm\left(\widehat{w}-\widehat{z}^h\right)}{\partial x}\,dx\,dt-$$
$$-\int_0^T\int_0^L g\left(\left|\frac{\partial\Pi_r^\pm\widehat{z}^h}{\partial x}\right|\right)\frac{\partial\Pi_r^\pm\widehat{z}^h}{\partial x}\frac{\partial\Pi_r^\pm\left(\widehat{w}-\widehat{z}^h\right)}{\partial x}\,dx\,dt\geq-\frac{1}{2}\left\|\Pi_r y_0-\Pi_r v^h(x,0)\right\|_1^2. \quad (27)$$

Представим $I_{\tau,h}$ в виде суммы $I=I_{\tau,h}^{(1)}+I_{\tau,h}^{(2)}$, где

$$I_{\tau,h}^{(1)}=\int_0^T\int_0^L\left\{\frac{\partial\Pi_r^\pm y_t}{\partial x}\,\frac{\partial\Pi_r^\pm\left(\widehat{y}-\widehat{v}^h\right)}{\partial x}+g\left(\left|\frac{\partial\Pi_r^\pm\widehat{w}}{\partial x}\right|\right)\frac{\partial\Pi_r^\pm\widehat{w}}{\partial x}\frac{\partial\Pi_r^\pm\left(\widehat{w}-\widehat{z}^h\right)}{\partial x}\right\}dx\,dt,$$

$$I_{\tau,h}^{(2)}=-\int_0^T\int_0^L\left\{\frac{\partial\Pi_r^\pm v_t^h}{\partial x}\,\frac{\partial\Pi_r^\pm\left(\widehat{y}-\widehat{v}^h\right)}{\partial x}+g\left(\left|\frac{\partial\Pi_r^\pm\widehat{z}^h}{\partial x}\right|\right)\frac{\partial\Pi_r^\pm\widehat{z}^h}{\partial x}\frac{\partial\Pi_r^\pm\left(\widehat{w}-\widehat{z}^h\right)}{\partial x}\right\}dx\,dt.$$

Для преобразования $I_{\tau,h}^{(1)}$ воспользуемся (24) при $v^n=y-v^h$, $w=w-z^h$, получим

$$I_{\tau,h}^{(1)}=\int_0^T\int_0^L\left\{-\frac{\partial\Pi_r^\pm y_t}{\partial x}\,\frac{\partial\Pi_r^\pm\left(y_t-v_t^h\right)}{\partial x}-\Pi_r^\pm\widehat{w}\,\frac{\partial\Pi_r^\pm v_t^h}{\partial x}+\right.$$
$$+\frac{\partial\Pi_r^\pm y_t}{\partial x}\,\Pi_r^\pm\widehat{z}^h-\frac{\partial\Pi_r^\pm y_t}{\partial x}\,\frac{\partial\Pi_r^\pm v^h}{\partial x}+$$
$$\left.+\frac{\partial\Pi_r^\pm y}{\partial x}\,\frac{\partial\Pi_r^\pm v_t^h}{\partial x}+\widehat{f}(x,t)\,\Pi_r^\pm\left(y-v^h\right)_t\right\}dxdt. \quad (28)$$

Используя соотношения (21)–(23), (25), в (28) совершим предельный переход при $\tau, h \to 0$, в результате будем иметь

$$I_{\tau,h}^{(1)} \to \int_0^T \int_0^L \left\{ -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 (u-v)}{\partial x \partial t} - p \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} z - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + f(x,t) \frac{\partial (u-v)}{\partial t} \right\} dx\, dt. \quad (29)$$

Упростим правую часть соотношения (29), для этого воспользуемся равенством (26) при $v = u - v$, $p = p - z$, получим

$$I_{\tau,h}^{(1)} \to \int_0^T \int_0^L \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial (u-v)}{\partial x} + \chi \frac{\partial (p-z)}{\partial x} \right\} dx\, dt. \quad (30)$$

Очевидно, что из (21)–(23), (25) при τ, $h \to 0$ имеем

$$I_{\tau,h}^{(2)} \to -\int_0^T \int_0^L \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \frac{\partial (u-v)}{\partial x} + g\left(\left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \right) \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial (p-z)}{\partial x} \right\} dx\, dt. \quad (31)$$

Таким образом, из определения $I_{\tau,h}$ следует, что

$$\int_0^T \int_0^L \left\{ \frac{\partial^2 (u-v)}{\partial x \partial t} \frac{\partial (u-v)}{\partial x} + \left(\chi - g\left(\left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \right) \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial (p-z)}{\partial x} \right\} dx\, dt \geq$$

$$\geq -\frac{1}{2} \left\| u_0 - v(x,0) \right\|_1^2. \quad (32)$$

В (32) выберем $v = u + \lambda h$, $z = p + \lambda q$, где $\lambda = \text{const} > 0$, а h, q – произвольные функции из $C^\infty(0,T; C^\infty(0,L))$, такие что $h(x,0) = 0$ для $x \in (0,L)$. В результате будем иметь

$$\lambda \int_0^T \int_0^L \left(\chi - g\left(\left| \frac{\partial (p+\lambda q)}{\partial x} \right| \right) \frac{\partial (p+\lambda q)}{\partial x} \right) \frac{\partial q}{\partial x}\, dx\, dt +$$

$$+ \lambda^2 \int_0^T \int_0^L \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} \frac{\partial h}{\partial x}\, dx\, dt \geq -\frac{\lambda}{2} \left\| h(x,0) \right\|_1^2 = 0. \quad (33)$$

Неравенство (33) разделим на λ и перейдем к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$\int_0^T \int_0^L \left(\chi - g\left(\left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \right) \frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{\partial q}{\partial x}\, dx\, dt \geq 0. \quad (34)$$

Так как q – произвольная функция, то неравенство будет справедливо при $q = v$ и при $q = -v$, где $v \in L_2(0,T; W_2^1(0,L))$ – произвольная функция, следовательно, имеем

$$\chi = g\left(\left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \right) \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Теорема 2 доказана. $\square$

Литература

1. *Кадыров Ф.М., Костерин А.В., Скворцов Э.В.* Плоская задача фильтрационной консолидации для упругого полупространства с разрывными начальными условиями // Прикл. механика и техн. физика. – 2016. – Т. 57, № 6. – С. 132–138.
2. *Зарецкий Ю.К.* Теория консолидации грунтов. – М.: Наука, 1967. – 270 с.
3. *Николаевский В.Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. – М.: Недра, 1984. – 232 с.
4. *Biot M.A.* Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media // J. Appl. Phys. – 1962. – V. 33, No 4. – P. 1482–1498. – doi: 10.1063/1.1728759.
5. *Егоров А.Г., Костерин А.В., Скворцов Э.В.* Консолидация и акустические волны в насыщенных пористых средах. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. – 102 с.
6. *Pavlova M.F., Rung E.V.* On the solvability of the problem of saturated-unsaturated filtration consolidation // Differ. Equations. – 2012. – V. 48, No 7. – P. 990–1004. – doi: 10.1134/S0012266112070105.
7. *Pavlova M.F., Rung E.V.* On the existence of a generalized solution of the saturated-unsaturated filtration problem // Diff. Equat. – 2018. – V. 54, No 3. – P. 352–362. – doi: 10.1134/S0012266118030072.
8. *Даутов Р.З., Дроботенко М.И., Ляшко А.Д.* Исследование корректности обобщенного решения задачи фильтрационной консолидации // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 4. – С. 515–521.
9. *Diersch H.-J.G., Perrochet P.* On the primary variable switching technique for simulating unsaturated-saturated flows // Adv. Water Resour. – 1999. – V. 23, No 3. – P. 271–301. – doi: 10.1016/S0309-1708(98)00057-8.
10. *Ахтареев А.А., Даутов Р.З.* Метод смешанной переменной для моделирования насыщенно-ненасыщенных течений // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2007. – Т. 149, кн. 4. – С. 58–72.
11. *Williams G.A., Miller C.T., Kelley C.T.* Transformation approaches for simulating flow in variably saturated porous media // Water Resour. Res. – 2000. – V. 36, No 4. – P. 923–934. – doi: 10.1029/1999WR900349.
12. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.

Поступила в редакцию
19.04.2021

Гнеденкова Валентина Львовна, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры вычислительной математики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *Valentina.Gnedenkova@kpfu.ru*

Павлова Мария Филипповна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *M.F.Pavlova@mail.ru*

Рунг Елена Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *HelenRung@mail.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2021, vol. 163, no. 3–4, pp. 250–260

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2021.3-4.250-260

Convergence of an Implicit Difference Scheme for the Problem of Saturated Filtration Consolidation with a Limiting Gradient

V.L. Gnedenkova[*], *M.F. Pavlova*[**], *E.V. Rung*[***]

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia

E-mail: [*]*Valentina.Gnedenkova@kpfu.ru*, [**]*M.F.Pavlova@mail.ru*, [***]*HelenRung@mail.ru*

Received April 19, 2021

Abstract

This work is devoted to the study of the convergence of an implicit difference scheme for a one-dimensional initial-boundary problem that simulates the process of filtration consolidation with a limiting gradient. From a mathematical point of view, this model is a system of partial differential equations for the displacements of an elastic medium and fluid pressure. In addition, the equation for pressure is degenerate, with nonlinearity in the spatial operator, which generates a non-smooth solution. In this regard, the study of the convergence was carried out under minimal conditions on the smoothness of the initial data. It was based on obtaining a number of a priori estimates that allow, using the monotonicity method, to establish the convergence of piecewise constant completions of the difference solution to a generalized solution of the problem. The spatial operator was approximated using the method of summation identities.

Keywords: filtration, filtration consolidation, difference schemes, difference scheme convergence

References

1. Kadyrov F.M., Kosterin A.V., Skvortsov E.V. Plane problem of filtration consolidation for an elastic half-space with discontinuous initial conditions. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2016, vol. 57, no. 6, pp. 1076–1082. doi: 10.1134/S0021894416060158.
2. Zaretsky Yu.K. *Teoriya konsolidatsii gruntov* [The Theory of Soil Consolidation]. Moscow, Nauka, 1967. 270 p. (In Russian)
3. Nikolaevskii V.N. *Mekhanika poristykh i treshchinovatykh sred* [Mechanics of Porous and Cracked Media]. Moscow, Nedra, 1984. 232 p. (In Russian)
4. Biot M.A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *J. Appl. Phys.*, 1962, vol. 33, no. 4, pp. 1482–1498. doi: 10.1063/1.1728759.
5. Egorov A.G., Kosterin A.V., Skvortsov E.V. *Konsolidatsiya i akusticheskie volny v nasyshchennykh poristykh sredakh* [Consolidation and Acoustic Waves in Saturated Porous Media]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1990. 102 p. (In Russian)

6. Pavlova M.F., Rung E.V. On the solvability of the problem of saturated-unsaturated filtration consolidation. *Differ. Equations*, 2012, vol. 48, no. 7, pp. 990–1004. doi: 10.1134/S0012266112070105.

7. Pavlova M.F., Rung E.V. On the existence of a generalized solution of the saturated-unsaturated filtration problem. *Differ. Equations*, 2018, vol. 54, no. 3, pp. 352–362. doi: 10.1134/S0012266118030072.

8. Dautov R.Z., Drobotenko M.I., Lyashko A.D. Investigation of the well-posedness of the generalized solution of the filtration consolidation problem. *Differ. Equations*, 1997, vol. 33, no. 4, pp. 518–525.

9. Diersch H.-J.G., Perrochet P. On the primary variable switching technique for simulating unsaturated-saturated flows. *Adv. Water Resour.*, 1999, vol. 23, no. 3, pp. 271–301. doi: 10.1016/S0309-1708(98)00057-8.

10. Akhtareev A.A., Dautov R.Z. Mixed variable technique for simulating unsaturated-saturated flows. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2007, vol. 149, no. 4, pp. 58–72. (In Russian)

11. Williams G.A., Miller C.T., Kelley C.T. Transformation approaches for simulating flow in variably saturated porous media. *Water Resour. Res.*, 2000, vol. 36, no. 4, pp. 923–934. doi: 10.1029/1999WR900349.

12. Lions J.-L. *Nekotorye metody resheniya nelineinykh kraevykh zadach* [Some Methods of Solving Nonlinear Boundary Value Problems]. Moscow, Mir, 1972. 587 p. (In Russian)

***Для цитирования*:** *Гнеденкова В.Л., Павлова М.Ф., Рунг Е.В.* О сходимости неявной разностной схемы для задачи насыщенной фильтрационной консолидации с предельным градиентом // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2021. – Т. 163, кн. 3–4. – С. 250–260. – doi: 10.26907/2541-7746.2021.3-4.250-260.

***For citation*:** Gnedenkova V.L., Pavlova M.F., Rung E.V. Convergence of an implicit difference scheme for the problem of saturated filtration consolidation with a limiting gradient. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2021, vol. 163, no. 3–4, pp. 250–260. doi: 10.26907/2541-7746.2021.3-4.250-260. (In Russian)