УДК 519.853

МЕТОД ОТСЕЧЕНИЙ С ОБНОВЛЕНИЕМ ПОГРУЖАЮЩИХ МНОЖЕСТВ И ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ

И.Я. Заботин, Р.С. Яруллин

Аннотация

Предлагается метод отсечений для решения задачи математического программирования. Последовательность приближений строится с использованием операции частичного погружения допустимой области в аппроксимирующие ее многогранные множества. В разработанном методе не требуется вложения каждого из аппроксимирующих множеств в предыдущее. Такая особенность метода дает возможность периодического отбрасывания любых полученных в процессе решения дополнительных ограничений. Описываются свойства метода, обосновывается его сходимость, получены оценки точности решения.

Ключевые слова: аппроксимирующее множество, отсекающая гиперплоскость, оценки точности решения, последовательность приближений, сходимость, условная минимизация.

Значительное место среди методов решения задач математического программирования занимают методы погружений-отсечений (см., например, [1–4]). Для большой части из них характерно то, что на каждой итерации при построении приближения используется аппроксимация области ограничений исходной задачи некоторым погружающим множеством более простой структуры. Каждое из этих погружающих множеств строится на основе предыдущего путем отсечения от него плоскостями некоторого подмножества, содержащего текущую итерационную точку.

Основная проблема таких методов при их практическом применении заключается в том, что от шага к шагу, как правило, неограниченно растет число отсекающих плоскостей, формирующих аппроксимирующие множества. Поэтому с увеличением числа шагов возрастает и трудоемкость решения задач нахождения итерационных точек. Таким образом, возникает потребность в разработке принципов обновления погружающих множеств в алгоритмах отсечений с целью освобождения от накапливающихся дополнительных ограничений.

В кратком сообщении [5] нами предложен метод, в котором не требуется вложения погружающих множеств в предыдущие, что позволяет на определенных итерациях полностью или частично обновлять эти множества. В настоящей работе предлагается метод отсечений, обобщающий [5], в котором также заложена возможность периодического обновления аппроксимирующих множеств, в частности, за счет отбрасывания любого числа ранее построенных отсекающих плоскостей. Приводится подробное обоснование разработанного здесь метода, а значит, и метода [5]. Кроме того, предлагаются оценки точности решения исходной задачи в случае, когда целевая функция является выпуклой.

Пусть $f_j(x)$, $j \in J = \{1, \ldots, m\}$, – выпуклые в n-мерном евклидовом пространстве R_n функции,

$$D' = \{x \in R_n : f_j(x) \leq 0,\ j \in J\},$$

$D'' \subset R_n$ – выпуклое замкнутое множество,

$$D = D' \bigcap D'',$$

$f(x)$ – непрерывная, достигающая на D минимального значения функция, и для всех $j \in J$ множества $D_j = \{x \in R_n : f_j(x) \le 0\}$ имеют непустую внутренность $\operatorname{int} D_j$. Решается задача

$$\min\{f(x) : x \in D\}. \tag{1}$$

Положим $F(x) = \max_{j \in J} f_j(x)$, $D'_\varepsilon = \{x \in R_n : F(x) \le \varepsilon\}$, где $\varepsilon \ge 0$, $f^* = \min\{f(x) : x \in D\}$, $X^* = \{x \in D : f(x) = f^*\}$, $E^* = \{x \in R_n : f(x) \le f^*\}$, $W^1(x, D_j) = \{a \in R_n : \langle a, z - x\rangle \le 0 \ \forall z \in D_j, \ ||a|| = 1\}$ – множество нормированных обобщенно-опорных векторов для множества D_j в точке $x \in R_n$, $K = \{0, 1, \ldots\}$.

Отметим, что в (1) внутренность множества D может быть пустой, если, например, $\operatorname{int} D'' = \emptyset$ или $\operatorname{int} D' = \emptyset$.

Предлагаемый метод решения задачи (1) вырабатывает последовательности приближений $\{y_i\}$, $i \in K$, $\{x_k\}$, $k \in K$, и заключается в следующем.

Строится выпуклое замкнутое множество $M_0 \subset R_n$, содержащее хотя бы одну точку множества X^*, например точку x^*. Выбираются точки $v^j \in \operatorname{int} D_j$ для всех $j \in J$. Задается число $\varepsilon_0 \ge 0$. Полагается $k = 0$, $i = 0$.

1. Находится точка

$$y_i \in M_i \bigcap D'' \bigcap E^*. \tag{2}$$

2. Формируется множество

$$J_i = \{j \in J : y_i \notin D_j\}.$$

Если $J_i = \emptyset$, то $y_i \in X^*$, и процесс завершается.

3. Если $y_i \notin D'_{\varepsilon_k}$, то выбирается выпуклое замкнутое множество $G_i \subset R_n$, содержащее точку x^*, полагается

$$Q_i = M_i \bigcap G_i \tag{3}$$

и следует переход к п. 4. В противном случае полагается $i_k = i$,

$$x_k = y_{i_k}, \tag{4}$$

и выбирается выпуклое замкнутое множество $Q_i = Q_{i_k}$ такое, что

$$x^* \in Q_i. \tag{5}$$

Задается число $\varepsilon_{k+1} \ge 0$, значение k увеличивается на единицу, и следует переход к очередному пункту.

4. Для каждого $j \in J_i$ в интервале (v^j, y_i) выбирается точка z_i^j так, чтобы $z_i^j \notin \operatorname{int} D_j$ и при некотором $q_i^j \in [1, q]$, $q < +\infty$, для точки

$$\overline{y}_i^j = y_i + q_i^j (z_i^j - y_i) \tag{6}$$

выполнялось включение $\overline{y}_i^j \in D_j$. Для всех $j \in J \setminus J_i$ полагается $z_i^j = \overline{y}_i^j = y_i$.

5. Выбирается множество $H_i \subset J_i$ так, чтобы выполнялось включение $j_i \in H_i$, где номер j_i удовлетворяет условию

$$\|y_i - z_i^{j_i}\| = \max_{j \in J_i} \|y_i - z_i^j\|. \tag{7}$$

6. Для каждого $j \in H_i$ выбирается конечное множество $A_i^j \subset W^1(z_i^j, D_j)$, полагается
$$M_{i+1} = Q_i \bigcap_{j \in H_i} \{x \in R_n : \langle a, x - z_i^j \rangle \leq 0 \ \forall a \in A_i^j\}, \tag{8}$$
и следует переход к п. 1 при i, увеличенном на единицу.

Сделаем некоторые замечания, касающиеся данного метода.

Прежде всего отметим, что множество $M_i \bigcap D'' \bigcap E^*$ содержит по крайней мере точку x^*, а значит, выбор y_i из условия (2) возможен. В частности, точку y_i можно находить как решение задачи
$$f(y_i) = \min\{f(x) : x \in M_i \bigcap D''\}. \tag{9}$$

Если в п. 5 положить $H_i = J_i$, то отпадает потребность в фиксировании согласно (7) номера j_i «самого глубокого» на i-м шаге отсечения.

Для выбора начального аппроксимирующего множества M_0 имеется много возможностей. Если, например, положить
$$M_0 = \bigcap_{j \in J'} D^j, \tag{10}$$
где $J' \subset J$, то нет необходимости в задании точек $v^j \in \operatorname{int} D_j$, $j \in J'$, поскольку тогда для всех $i \in K$ и $j \in J'$ выполняются включения $y_i \in D_j$, и точки v^j, $j \in J'$, в построении отсекающих плоскостей не участвуют. Отметим также, что выбор M_0 в виде (10) удобен в том случае, когда множество D'' определено системой линейных равенств или неравенств, а $\bigcap_{j \in J'} D_j$ – выпуклый многогранник.

Приведем теперь принципиальное замечание, касающееся возможности периодического обновления погружающих множеств M_i за счет отбрасывания любого числа построенных к i-му шагу отсекающих плоскостей.

Пусть в (3) $G_i = R_n$ для всех $i \in K$, и для точки y_i выполняется включение
$$y_i \in D'_{\varepsilon_k}. \tag{11}$$
Положим
$$Q_i = M_{r_i}, \tag{12}$$
где $0 \leq r_i \leq i = i_k$. Ясно, что при всех $r_i = 0, \ldots, i$ условие (5) выполняется. Согласно (12) в качестве Q_i можно выбирать любое из построенных к i-му шагу погружающих множеств $M_0, \ldots, M_i$. В частности, для всех $i \in K$, для которых выполняется (11), можно положить
$$Q_i = M_0.$$
Тем самым при каждом $i = i_k$, $k \in K$, произойдет отбрасывание всех накопившихся к шагу i_k отсекающих плоскостей.

Понятно, что множества Q_i при выполнении условия (11) можно выбирать и не следуя этому замечанию. При проведении численных экспериментов они задавались и иными способами, например,
$$Q_i = M_i \bigcap_{j \in H_{i-1}} \{x \in R_n : \langle a, x - z_{i-1}^j \rangle \leq 0 \quad \forall a \in A_{i-1}^j\}, \ i \geq 1.$$
Кроме того, отметим, что согласно (5) множества Q_i при условии (11), как и множество M_0, можно выбирать совпадающими с R_n.

Далее, отметим, что при всех $i \in K$, независимо от выполнения условия (11), множества Q_i допустимо задавать в виде (3), поскольку включения (5) для них выполняются. В таком случае ввиду (8)

$$M_{i+1} = M_i \bigcap G_i \bigcap_{j \in H_i} \{x \in R_n : \langle a, x - z_i^j \rangle \leq 0 \quad \forall a \in A_i^j\} \quad \forall i \in K,$$

то есть от шага к шагу происходит накопление отсекающих плоскостей и никаких обновлений погружающих множеств не происходит. Свойства последовательности $\{y_i\}$, построенной с условием (3) выбора множеств Q_i при всех $i \in K$, будут обсуждаться ниже.

Перейдем к исследованию сходимости предложенного метода. Сначала изучим некоторые свойства построенной согласно методу последовательности $\{y_i\}$. Везде далее будем предполагать, что она ограничена.

Лемма 1. *Пусть $U \subset R_n$ – выпуклое множество, L – его несущее подпространство, а множество Q из аффинной оболочки U ограничено и не содержится в $\mathrm{ri}\, U$ – относительной внутренности множества U. Если точка $u \in R_n$ такова, что выполняется включение $u \in \mathrm{ri}\, U$, то найдется такое число $\delta > 0$, что для всех $z \in Q \setminus \mathrm{ri}\, U$ и всех $a \in L \bigcap W^1(z, U)$ справедливо неравенство $\langle a, u - z \rangle \leq -\delta$.*

Доказательство утверждения приведено в [2].

С учетом сделанного выше замечания о возможности выбора множеств Q_i в виде (3), независимо от принадлежности точек y_i множествам D'_{ε_k}, сформулируем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Пусть последовательность $\{y_i\}$ построена предложенным методом с условием, что для всех $i \in K$, начиная с некоторого номера $i' \geq 0$, множества Q_i выбраны согласно* (3). *Тогда любая предельная точка последовательности $\{y_i\}$, $i \in K$, $i \geq i'$, принадлежит множеству D.*

Доказательство. Пусть $\{y_i\}$, $i \in K' \subset K$, – любая сходящаяся подпоследовательность, выделенная из последовательности точек y_i, $i \in K$, $i \geq i'$ и $\overline{y}$ – ее предельная точка. Если показать, что $\overline{y} \in D' \bigcap D''$, то утверждение леммы будет доказано. Сразу отметим, что $\overline{y} \in D''$ в силу условия (2) выбора точек y_i, $i \in K'$, и замкнутости множества D''. Поэтому достаточно доказать включение

$$\overline{y} \in D'. \tag{13}$$

Пусть индекс $l \in J$ такой, что номер j_i, удовлетворяющий условию (7), совпадает с l для бесконечного числа номеров $i \in K'$. Положим

$$K_l = \{i \in K' : j_i = l\}$$

и докажем сначала равенство

$$\lim_{i \in K_l} \|z_i^l - y_i\| = 0, \tag{14}$$

учитывая, что вместе с последовательностью $\{y_i\}$, $i \in K_l$, для каждого $j \in J$ построены и последовательности $\{z_i^j\}$, $\{\overline{y}_i^j\}$, $i \in K_l$.

Заметим, что для всех $i \in K$ и $j \in J$

$$z_i^j = y_i + \gamma_i^j (v^j - y_i), \tag{15}$$

где $\gamma_i^j \in [0,1)$, причем $\gamma_i^l > 0$ для всех $i \in K_l$. Для произвольного $i \in K_l$ зафиксируем номер $p_i \in K_l$ такой, что $p_i > i$. В силу (3), (8) выполняется включение $M_{p_i} \subset M_i$. Кроме того, ввиду (2) $y_{p_i} \in M_{p_i}$, а любой элемент множества A_i^l является обобщенно-опорным и для множества M_{p_i} в точке z_i^l. Следовательно,

$$\langle a, y_{p_i} - z_i^l \rangle \leq 0 \ \forall a \in A_i^l.$$

Отсюда с учетом (15) при $j = l$ для всех $a \in A_i^l$ имеем

$$\langle a, y_i - y_{p_i} \rangle \geq \gamma_i^l \langle a, y_i - v^l \rangle.$$

По лемме 1 найдется такое число $\delta_l > 0$, что $\langle a, y_i - v^l \rangle \geq \delta_l$ для всех $i \in K_l$, $a \in A_i^l$. Значит, $\langle a, y_i - y_{p_i} \rangle \geq \gamma_i^l \delta_l$ для всех $a \in A_i^l$, а поскольку $\|a\| = 1$ для всех $a \in A_i^l$, то

$$\|y_i - y_{p_i}\| \geq \gamma_i^l \delta_l \quad \forall\, i, p_i \in K_l, \quad p_i > i. \tag{16}$$

Так как последовательность $\{y_i\}$, $i \in K_l$, является сходящейся, то согласно (16) $\gamma_i^l \to 0$, $i \to \infty$, $i \in K_l$. Поэтому из (15) при $j = l$ с учетом ограниченности последовательности $\{||v^l - y_i||\}$, $i \in K_l$, следует равенство (14).

Далее, в силу условия (7) для всех $i \in K_l$ справедливы неравенства $\|z_i^l - y_i\| \geq$ $\geq \|z_i^j - y_i\|$ $j \in J_i$. Кроме того, согласно п. 4 метода $\|z_i^j - y_i\| = 0$ для всех $j \in J \setminus J_i$, $i \in K_l$. Следовательно, при любых $i \in K_l$, $j \in J$

$$\|z_i^l - y_i\| \geq ||z_i^j - y_i||.$$

Тогда ввиду (14)

$$\lim_{i \in K_l} \|z_i^j - y_i\| = 0 \quad \forall\, j \in J. \tag{17}$$

Согласно п. 4 алгоритма для каждого $i \in K_l$ и $j \in J$ точка $\overline{y}_i^j$ либо совпадает с y_i, либо имеет вид (6). Так как последовательность $\{y_i\}$, $i \in K_l$, ограничена, то отсюда с учетом (15) следует ограниченность последовательностей $\{\overline{y}_i^j\}$, $i \in K_l$, для всех $j \in J$. Выделим теперь для каждого $j \in J$ из последовательности $\{\overline{y}_i^j\}$, $i \in K_l$, сходящуюся подпоследовательность $\{\overline{y}_i^j\}$, $i \in K_l^j \subset K_l$, и пусть u_j – ее предельная точка. Заметим, что $u_j \in D_j$, $j \in J$, в силу замкнутости множеств D_j. Положим для каждого $j \in J$

$$P_1^j = \{i \in K_l^j : j \in J_i\}, \quad P_2^j = K_l^j \setminus P_1^j.$$

Хотя бы одно из множеств P_1^j или P_2^j для каждого $j \in J$ состоит из бесконечного числа номеров. Перейдем теперь при каждом фиксированном $j \in J$ к пределу в равенствах (6) по $i \to \infty$, $i \in P_1^j$, с учетом (17), если множество P_1^j бесконечно, или в равенствах $\overline{y}_i^j = y_i$ по $i \to \infty$, $i \in P_2^j$, если бесконечным является множество P_2^j. Тогда получим равенства $\overline{y} = u_j$ для всех $j \in J$, из которых следует включение (13). Лемма доказана. □

Если в методе положить

$$\varepsilon_k = 0 \quad \forall\, k \in K, \tag{18}$$

то ни одна из точек x_k зафиксирована не будет, поскольку $D'_{\varepsilon_k} = D'$, а $y_i \notin D'$ для всех $i \in K$. В связи с этим отметим, что при выполнении (18) множества Q_i для всех $i \in K$ будут иметь вид (3). Приведем утверждение, касающиеся свойств последовательности $\{y_i\}$, построенной с условием (18).

Теорема 1. *Пусть числа ε_k в методе выбраны согласно* (18). *Тогда любая предельная точка последовательности $\{y_i\}$ принадлежит X^*, а если при этом для всех $i \in K$ выполняется* (9), *то вся последовательность $\{y_i\}$ сходится к множеству X^*.*

Доказательство. Пусть $\{y_i\}$, $i \in K_1 \subset K$, – любая сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{y_i\}$, $i \in K$, и $\overline{y}$ – ее предельная точка. Как отмечено выше, для всех $i \in K$ выполняется (3). Тогда по лемме 2 справедливо включение $\overline{y} \in D$, а значит, $f(\overline{y}) \geq f^*$. С другой стороны, ввиду (2) $f(y_i) \leq f^*$ для всех $i \in K$. Переходя в последнем неравенстве к пределу по $i \in K_1$, получим $f(\overline{y}) \leq f^*$. Таким образом, $f(\overline{y}) = f^*$, и первое утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь все точки y_i, $i \in K$, удовлетворяют условию (9). В силу (3), (8) $M_{i+1} \subset M_i$, $i \in K$, а значит, $f(y_{i+1}) \geq f(y_i)$, $i \in K$. Отсюда с учетом ограниченности $\{y_i\}$, $i \in K$, следует, что $\{f(y_i)\}$, $i \in K$, сходится. Тогда в силу уже доказанного первого утверждения последовательность $\{f(y_i)\}$, $i \in K$, является минимизирующей, и по теореме 1 [6, с. 74] второе утверждение теоремы тоже доказано. □

Перейдем, наконец, к исследованию сходимости последовательности $\{x_k\}$. Прежде всего покажем, что при условии положительности всех чисел ε_k наряду с последовательностью $\{y_i\}$, $i \in K$, будет построена согласно (4) и последовательность $\{x_k\}$, $k \in K$.

Лемма 3. *Пусть последовательность $\{y_i\}$, $i \in K$, построена предложенным методом, и при этом числа ε_k были выбраны так, что*

$$\varepsilon_k > 0 \quad \forall\, k \in K. \tag{19}$$

Тогда для каждого $k \in K$ существует такой номер $i = i_k$, что выполняется равенство (4).

Доказательство. 1. Пусть $k = 0$. Если $y_0 \in D'_{\varepsilon_0}$, то согласно п. 3 алгоритма $i_0 = 0$, $x_0 = y_{i_0} = y_0$, и равенство (4) для $k = 0$ выполняется. Поэтому будем считать, что $y_0 \notin D'_{\varepsilon_0}$. Покажем тогда существование номера $i = i_0 > 0$, для которого справедливо включение

$$y_{i_0} \in D'_{\varepsilon_0}. \tag{20}$$

Допустим противное, то есть

$$y_i \notin D'_{\varepsilon_0} \quad \forall\, i \in K, \quad i > 0. \tag{21}$$

Выделим из ограниченной последовательности $\{y_i\}$, $i \in K$, $i > 0$, сходящуюся подпоследовательность $\{y_i\}$, $i \in K'$, и пусть y' – ее предельная точка. Согласно п. 3 алгоритма с учетом сделанных допущений для всех $i \in K$ множество Q_i имеет вид (3). Тогда по лемме 2 выполняется включение $y' \in D'$, и, следовательно,

$$F(y') \leq 0. \tag{22}$$

С другой стороны, в силу (21) $F(y_i) > \varepsilon_0$ для всех $i \in K'$. Переходя в последнем неравенстве к пределу по $i \in K'$, получим $F(y') \geq \varepsilon_0 > 0$, что противоречит (22). Таким образом, существование номера i_0, для которого справедливо (20), доказано, и равенство (4) имеет место для $k = 0$.

2. Допустим теперь, что (4) выполняется при некотором фиксированном $k \geq 0$, то есть $x_k = y_{i_k}$ при выбранном значении k. Покажем существование такого номера $i_{k+1} > i_k$, что
$$y_{i_{k+1}} \in D'_{\varepsilon_{k+1}}, \tag{23}$$
тогда $x_{k+1} = y_{i_{k+1}}$, и лемма будет доказана.

Предположим противное, то есть
$$y_i \notin D'_{\varepsilon_{k+1}} \quad \forall\, i > i_k. \tag{24}$$
Выберем среди точек $y_i,\ i > i_k$, сходящуюся подпоследовательность $\{y_i\},\ i \in K''$, и пусть y'' – ее предельная точка. Согласно (24) для всех $i \in K,\ i > i_k$, множества Q_i по алгоритму задаются в виде (3). Значит, по лемме 2 выполняется неравенство $F(y'') \leq 0$. Как и в первой части доказательства, из условия (24) с учетом (19) легко получается неравенство $F(y'') > 0$, противоречащее предыдущему. Таким образом, показано существование номера i_{k+1}, удовлетворяющего (23). Лемма доказана. □

Теорема 2. *Пусть последовательность* $\{x_k\},\ k \in K$, *построена предложенным методом с условием, что числа* $\varepsilon_k,\ k \in K$, *выбраны согласно* (19), *и*
$$\varepsilon_k \to 0, \quad k \to \infty. \tag{25}$$
Тогда любая предельная точка этой последовательности принадлежит множеству X^*, *а если для всех* $k \in K$ *выполняются неравенства*
$$f(x_{k+1}) \geq f(x_k), \tag{26}$$
то вся последовательность $\{x_k\},\ k \in K$, *сходится к множеству* X^*.

Доказательство. Так как в силу сделанного предположения последовательность $\{y_i\}$ ограничена, то $\{x_k\}$ также ограничена. Пусть $\{x_k\},\ k \in K' \subset K$, – любая сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x_k\},\ k \in K$, и $\overline{x}$ – ее предельная точка. Покажем, что
$$\overline{x} \in X^*, \tag{27}$$
тогда первое утверждение будет доказано. Действительно, для всех $k \in K$ справедливы неравенства
$$0 < F(x_k) \leq \varepsilon_k.$$
Отсюда с учетом (25) следует, что $\lim\limits_{k \in K} F(x_k) = 0$. Тогда
$$\lim_{k \in K} F(x_k) = \lim_{k \in K'} F(x_k) = F(\overline{x}) = 0$$
и $\overline{x} \in D'$. Кроме того, $x_k \in D''$ для всех $k \in K'$, и в силу замкнутости множества D'' выполняется включение $\overline{x} \in D''$. Таким образом, $\overline{x} \in D$, и поэтому
$$f(\overline{x}) \geq f^*.$$
С другой стороны, согласно (2) $f(x_k) \leq f^*,\ k \in K'$, а значит, $f(\overline{x}) \leq f^*$. Следовательно, $f(\overline{x}) = f^*$, и включение (27) доказано.

Пусть теперь для последовательности $\{x_k\}$ выполняется условие (26). Тогда ввиду ограниченности $\{x_k\}$ последовательность $\{f(x_k)\}$ является сходящейся, и по доказанному выше $\lim\limits_{k \in K} f(x_k) = f^*$. Поэтому в силу вышеупомянутой известной теоремы 1 [6, с. 74] второе утверждение тоже доказано. □

Заметим, что условие (26) для построенной методом последовательности $\{x_k\}$ имеет место, если, например, для всех $k \in K$ выполняются включения $M_{i_{k+1}} \subset M_{i_k}$, а точки y_{i_k} найдены согласно равенству (9), в котором $i = i_k$.

Отметим также, что для выделения из последовательности $\{x_k\}$ минимизирующей подпоследовательности $\{x_{k_l}\}$, $l \in K$, достаточно номера k_l выбрать из условия $f(x_{k_{l+1}}) \geq f(x_{k_l})$ для всех $l \in K$.

При исследовании сходимости метода использовалось предположение об ограниченности последовательности $\{y_i\}$. Ясно, что ограниченность $\{y_i\}$ можно обеспечить за счет соответствующего выбора множеств M_0 и Q_i.

Получим теперь для предложенного метода оценки точности решения задачи и на их основе приведем оценки скорости сходимости последовательности $\{x_k\}$.

Опишем сначала такой алгоритм метода, где на каждой итерации легко оценить значение f^*.

Пусть в (1) $D'' = R_n$, то есть $D = D'$, $\operatorname{int} D' \neq \emptyset$, и известна точка $v \in \operatorname{int} D'$. Положим в методе $v^j = v$ для всех $j \in J$. Пусть на i-й итерации найдены согласно (6) точки $\overline{y}_i^j \in D_j$, $j \in J_i$, и зафиксирован такой номер $r_i \in J_i$, что $\overline{y}_i^{r_i} \in D'$. Тогда, положив $\overline{y}_i = \overline{y}_i^{r_i}$, имеем оценки

$$f(y_i) \leq f^* \leq f(\overline{y}_i).$$

Покажем, далее, что при некоторых дополнительных условиях на исходную задачу оценки близости значений $f(x_k)$ и приближений x_k к значению f^* и множеству X^* можно получить и для последовательности $\{x_k\}$, построенной общим методом.

Везде ниже будем считать, что функция $f(x)$ выпукла, а функции $f_j(x)$ сильно выпуклы с константами сильной выпуклости μ_j соответственно. Кроме того, пусть $D'' = R_n$, множество $D' = D$ удовлетворяет условию Слейтера, и любая точка абсолютного минимума функции $f(x)$, при наличии таковых, не принадлежат множеству $\operatorname{int} D'$.

Докажем прежде всего, что при сделанных дополнительных предположениях о задаче (1) ее решение единственно.

Допустим, что это утверждение неверно. Выберем x_1^*, $x_2^* \in X^*$ так, что $x_1^* \neq x_2^*$, и положим $z = \alpha x_1^* + (1-\alpha)x_2^*$, где $0 < \alpha < 1$. Тогда с учетом строгой выпуклости функции $F(x)$ и равенств $F(x_1^*) = F(x_2^*) = 0$ имеем $F(z) < \alpha F(x_1^*) + (1-\alpha)F(x_2^*) = 0$, а значит, $f(z) > f^*$. С другой стороны, $f(z) \leq \alpha f(x_1^*) + (1-\alpha)f(x_2^*) = f^*$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

В связи с доказанным будем считать далее, что $X^* = \{x^*\}$.

Положим $X_1^*(\delta) = \{x \in R_n : ||x - x^*|| \leq \delta\}$, $X_2^*(\gamma) = \{x \in R_n : |f(x) - f^*| \leq \gamma\}$, где $\gamma, \delta \geq 0$. Пользуясь методикой, близкой к [7], докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 4. *Пусть $\varepsilon > 0$, точка $y \in D'_\varepsilon$ такова, что $y \neq x^*$ и при всех $\alpha \in (0,1]$ для точки $z = \alpha y + (1-\alpha)x^*$ выполняется неравенство*

$$F(z) > 0. \tag{28}$$

Тогда справедливо включение

$$y \in X_1^*(\delta), \tag{29}$$

где $\delta = \sqrt{\varepsilon/\mu}$, $\mu = \min_{j \in J} \mu_j$.

Доказательство. Согласно (28) и равенству $F(x^*) = 0$ имеем $F(z) - F(x^*) = F(x^* + \alpha(y - x^*)) - F(x^*) > 0$, а значит,

$$\frac{F(x^* + \alpha(y - x^*)) - F(x^*)}{\alpha} > 0$$

для любого $\alpha \in (0,1]$. Переходя в последнем неравенстве к пределу по $\alpha \to +0$, получим для производной $F'(x^*, y-x^*)$ функции $F(x)$ в точке x^* по направлению $y - x^*$ следующее неравенство:

$$F'(x^*, y - x^*) \geq 0. \tag{30}$$

Известно (см., например, [8, с. 74]), что

$$F'(x^*, y - x^*) = \max\{\langle c(x^*), y - x^*\rangle : c(x^*) \in \partial F(x^*)\},$$

где $\partial F(x^*)$ – субдифференциал функции $F(x)$ в точке x^*. Тогда отсюда и из (30) вытекает существование такого $c'(x^*) \in \partial F(x^*)$, что

$$\langle c'(x^*), y - x^*\rangle \geq 0. \tag{31}$$

Далее, пусть μ – константа сильной выпуклости функции $F(x)$. Нетрудно проверить, что $\mu = \min\limits_{j \in J} \mu_j$. Ввиду сильной выпуклости $F(x)$ для вектора $c'(x^*)$ имеет место неравенство [6, с. 221]

$$F(y) \geq F(x^*) + \langle c'(x^*), y - x^*\rangle + \mu||y - x^*||^2,$$

из которого с учетом (31) и равенства $F(x^*) = 0$ следует, что $F(y) \geq \mu||y - x^*||^2$. Но по условию $F(y) \leq \varepsilon$. Значит,

$$\|y - x^*\| \leq \sqrt{\varepsilon/\mu}, \tag{32}$$

и утверждение леммы доказано. □

Лемма 5. *Пусть выполняются условия леммы* 4, *и, кроме того, функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию Липшица с константой* L. *Тогда*

$$y \in X_1^*(\delta) \bigcap X_2^*(\gamma), \tag{33}$$

где δ *определено в* (29), *а* $\gamma = L\delta$.

Доказательство утверждения следует из (29), а также неравенства

$$|f(y) - f(x^*)| \leq L\|y - x^*\| \tag{34}$$

и оценки (32).

Лемма 6. *Пусть* $\varepsilon > 0$. *Тогда для любой точки* $y \in D'_\varepsilon \bigcap E^*$, $y \neq x^*$, *выполняется* (29), *а если функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию Липшица, то справедливо и включение* (33).

Доказательство. Положим $z = \alpha y + (1-\alpha)x^*$, где $\alpha \in (0,1]$. Докажем справедливость неравенства (28). Тогда для точки y будут выполнены условия леммы 4, и утверждение (29) будет доказано.

Предположим противное, допустим, что $F(z) \leq 0$. Тогда $z \in D$ и $f(z) \geq f^*$. С другой стороны, поскольку $y \in E^*$, $x^* \in E^*$, а множество E^* выпукло, то $z \in E^*$, и $f(z) \leq f^*$. Следовательно,

$$f(z) = f^*. \tag{35}$$

Однако, как показано выше, решение задачи (1) единственно, а $z \neq x^*$, так как $y \neq x^*$ и $\alpha > 0$. Полученное с равенством (35) противоречие доказывает неравенство (28), а значит, и включение (29).

Вторая часть утверждения леммы вытекает из (29), (34), (32). □

Лемма 7. *Пусть последовательность $\{y_i\}$ построена предложенным методом. Если для некоторого номера $i \in K$ и $r > 0$ выполняется $y_i \in D'_r$, то $y_i \in X_1^*(\delta)$ при $\delta = \sqrt{r/\mu}$, а если к тому же $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица, то $y_i \in X_1^*(\delta) \bigcap X_2^*(\gamma)$ при $\delta = \sqrt{r/\mu}$, $\gamma = L\delta$.*

Доказательство утверждений непосредственно следует из леммы 6, так как согласно (2) $y_i \in E^*$, и $y_i \neq x^*$ для всех $i \in K$.

Лемма 7 дает возможность оценивать на каждой итерации близость точки y_i к решению задачи. А именно, поскольку для всех $i \in K$ выполняется включение $y_i \in D'_{r_i}$, где $r_i = F(y_i)$, то по лемме 7

$$\|y_i - x^*\| \leq \delta_i,$$

где $\delta_i = \sqrt{F(y_i)/\mu}$. Кроме того, если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица, то для всех $i \in K$ справедливо также неравенство

$$|f(y_i) - f^*| \leq L\delta_i.$$

Теорема 3. *Пусть последовательность $\{x_k\}$ построена предложенным методом. Тогда для каждого $k \in K$ имеет место следующая оценка:*

$$\|x_k - x^*\| \leq \delta_k, \tag{36}$$

где $\delta_k = \sqrt{\varepsilon_k/\mu}$. Если же $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица, то, кроме (36), *при каждом $k \in K$ справедлива также оценка*

$$|f(x_k) - f^*| \leq L\delta_k. \tag{37}$$

Доказательство. Согласно (4) $x_k = y_{i_k}$ для всех $k \in K$, причем $y_{i_k} \in D'_{\varepsilon_k}$ и $y_{i_k} \neq x^*$. Тогда по лемме 7 выполняется включение $x_k \in X_1^*(\delta_k)$, $k \in K$, а значит, и неравенство (36). При условии Липшица на функцию $f(x)$ по той же лемме 7 имеет место и оценка (37). Теорема доказана. □

Зададим теперь числа ε_k, $k \geq 1$, в методе в виде

$$\varepsilon_k = 1/k^p, \tag{38}$$

где $p > 0$. Тогда согласно (36) для последовательности $\{x_k\}$ справедливы следующие оценки скорости сходимости:

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{1}{\sqrt{\mu}\, k^{p/2}}, \quad k \geq 1. \tag{39}$$

Кроме того, если для $f(x)$ выполняется условие Липшица, то наряду, с (39), имеем также в силу (37) оценки

$$|f(x_k) - f^*| \leq \frac{L}{\sqrt{\mu}\, k^{p/2}}, \quad k \geq 1.$$

Как уже отмечено в (38), числа ε_k, $k \geq 1$, допустимо выбирать, как и число ε_0, на предварительном шаге метода. Однако в таком случае последовательность $\{\varepsilon_k\}$ не будет адаптирована к процессу минимизации. Поэтому в методе предусмотрена возможность выбора чисел ε_k, $k \geq 1$, на шаге 3, то есть в ходе отыскания приближений. Приведем пример задания последовательности $\{\varepsilon_k\}$, связанной с процессом построения $\{x_k\}$.

Не выбирая конкретного значения, считаем ε_0 настолько большим, что $y_0 \in D'_{\varepsilon_0}$ и $x_0 = y_0$. Для всех $k \geq 0$ положим

$$\varepsilon_{k+1} = \sigma_k F(x_k),$$

где $0 < \sigma_k < 1$. Тогда для $\{\varepsilon_k\}$ справедливо (19), а при условии, что $\sigma_k \to 0$, $k \in K$, выполняется (25).

Summary

I.Ya. Zabotin, R.S. Yarullin. A Cutting-Plane Method with Updating of Approximating Sets and Estimates of the Solution Accuracy.

We propose a cutting-plane method for solving a mathematical programming problem. A sequence of approximations is constructed using the technique of partial immersion of the admissible set in the approximating polyhedral sets. The developed method does not require the inclusion of each of the approximating sets in the previous one. This peculiarity makes it possible to periodically drop any additional planes which occur in the problem-solving process. We describe the features of the method, prove its convergence, and obtain estimates of the solution accuracy.

Keywords: approximating set, cutting plane, estimates of solution accuracy, sequence of approximations, convergence, conditional minimization.

Литература

1. *Булатов В.П.* Методы погружения в задачах оптимизации. – Новосибирск: Наука, 1977. – 161 с.
2. *Заботин И.Я.* О некоторых алгоритмах погружений-отсечений для задачи математического программирования // Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. «Математика». – 2011. – Т. 4, № 2. – С. 91–101.
3. *Зангвилл У.И.* Нелинейное программирование. – М.: Сов. радио, 1973. – 312 с.
4. *Левитин Е.С., Поляк Б.Т.* Методы минимизации при наличии ограничений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1966. – Т. 6, № 5. – С. 787–823.
5. *Заботин И.Я., Яруллин Р.С.* Об одном подходе к построению алгоритмов отсечений с отбрасыванием отсекающих плоскостей // Изв. вузов. Матем. – 2013. – № 3. – С. 74–79.
6. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
7. *Заботин Я.И., Фукин И.А.* Об одной модификации метода сдвига штрафов для задач нелинейного программирования // Изв. вузов. Матем. – 2000. – № 12. – С. 49–54.
8. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980. – 319 с.

Поступила в редакцию
12.04.13

Заботин Игорь Ярославич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры анализа данных и исследования операций, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *IYaZabotin@mail.ru*

Яруллин Рашид Саматович – аспирант кафедры анализа данных и исследования операций, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *YarullinRS@gmail.com*